

**К. А. Кочин** – студент кафедры компьютерной математики и программирования

**М. Д. Поляк** – научный руководитель

### НЕЙРОННАЯ СЕТЬ ЭЛМАНА

Целью работы является изучение применимости нейронной сети Элмана для анализа сигнала на примере распознавания амплитуды синусоидального сигнала.

Искусственная нейронная сеть Элмана имеет один входной, один скрытый и один выходной слой нейронов. Сеть Элмана характеризуется частичной рекуррентностью в форме обратной связи между скрытым и входным слоем нейронов, реализуемой с помощью элементов единичного запаздывания  $z^{-1}$  [1]. Обобщённая структура сети представлена на рис. 1.

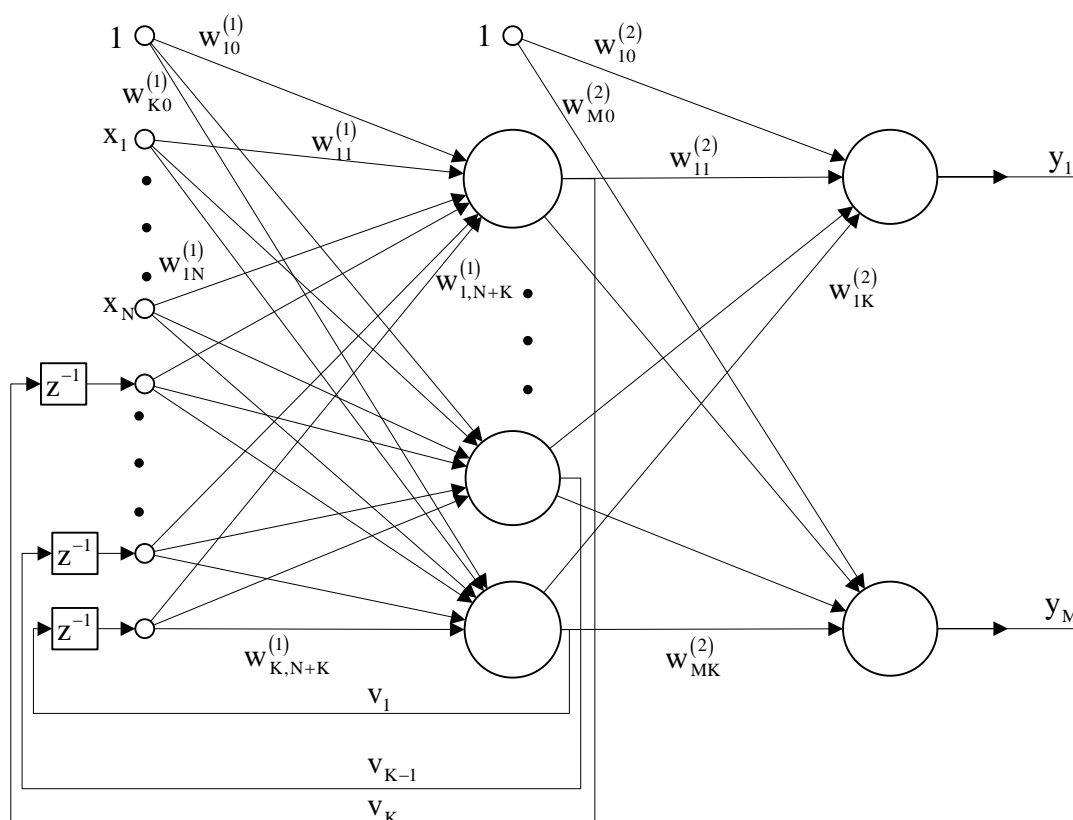


Рис. 1. Структура сети Элмана

Обозначим  $N$  – число внешних входов сети,  $K$  – число нейронов в скрытом слое,  $M$  – число нейронов в выходном слое. Веса нейронов обозначим как  $w_{ij}$ , где  $i$  – номер нейрона куда поступает сигнал,  $j$  – номер нейрона откуда идёт сигнал, кроме того веса нейронов скрытого слоя будут иметь верхний индекс (1), а веса нейронов выходного слоя индекс (2). Каждый скрытый нейрон имеет свой аналог во входном слое сети. Моменты времени, соответствующие шагам функционирования сети, пронумеруем  $0, 1, 2, \dots, k-1, k, \dots$ .

Обозначим вектор возбуждения сети  $x$  (в него входит так же единичный сигнал для поляризации). Обозначим состояния нейронов скрытого слоя  $v \in R^K$ , а выходные сигналы сети  $y \in R^M$ . Таким образом, входной вектор сети в момент времени  $k$  принимает вид:

$$x = [1, x_1(k), \dots, x_N(k), v_1(k-1), \dots, v_M(k-1)] \quad (1)$$

Математически сеть Элмана может быть описана следующими формулами:

$$u_i(k) = \sum_{j=0}^{N+K} w_{ij}^{(1)} x_j(k) \quad (2)$$

$$v_i(k) = f_1(u_i(k)) \quad (3)$$

$$g_i(k) = \sum_{j=0}^K w_{ij}^{(2)} v_j(k) \quad (4)$$

$$y_i(k) = f_2(g_i(k)) \quad (5)$$

где  $u_i(k)$  – взвешенная сумма сигналов  $i$ -го нейрона скрытого слоя в момент времени  $k$ ;  $v_i(k)$  – выходной сигнал  $i$ -го нейрона скрытого слоя в момент времени  $k$ ;  $f_1$  – функция активации нейронов скрытого слоя;  $g_i(k)$  – взвешенная сумма сигналов  $i$ -го нейрона выходного слоя в момент времени  $k$ ;  $y_i(k)$  – выходной сигнал  $i$ -го нейрона выходного слоя в момент времени  $k$ ;  $f_2$  – функция активации нейронов выходного слоя.

Обратные связи в рекуррентных нейронных сетях способствуют тому, что сеть способна учитывать предысторию предыдущих состояний сети, что позволяет использовать рекуррентные нейронные сети для моделирования динамических объектов, поэтому нейронная сеть может применяться в следующих целях:

- имитация нелинейных динамических объектов;
- управление нелинейными динамическими объектами;
- обработка сигналов;
- шифрование и сжатие информации [2].

Алгоритм обучения сети сводится к минимизации целевой функции. Целевая функция нейронной сети Элмана в момент времени  $k$  определяется как половина суммы квадратов разностей между значениями выходных сигналов сети и их ожидаемых значений для всех  $M$  выходов сети:

$$E(k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M (y_i(k) - d_i(k))^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M (e_i(k))^2 \quad (6)$$

где  $d_i(k)$  – сигнал, который требуется получить от сети, в момент времени  $k$ ;  $e_i(k)$  – ошибка на выходе  $i$ -го нейрона выходного слоя в момент времени  $k$ .

Рассчитаем частные производные целевой функции относительно весов выходного слоя сети. С учётом формул **Ошибка! Источник ссылки не найден.Ошибка! Закладка не определена.Ошибка! Закладка не определена.** – (6) получим следующую формулу:

$$\nabla_{\alpha\beta}^{(2)} E(k) = \frac{\partial E(k)}{\partial w_{\alpha\beta}^{(2)}} = e_\alpha(k) \frac{df_2(dg_\alpha(k))}{dg_\alpha(k)} v_\beta(k) \quad (7)$$

Рассчитаем частные производные целевой функции относительно весов скрытого слоя сети. С учётом рекуррентных связей и формул (2) – (6) получим следующие формулы:

$$\nabla_{\alpha\beta}^{(1)} E(k) = \frac{\partial E(k)}{\partial w_{\alpha\beta}^{(1)}} = \sum_{i=1}^M (e_i(k) \frac{df_2(g_i(k))}{g_i(k)} \sum_{j=1}^K \frac{dv_j}{dw_{\alpha\beta}^{(1)}} w_{ij}^{(2)}) \quad (8)$$

$$\frac{dv_j(k)}{dw_{\alpha\beta}^{(1)}} = \frac{df_1(u_j)}{du_j(k)} \left( \delta_{j\alpha} x_\beta(k) + \sum_{l=1}^K \frac{dv_l(k-1)}{dw_{\alpha\beta}^{(1)}} w_{j,(l+N)}^{(1)} \right) \quad (9)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \quad (10)$$

где  $\delta_{ij}$  – дельта Кронекера.

Таким образом, в момент времени  $k$ , как видно из формул (8) и (9), градиент целевой функции зависит от производной сигнала нейронов скрытого слоя в предыдущий момент времени. В начальный момент времени считается, что  $\frac{dv_1(k)}{dw_{\alpha\beta}^{(1)}} = \frac{dv_2(k)}{dw_{\alpha\beta}^{(1)}} = \dots = \frac{dv_k(k)}{dw_{\alpha\beta}^{(1)}} = 0$ .

Обучение сети будет строиться на основе реализации алгоритма наискорейшего спуска с учётом момента. При использовании такого подхода уточнение вектора весов будет происходить по следующей формуле:

$$\Delta w(k) = -\eta \nabla E(k) + \alpha(k) \Delta w(k-1) \quad (11)$$

где  $\alpha(k)$  – коэффициент момента, выбираемый из интервала  $(0,1)$ ;  $\eta$  – допустимый прирост погрешности.

Обычно для управления процессом обучения вводят понятие допустимого прироста погрешности, например 3%. Т.е. если для  $k$ -й итерации значение целевой функции удовлетворяет условию  $E(k) < 1.03E(k-1)$ , то уточнение весов производится по формуле (11) с учётом момента  $\alpha \Delta w(k-1)$ , иначе считается.

Таким образом, алгоритм обучения сети Элмана можно представить в следующем виде:

- 1) присвоение всем весам случайных значений, имеющих, как правило, равномерное распределение в интервале  $(-1,1)$ ;
- 2) для очередного момента времени  $k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) определить состояние всех нейронов сети;
- 3) рассчитать погрешность  $e(k)$  для нейронов выходного слоя;
- 4) по формулам (7), (8) и (9) рассчитать градиент целевой функции;
- 5) произвести уточнение весов по формуле (11);
- 6) после уточнения весов перейти к пункту 2.

Кроме предложенной «онлайн-версии» алгоритма есть «офлайн-версия» алгоритма, где уточнение компоненты градиента суммируются при последовательно предъявляемых пар обучения, и процесс изменения весов происходит после предъявления всех обучающих выборок [1].

Для моделирования нейронной сети Элмана, которая будет распознавать амплитуду синусоидального сигнала, была написана программа на языке Matlab. В данной программе была создана и обучена сеть Элмана со 100 нейронами в скрытом слое. Структура сети представлена на рис. 2

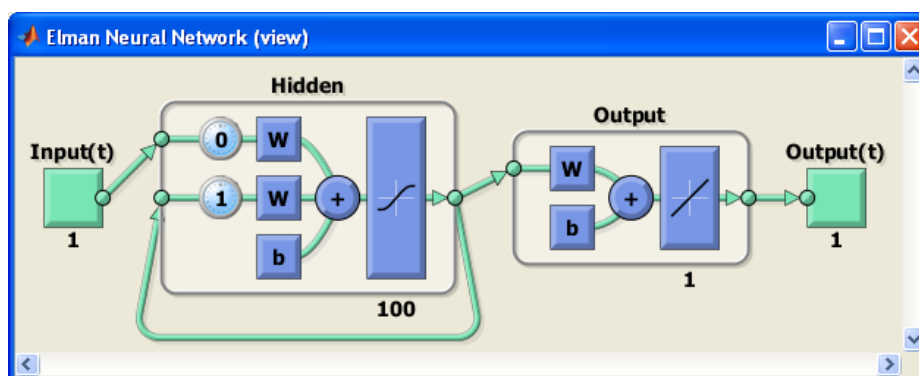


Рис. 2. Структура реализованной сети Элмана

Данная сеть была обучена на обучающей выборке из синусоидальных сигналов с амплитудами от 0 до 5 с шагом 0.5. Все входные сигналы имели циклическую частоту 0.5 Гц и частоту дискретизации 1 Гц. Соответствующий выходной сигнал был постоянным, равным амплитуде входного сигнала.

На рис. 3 показана работа полученной нейронной сети на входных сигналах той же частоты, на которых она была обучена. Амплитуда входного сигнала является случайной и лежит в интервале  $(0,5)$ . На нижнем графике представлен сигнал, поданный на вход сети. На верхнем графике отображён сигнал, полученный с выхода нейронной сети, и амплитуда входного сигнала.

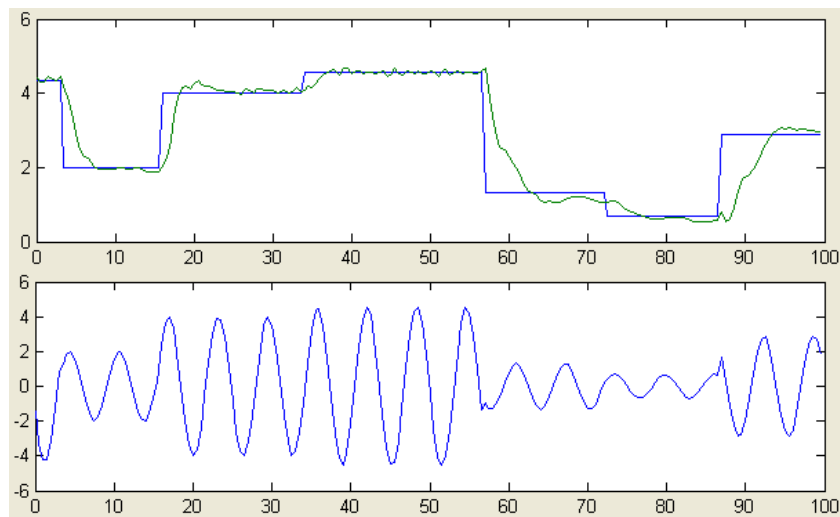


Рис. 3. Пример работы нейронной сети

На рис. 4 показана работа той же сети, но частота входного сигнала была уменьшена на 20%. Как видно из графика ошибка распознавания амплитуды входного сигнала увеличилась, но сеть всё ещё корректно распознаёт амплитуду синусоидального сигнала.

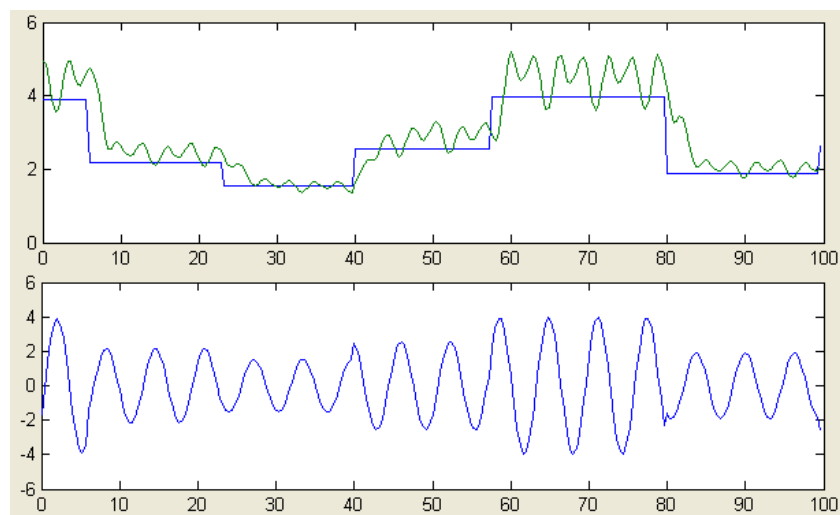


Рис. 4. Пример работы нейронной сети

Нейронная сеть Элмана по сравнению с другими сетями (например, сеть Джордана) обучается медленно, т.к. при обучении градиент всегда будет зависеть от предыдущих состояний сети, что усложняет его расчёт. Однако нейронную сеть Элмана, можно использовать тогда, когда заранее неизвестно, сколько предыдущих значений входных сигналов надо учитывать, чтобы получить требуемый выходной сигнал

#### Библиографический список

1. Нейронные сети для обработки информации/ С. Осовский; пер. с польского И.Д. Рудинского. М.: Финансы и статистика, 2002. 344 с.
2. Нейронная сеть Элмана [Электронный ресурс] URL: [http://ru.wikipedia.org/wiki/Нейронная\\_сеть\\_Элмана](http://ru.wikipedia.org/wiki/Нейронная_сеть_Элмана) (05.05.2012)