УДК 519.25

И. А. Розова – магистрант кафедры компьютерной математики и программирования
В. А. Каргин (канд. техн. наук, доц.) – научный руководитель

ОЦЕНИВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ФЛУКТУАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД ЭДЖВОРТА

В данной статье рассматривается метод оценивания характеристик флуктуационных процессов, основанный на представлении плотности вероятности в виде ряда Эджворта. Будут рассматриваться флуктуационные процессы, представляющие собой телеметрическую информацию [1].

Для систем обработки потоков телеизмерений актуальной является разработка таких программ и математических методов, которые позволят эффективно обрабатывать телеметрическую информацию. Результаты телеизмерений представлены сигналом достаточно сложной структуры и обладают рядом особенностей, затрудняющих их непосредственное использование: избыточностью, разнообразием смыслового содержания, наличием погрешностей и многими другими [1]. Таким образом, телеметрическая информация представляет собой некоторую совокупность информационной составляющей и всевозможных помех (импульсных, флуктуационных и др.). Информационная составляющая такого процесса обычно описывается гауссовым распределением (1):

$$p(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{\xi-m}{2\sigma^2}}, \qquad (1)$$

где σ^2 – дисперсия случайного процесса $\xi(t)$, m – математическое ожидание случайного процесса $\xi(t)$.

В качестве модели для оценивания характеристик таких процессов будет использоваться модель случайного процесса, близкого к гауссовому (1), полученная сложением равномерно распределенных случайных величин (рис. 1).

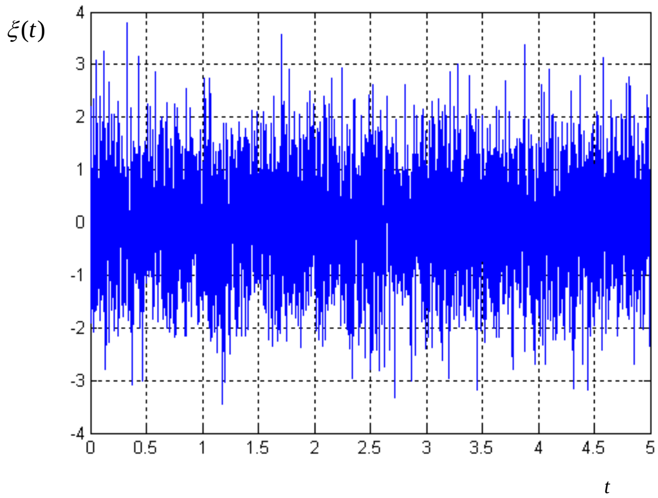

Рис. 1. График случайного процесса, близкого к гауссовому.

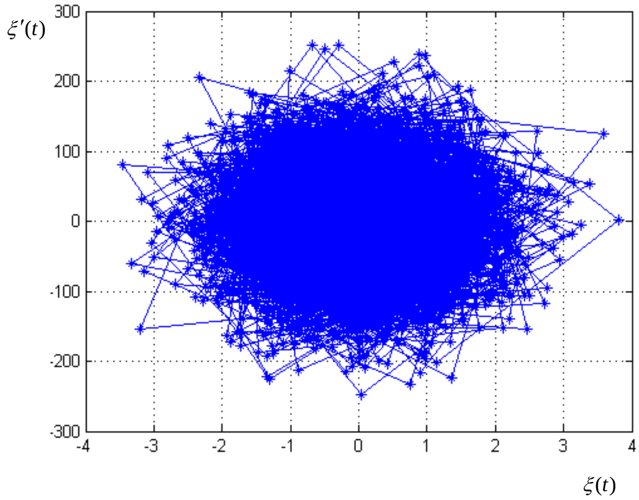

Рис. 2. Фазовый портрет случайного процесса, близкого к гауссовому.

Для подобных флуктуационных процессов необходимо оценивать следующие характеристики: средние значения и средние квадраты, плотность вероятности, корреляционную функцию и функцию спектральной плотности. На уровне исследования одномерных распределений наиболее полной характеристикой является плотность вероятности.

Для оценивания плотности вероятности методом, основанным на применении статистики пересечений уровней [2], необходимо, чтобы значения рассматриваемого случайного процесса $\xi'(t_1)$ и $\xi(t_1)$ в совпадающие моменты времени были статистически независимыми. Чтобы убедиться в этом, необходимо построить фазовый портрет для значений $\xi'(t)$ и $\xi(t)$ случайного процесса, где i-ое значение производной $\xi'(t)$ определяется следующим образом:

$$\xi'(t_i) = \frac{\xi(t_{i+1}) - \xi(t_{i-1})}{2\Delta t}, i = 1, 2, ..., n, \qquad (2)$$

По фазовому портрету можно сделать выводы о близости флуктуационного процесса к тому или иному закону распределения, установить статистическую связь между значениями флуктуационного процесса [2] (рис. 2).

Так же для оценивания плотности вероятности флуктуационных процессов используется метод гистограмм [3]. Преимущества данного метода состоят в достаточно хорошей наглядности, простоте освоения и применения. Основной недостаток метода гистограмм связан с большим объемом вычислительных затрат, что не допустимо для обработки телеметрической информации в режиме реального времени.

Метод оценивания плотности вероятности флуктуационных процессов, основанный на использовании статистики пересечений уровней, в отличие от метода гистограмм не требует больших вычислительных затрат и сводится к простой регистрации числа пересечений траекторией случайного процесса $\xi(t)$ заданных уровней $\xi(t) = H$ [2]. При условии, что длительность Т реализации случайного процесса много больше интервала корреляции τ_k, оценить плотность вероятности $p_\xi(\xi)$ на уровне $\xi(t) = H$ можно по формуле (3):

$$p^*(H) = \frac{1}{\alpha} N^*(H,1) = \frac{1}{\alpha T} n(H,T), T >> \tau_k, \qquad (3)$$

где α – коэффициент нормировки, такой чтобы выполнялось условие $\sum_{l=1}^{T} p_i^*(H) = 1$, а $n(H,T)$ определяется подсчетом числа пересечений на каждом выбранном уровне H.

В отличие от метода гистограмм, такая оценка обладает свойством несмещенности (4):

$$M\{p^*(H)\} = \frac{1}{\alpha T} M\{n(H,T)\} = p_\xi(\xi)\big|_{\xi=H} \qquad (4)$$

Точность метода статистики пересечений уровней получается на выражениях для дисперсии и относительной погрешности оценивания плотности вероятности [2]. Дисперсия оценки $p^*(H)$ определяется случайной величиной $N(H,T)$ и имеет следующий вид (5):

$$D[p^*(H)] = \frac{1}{(\alpha T)^2} 2N(H,T) \qquad (5)$$

Относительная погрешность оценивания значений $p^*(H)$ функции $p_\xi(\xi)$ на уровне H при этом равна (6):

$$\varepsilon[p^*(H)] = \frac{\sqrt{D[p^*(H)]}}{p_\xi(H)} = \frac{1}{\sqrt{TN^+(H,1)}}, \qquad (6)$$

где $N^+(H,1)$ определяется подсчетом числа положительных пересечений на каждом выбранном уровне H.

На рис. 3 приведены результаты оценивания плотности вероятности методом гистограмм и с использованием статистики пересечений уровней.

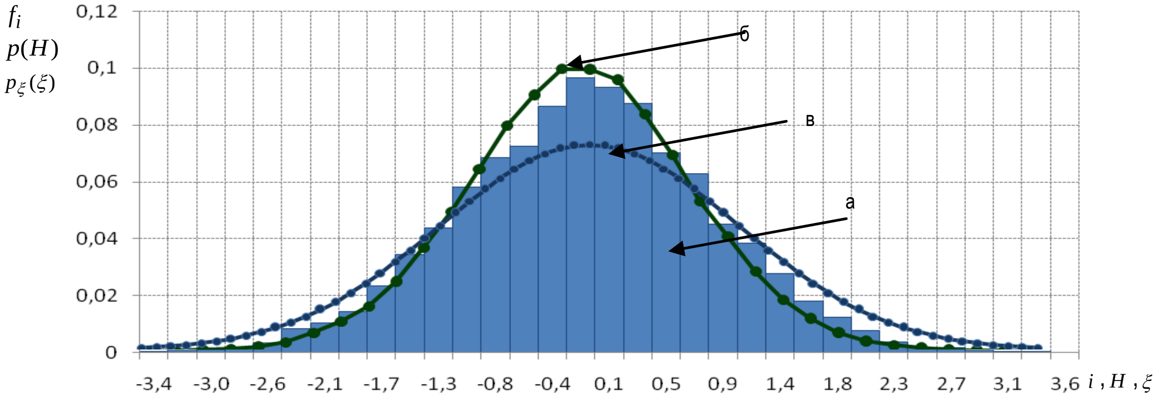

Рис. 3. Оценивание плотности вероятности по методу гистограмм (а), статистики пересечений уровней (б) в сравнении с нормальным гауссовым процессом (в).

Из рис. 3 видно, что оценка по статистике пересечений уровней получается несмещенной и более сглаженной. Таким образом, методы гистограмм и статистики пересечений уровней позволяют получить эмпирическую плотность вероятности, которая сравнивается с теоретической подбором типового распределения. Эту задачу, как правило, решают критерии согласия, такие как критерий хи-квадрат [3], основанный на статистической мере расхождения $\hat{u}$ наблюдаемой p_l^* и гипотетической p_l плотности вероятности (7) в зависимости от объема выборки n по числу интервалов r:

$$\hat{u}=\sum_{l=1}^{r}\frac{n(p_l^*-p_l)^2}{p_l} \tag{7}$$

Наблюдаемые плотности распределения всегда отличаются от типовых, и эти различия не всегда позволяют определить плотность распределения по критерию согласия [3]. Для получения количественной оценки плотности вероятности флуктуационного процесса важно знать оценки его основных характеристик: математического ожидания, дисперсии, коэффициентов асимметрии и эксцесса [4]. Характеристики первого и второго порядка (оценки математического ожидания m^* (8) и дисперсии σ^{*2} (9)) полностью определяют гауссов процесс [4]:

$$m^*=\sum_{i=1}^{n}x_i\ , \tag{8}$$

где x_i – значение выборки случайного процесса.

$$\sigma^{*2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m^*)^2 \tag{9}$$

Для того, чтобы оценить степень отклонения рассматриваемого процесса от нормированного, имеющего тот же закон распределения, вводятся коэффициенты асимметрии γ_1(9) и эксцесса γ_2 [3, 4] (10):

$$\gamma_1=\frac{\mu_3}{\sigma^3}\ , \tag{10}$$

где $\mu_3=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m^*)^3$.

$$\gamma_2=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3\ , \tag{11}$$

где $\mu_4=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m^*)^4$.

Определение оценок характеристик позволяет количественно определить отклонение от нормированного распределения и представить флуктуационный процесс в виде ряда Эджворта (12) [3, 4]:

$$p_\xi(\xi\,|\,\gamma_1,\gamma_2)=(2\pi\sigma_\xi^2)^{1/2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right)\left[1+\frac{\gamma_1}{3!}H_3\left(\frac{\xi}{\sigma_\xi}\right)+\frac{\gamma_2}{4!}H_4\left(\frac{\xi}{\sigma_\xi}\right)\right], \tag{12}$$

где $H_3(x)=x^3-3x$, $H_4(x)=x^4-6x^2+3$.

На рис. 4 приведено представление плотности вероятности в виде ряда Эджворта.

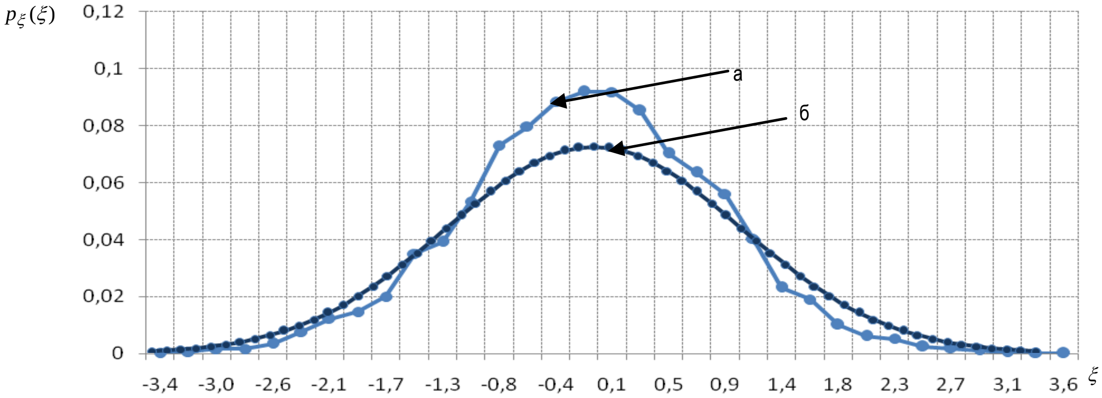

Рис. 4. Представление плотности вероятности в виде ряда Эджворта (а),
в сравнении с нормальным гауссовым процессом (б).

Метод оценивания характеристик флуктуационных процессов (телеметрической информации), основанный на разложении в ряд Эджворта, дает достаточно точную оценку плотности вероятности и ее характеристик. За счет использования данного метода удается достичь сокращения объема вычислений при сохранении большой точности оценки плотности вероятности. За счет достаточно простой реализации и небольшого объема вычислений данный метод может быть успешно применен для обработки телеметрической информации в режиме реального времени.

Библиографический список

1. Современная телеметрия в теории и на практике. Учебный курс / А.В. Назаров, Г.И. Козырев, И.В Шитов и др. СПб: Наука и Техника, 2007, 672 с.
2. Тихонов, В. И. Проблема пересечения уровней случайными процессами. Радиофизическое приложение / В. И. Тихонов, В.И. Хименко // Радиотехника и электроника 1998 №5, с. 501-523.
3. Бендат, Дж. Прикладной анализ случайных данных / Дж. Бендат, А. Пирсол; пер. с англ. В. Е. Привальский. М.: Мир, 1989, 540 с.
4. Малахов, А.Н. Кумулянтный анализ негауссовых процессов и их преобразований / А. Н. Малахов. М.: Советское радио, 1978, 376 с.