УДК 517.2.26

С. Ю. Морозов – студент кафедры высшей математики
М. В. Макарова (канд. техн. наук, доц.) – научный руководитель

СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ В ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТОЖДЕСТВ И РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ

Постановка задачи. Различные способы нахождения суммы числовых и функциональных рядов, применяются при решении различных задач математического анализа. В функциональных рядах важно учитывать область сходимости, чтобы при решении уравнений не появились лишние корни.

Задача 1. Доказать тождество.

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

Доказательство.

Рассмотрим ряд, стоящий в левой части. Выпишем общий член этого ряда и разложим его в сумму простейших дробей:

$$U_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}=\frac{A(n^2+3n+2)+B(n^2+2n)+C(n^2+n)}{n(n+1)(n+2)};$$

Придадим переменной n следующие частичные значения:

$$n=0,\text{ тогда } A=\frac{1}{2};\quad n=-1,\text{ тогда } B=-1;\quad n=-2,\text{ тогда } C=\frac{1}{2}$$

$$U_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

Найдем частичную сумму ряда.

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)$$

После упрощений получаем

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Вычислим сумму ряда.

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}$$

Рассмотрим ряд, стоящий в правой части тождества:

$$U_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}$$
$$A=\frac{1}{2};B=-\frac{1}{2}$$
$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

В левой части мы получили , а в правой .Но, так как в левой части стоит 2, наше тождество верно.

Задача 2. Решить уравнение.

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^n=8\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Решение. Сумма числового ряда, стоящего в правой части, найдена нами в предыдущей задаче и равна . Таким образом, правая часть уравнения равна 2. Осталось просуммировать степенной ряд, стоящий в левой части. Найдём радиус сходимости этого ряда.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

Следовательно, искомая функция, соответствующая сумме ряда $S(x)$ определена при $x\in(-1;1)$. Заметим, что при ряд расходится по достаточному условию расходимости.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^n \quad |: x\neq 0$$
$$\frac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1}$$
Проинтегрируем по отрезку $[0;t]\subset(-1;1)$, получим
$$\int_0^t \frac{S(x)}{x}dx=\int_0^t\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t n\cdot x^n\,dx=\left[\sum_{n=1}^{\infty} x^n \,\Big|\right]_0^t=\frac{t}{1-t}$$
<u>Замечание.</u>

Отдельно рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Ряд геометрической прогрессии сходится, так как $|x|<1$.
Формула для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии выглядит так:
$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n;\ b_1=q;\ S=\frac{b_1}{1-q}=>\frac{q}{1-q}\text{, тогда }\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x}$$
Получим тождество
$$\int_0^t \frac{S(x)}{x}dx=\frac{t}{1-t}$$
И продифференцируем тождество по переменной t
$$\left(\int_0^t \frac{S(x)}{x}dx\right)'_t=\frac{S(t)}{t}=\left(\frac{t}{1-t}\right)'_t=\frac{t}{(1-t)^2}\text{ или }\frac{S(x)}{x}=\frac{1}{(1-x)^2}\text{, тогда }S(x)=\frac{x}{(1-x)^2}\text{, при }x\in(-1;1)$$
Таким образом, исходное уравнение примет вид
$$\frac{x}{(1-x)^2}=2;$$
В силу ограничения на $x\in(-1;1)$, при которых функциональный ряд, стоящий в левой части, сходится, имеет смысл только второй корень. Ответ: $x_2=2$

Задача 3. Решить уравнение.
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}\cdot x^{2n}=e^{x^2}\cdot(5x+4)$$
Используем формулу разложения e^t в ряд Маклорена.
$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\dots+\frac{t^n}{n!}+\dots$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}=e^t\ \text{ или }\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}=e^t$$
$$t=x^2\text{, тогда}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}\cdot x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n}{n!}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=2x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^{n-1}}{(n-1)!}+e^{x^2}$$
$$2x^2\cdot e^{x^2}+e^{x^2}=e^{x^2}\cdot(5x+4)$$
$$\begin{cases}x_1=3\\ x_2=-0{,}5\end{cases}$$
Оба корня подходят, так как рассмотренный степенной ряд сходится везде.
Ответ: x_1=3, x_2=-0,5.

Для решения первой задачи, мы использовали разбиение общего члена ряда слева и справа в виде суммы простейших дробей. В частичной сумме использовали перестановку членов слагаемых, для полного упрощения в тождестве. И наконец, нашли сумму ряда с обеих сторон, что и привело к верному доказательству тождества.

Во второй задаче мы использовали формулу для степенного ряда – радиуса сходимости. Определяли поведение функционального ряда(сходимость, расходимость), использовали интегрирование и дифференцирование ряда по замененной переменной.

В третей задаче мы воспользовались известным разложением в степенной ряд экспоненты.

Библиографический список

1. Власова Е.А. ряды М., издательство 4МГТУ, 2000г.
2. Харди Г.Г. расходящиеся ряды. М.: КомКнига, 2006г.