УДК 519.6 (075.8)

О. В. Гуля-Яновская – студентка кафедры высшей математики
Ю. А. Гусман (канд. техн. наук, доц.) – научный руководитель

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Данный научный метод широко распространён и очень удобен при работе со сложными расчётами и при различных исследованиях. Аппроксимация представляет собой замену одних объектов на другие, имеющие во многом схожие значения и свойства. Аппроксимация помогает привести задачу к более простому виду, соответственно это облегчает итоговое решение [1].

Аппроксимация заключается в том, что используя имеющуюся информацию по f(x) можно рассмотреть другую функцию φ(ч) близкую в некотором смысле к f(x), позволяющую выполнить над ней соответствующие операции и получить оценку погрешность такой замены.

Существует две разновидности аппроксимации – интерполяция и экстраполяция.

В вычислительной математике способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений называется интерполированием. Выделяется множество способов интерполяции: методом ближайшего соседа, многочленами, по формуле Ньютона, полиномом Лагранжа, по схеме Эйткена, сплайн-функцией, так же билинейная и кубическая интерполяции, рациональная, линейная, тригонометрическая и т.п.

В качестве примера отметим, что при интерполяции, заданная функция f(x) очень часто аппроксимируется с помощью многочлена, имеющего общий вид $\varphi(x)=p_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$.

В данном многочлене необходимо найти коэффициенты a_n, a_{n-1}, $\ldots a_0$, так как задачей является интерполирование, то определение коэффициентов необходимо выполнить из условия равенства $P_n(x_i)=y_i$ i=0,1,…n.

Для определения коэффициентов применяют интерполяционные многочлены специального вида, к ним относится и полином Лагранжа Ln(x) [2].

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}, \text{ где } i\neq j$$

В точках отличных от узлов интерполяции полином Лагранжа в общем случае не совпадает с заданной функцией.

Задачей экстраполяции является аппроксимирование функции вне заданного интервала, т.е. в математике и статистике, это приближённое определение значений функции f (x) в точках x, лежащих вне отрезка [x0, xn], по её значениям в точках x0 < x1 <... < xn. Наиболее распространённым видом экстраполяции является параболическая, при которой в качестве значения f (x) в точке x берётся значение многочлена Pn (x) степени n, принимающего в n + 1 точке xi заданные значения yi = f (x). Для параболической экстраполяции пользуются интерполяционными формулами.

Методы экстраполяции во многих случаях сходны с методами интерполяции.

Графические примеры аппроксимации представлены на рисунке 1, 2.

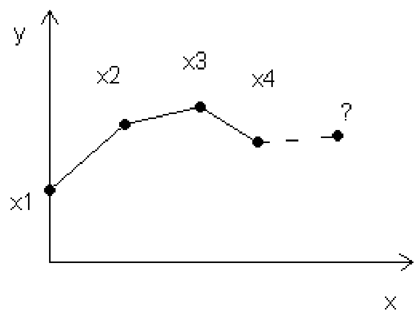

Рис. 1. Экстраполяция

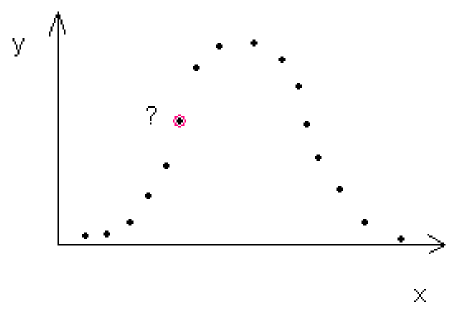

Рис. 2. Интерполяция

Как и в любых расчётах в аппроксимации существуют различные виды погрешностей и способы их вычислений.

Возникновение погрешностей при аппроксимации может быть обусловлено следующими причинами:

- неточностью математической модели, неточностью исходных данных;
- заменой точного решения задачи на приближенное в силу конечности числа операций в ЭВМ;
- наличием округлений, связанных с конечностью представлений чисел на разрядной сетке ЭВМ.

В соответствии с этими причинами погрешности получили следующие названия: неустранимая погрешность, погрешность численного метода, вычислительная погрешность.

Покажем на примере получение вышеперечисленных погрешностей.

Рассмотрим следующую математическую модель задачи приближения [3]:

$$g = A(f), \tag{1}$$

где f – приближаемая функция из пространства R_1, g – приближающая функция из пространства R_2, A – некоторое правило (оператор), составляющий функции f функцию g.

Неустранимая погрешность в задачах приближения обычно связана с неполной и неточной информацией о приближаемой функции (неточность значений функции, отсутствие информации о ее гладкости, т.е. о поведении между узлами сетки и т.д.). Дополнительная информация о приближаемой функции служит основой для построения более точной математической модели, для выбора более подходящего численного метода, и, следовательно, уменьшения неустранимой погрешности. Помимо этого анализ неустранимой погрешности часто приводит к существенному упрощению процедуры вычислений. Например, если значения функции получаются в результате измерений, то нецелесообразно выполнять приближение с точностью более высокой, чем относительная погрешность измерений.

Будем считать, что функция g описывает точное решение задачи (1). При переходе к численному методу пространства R_1, R_2 и оператор A часто заменяют другими, более удобными для вычислительных целей пространствами $\overline{R}_1$ и $\overline{R}_2$ оператором $\overline{A}$. Замена осуществляется так, что решение новой задачи

$$\overline{g} = \overline{A}(\overline{f}) \tag{2}$$

близко в некотором смысле к решению исходной задачи и может быть построено аа конечное число операций. Например, в качестве приближавшей функции g в задаче интерполяции часто рассматривают многочлен фиксированной степени. Искомый интерполяционный многочлен получают, например, по формуле Лагранжа. При переходе от точного решения задачи (1) к решению задачи (2) возникает погрешность численного метода

$$g - \overline{g}\ . \tag{3}$$

Вычислительная погрешность появляется при расчете задачи на ЭВМ. Она обусловлена как конечностью представления чисел на разрядной сетке ЭВМ, так и выбором алгоритма вычислений. Конечное представление чисел определяет ошибку округлений при их вводе и выполнении операций над ними. В ходе выполнения расчетов накапливается суммарная вычислительная погрешность. Коли алгоритм вычислений построен с учетом последовательности выполнения операций, то суммарная вычислительная погрешность может быть существенно уменьшена. Такой алгоритм называется устойчивым. Обозначая через $\overline{\overline{A}}$ алгоритм решения задачи, а через $\overline{\overline{f}}$ – представление данных, описывающих функцию $\overline{f}$ в ЭВМ, можем заключить, что фактически при выполнении расчетов решается новая задача

$$\overline{\overline{g}} = \overline{\overline{A}}(\overline{\overline{f}}) \tag{4}$$

Вычислительная погрешность описывается разностью $\overline{g} - \overline{\overline{g}}$.

В соответствии с формулами (3) и (4) полная вычислительная погрешность определяется формулой $\overline{g} - \overline{\overline{g}} = (g - \overline{g}) + (\overline{g} - \overline{\overline{g}})$.

Проблемы аппроксимации функций постоянно меняются в связи с усложнением современных задач.

Библиографический список

1. Большая советская энциклопедия. М.: 1970, Т. 2. С. 678.
2. Азарьева С.В., Кирпичникова Н.Я. «Вычислительная математика. Интерполяция и аппроксимация функций. Текст лекций», СПААП. СПб. 1992.
3. http://econom.misis.ru/ - « Интеллектуальная среда дистанционного обучения»