УДК 512.643.4

В. Н. Григорьева, К. В. Румянцева – студентки кафедры метрологического обеспечения и инновационных технологий
Г. М. Головачев (канд. физ.-мат. наук, доц.) – научный руководитель

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В МАТРИЦАХ 2x2

Рассматривается решение квадратного уравнения $\mathbf{X}^2+\mathbf{PX}+\mathbf{Q}=\mathbf{0}$, где $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{X}$ - матрицы размерности 2×2. Известен алгоритм получения решения этого уравнения [1,2]. Согласно этому алгоритму, необходимо составить характеристическое уравнение $\det\left(\lambda^2\mathbf{E}+\lambda\mathbf{P}+\mathbf{Q}\right)=0.$ Его решением будет являться набор собственных чисел λ_i. В случае матриц размерности 2×2 характеристическое уравнение является уравнением четвертого порядка и имеет четыре корня, возможно, совпадающих. Далее каждому собственному значению λ_i сопоставляется вектор $\mathbf{U}_i=\begin{pmatrix}u_{i1}\\ u_{i2}\end{pmatrix}$, который находится из уравнения $\left(\lambda_i^2\mathbf{E}+\lambda_i\mathbf{P}+\mathbf{Q}\right)\mathbf{U}_i=\mathbf{0}.$ Решение исходного квадратного уравнения находится в виде $\mathbf{X}_{ij}=\begin{pmatrix}u_{i1} & u_{j1}\\ u_{i2} & u_{j2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_i & 0\\ 0 & \lambda_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{i1} & u_{j1}\\ u_{i2} & u_{j2}\end{pmatrix}^{-1}$. Каждой паре собственных чисел λ_i и λ_j соответствует одна матрица $\mathbf{X}_{ij}$.

Несмотря на то, что алгоритм решения квадратных матричных уравнений известен, явное решение конкретного уравнения может оказаться громоздким. В настоящей работе рассматриваются случаи, в которых решение может быть упрощено и получено в явном виде.

В первую очередь рассмотрен простейший вариант – матрицы $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ являются диагональными, но не пропорциональными. Очевидно, что в этом случае характеристический многочлен раскладывается в произведение двух квадратных трехчленов. Решение матричного уравнения получается прямым применением изложенного алгоритма.

Рассмотрим численный пример.

$$\mathbf{X}^2+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\mathbf{X}+\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -35\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

Составим и решим характеристическое уравнение

$$\det\left(\lambda^2\mathbf{E}+\lambda\mathbf{P}+\mathbf{Q}\right)=0;$$

$$\det\left(\begin{pmatrix}\lambda^2 & 0\\ 0 & \lambda^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 2\lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -35\end{pmatrix}\right)=0;$$

$$\left(\lambda^2+\lambda-2\right)\left(\lambda^2+2\lambda-35\right)=0;$$

$$\lambda_1=1;\ \lambda_2=-2;\ \lambda_3=5;\ \lambda_4=-7.$$

Далее находим, что первым двум собственным числам соответствует собственный вектор $\mathbf{U}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, вторым двум собственным числам соответствует вектор $\mathbf{U}_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$. Перебирая все возможные пары λ_i и λ_j, получаем решения нашего уравнения

$$\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix},\ \mathbf{X}_2=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix},\ \mathbf{X}_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -7\end{pmatrix},\ \mathbf{X}_4=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}.$$

В дальнейшем рассмотрим недиагональные матрицы $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$ и $\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{pmatrix}$ с вещественными элементами. Как известно, характеристический многочлен с вещественными коэффициентами имеет или вещественные корни, или сопряженные комплексные корни. Следовательно, он может быть разложен в произведение двух квадратных трехчленов. Рассмотрим уравнение

$$\det\left(\lambda^2\mathbf{E}+\lambda\mathbf{P}+\mathbf{Q}\right)=\left(\lambda^2+\lambda b+c\right)\left(\lambda^2+\lambda k+m\right)=0,$$

где b, c, k, m – неизвестные коэффициенты. Приравнивая коэффициенты в разложении этих многочленов по степеням λ, получим систему уравнений для определения b, c, k, m

$$\begin{cases} p_{11}+p_{22}=b+k; \\ q_{11}+q_{22}+\det\mathbf{P}=c+m+bk; \\ p_{11}q_{22}+p_{22}q_{11}-p_{12}q_{21}-p_{21}q_{12}=ck+bm; \\ \det\mathbf{Q}=cm. \end{cases} \tag{1}$$

Общий случай выбора матриц $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ допускает существование решения этой системы, однако формулы для собственных значений могут оказаться громоздкими. Рассмотрим несколько вариантов квадратных матричных уравнений, которые приводят к простому явному решению системы (1).

В первом случае след матрицы $\mathbf{P}$ равен 0, $p_{11}+p_{22}=b+k=0.$

Из последнего уравнения (1) выражаем $m=\dfrac{\det\mathbf{Q}}{c}$ и подставляем во второе и третье уравнения системы. После нескольких преобразований получаем уравнение, позволяющее вычислить c.

$$c^2-\left(q_{11}+q_{22}-p_{11}^2-p_{12}p_{21}\right)c+\det\mathbf{Q}=0.$$

Отсюда выводятся формулы для вычисления всех коэффициентов

$$c=\frac{q_{11}+q_{22}-p_{11}^2-p_{12}p_{21}\pm\sqrt{\left(q_{11}+q_{22}-p_{11}^2-p_{12}p_{21}\right)^2-4\det\mathbf{Q}}}{2};$$

$$m=\frac{2\det\mathbf{Q}}{q_{11}+q_{22}-p_{11}^2-p_{12}p_{21}\pm\sqrt{\left(q_{11}+q_{22}-p_{11}^2-p_{12}p_{21}\right)^2-4\det\mathbf{Q}}};$$

$$k=\frac{p_{22}\left(q_{11}-q_{22}\right)-p_{21}q_{12}-p_{12}q_{21}}{c-m};$$

$$b=-k.$$

$$\lambda=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2} \text{ и } \lambda=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-4m}}{2}.$$

Во втором случае потребуем, чтобы $p_{11}=k$ и $p_{22}=b$, т.е. в этом случае соответствующие коэффициенты многочленов – множителей оказываются равными диагональным элементам матрицы $\mathbf{P}$. Для этого другая пара коэффициентов должна удовлетворять уравнениям

$$\begin{cases} q_{11}+q_{22}-p_{12}p_{21}=c+m; \\ \det\mathbf{Q}=cm. \end{cases}$$

Если коэффициенты матриц $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ допускают такое решение (это можно проверить с помощью теоремы Виета для квадратных уравнений), то находим решение системы

$$c=\frac{q_{11}+q_{22}-p_{12}p_{21}\pm\sqrt{\left(q_{11}+q_{22}-p_{12}p_{21}\right)^2-4\det\mathbf{Q}}}{2};$$

$$m=\frac{2\det\mathbf{Q}}{q_{11}+q_{22}-p_{12}p_{21}\pm\sqrt{\left(q_{11}+q_{22}-p_{12}p_{21}\right)^2-4\det\mathbf{Q}}};$$

$$\lambda=\frac{-p_{22}\pm\sqrt{p_{22}^2-2\left(\left(q_{11}+q_{22}-p_{12}p_{21}\right)\pm\sqrt{\left(q_{11}+q_{22}-p_{12}p_{21}\right)^2-4\det\mathbf{Q}}\right)}}{2};$$

$$\lambda=\frac{-p_{11}\pm\sqrt{p_{11}^2-\dfrac{8\det\mathbf{Q}}{\left(q_{11}+q_{22}-p_{12}p_{21}\right)\pm\sqrt{\left(q_{11}+q_{22}-p_{12}p_{21}\right)^2-4\det\mathbf{Q}}}}}{2}.$$

Таким образом, в работе удалось найти явные решения матричного квадратного уравнения для трех случаев специального выбора коэффициентов. Результаты работы могут оказаться полезными при проведении аналитических расчетов, связанных с поиском собственных значений матриц. Формулы для вычисления корней матричного уравнения позволяют получить явное решение этого уравнения. Если матричное уравнение допускает выбор коэффициентов, с помощью приведенной методики оно может быть приведено к простой форме.

Библиографичекский список

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра /М., Физматлит, 2007
2. Фаддев Д.К, Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре /СПб, Лань, 2008