

3. СЕТЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

3.1. НАЗНАЧЕНИЕ И ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ СЕТЕВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Сетевое моделирование относится к разновидности структурного моделирования, нашедшей широкое применение в тех случаях, когда моделируемый процесс представляет собой сложную систему, включающую большое количество операций с достаточно сложными взаимосвязями между ними. Такие процессы будем называть сложными процессами. Использование сетевых моделей при отображении структуры таких процессов позволило на основе учета особенностей отображаемой структуры разработать эффективные методы анализа и оптимизации сложных процессов.

Широкое распространение сетевого моделирования при решении практических задач управления обусловлено тем, что она позволяет реализовывать системный подход, применять математические методы и современную вычислительную технику при исследовании сложных процессов, повышать эффективность планирования и управления такими процессами.

Метод планирования и управления, в основу которого положено использование сетевой модели управляемого процесса, получил название сетевого планирования и управления.

Определение 3.1.1. *Сетевое планирование и управление (СПУ)* – это метод оперативного планирования и управления функционированием сложных систем, в котором с целью реализации системного подхода к организации управления процессами в таких системах для логико-математического описания управляемого процесса и алгоритмизации расчетов параметров этого процесса используется сетевая модель.

Применение сетевого моделирования при планировании и управлении сложными процессами дает возможность решать следующие задачи.

1. Четко отобразить состав и структуру управляемого процесса, выявить с требуемой степенью детализации операции, составляющие моделируемый процесс, установить взаимосвязи между этими операциями, определить операции, которые необходимы для достижения поставленных частных и конечной целей, четко распределить обязанности между исполнителями операций, объективно необходимых для реализации управляемого процесса.

2. Широко использовать опыт и знания наиболее компетентных и подготовленных специалистов при составлении планов и управлении сложными процессами.

3. Вскрывать резервы сил, средств и времени, скрытые в нерациональной организации управляемого процесса, осуществлять контроль за ходом процесса сразу по нескольким направлениям, исключать из-под усиленного контроля те операции, которые не влияют на временные характеристики процесса, находить узкие места и своевременно преодолевать их.

4. Обеспечивать наглядное и удобное для восприятия отображение структуры управляемого процесса как в целом, так и по частям.

5. Обоснованно, с учетом фактического хода процесса, корректировать принятые управленческие решения, получать прогнозы на будущее, предвидеть возможные отклонения процесса от плана и те последствия, которые они окажут на протекание процесса в целом.

6. Получать количественные оценки параметров управляемого процесса и степени неопределенности прогнозов его протекания.

7. Упростить внесение изменений, уточнений и дополнений в планы, обеспечивая тем самым гибкость и требуемую периодичность планирования, упростить систему отчетности, а также обеспечить быстрое включение в работу новых лиц и непрерывность управления при смене руководителей.

Сетевое планирование и управление реализуется системами СПУ, которые представляют собой автоматизированные кибернетические системы управления, в которых управляемой системой является коллектив исполнителей, располагающий определенными ресурсами и выполняющий комплекс операций, призванный обеспечить достижение

намеченного конечного результата (цели), а управляющей системой – руководящая группа, которая осуществляет планирование и управление выполнением комплекса операций на основе его сетевой модели.

3.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В основе сетевого моделирования лежит представление структуры управляемого процесса в виде специального графа, называемого сетевой моделью или сетью.

Определение 3.2.1. **Сетевая модель (сеть)** – это ориентированный граф без контуров и кратных дуг, элементам которого сопоставлены числа.

Если числа сопоставлены только вершинам графа, то сетевая модель представляет собой отмеченный граф, если числа сопоставлены только дугам, то – взвешенный граф. Сопоставление чисел элементам графа означает задание на графе некоторой функции. Поэтому можно дать другое эквивалентное определение сетевой модели.

Определение 3.2.2. **Сетевая модель (сеть)** – это ориентированный граф без контуров и кратных дуг с заданной на нем функцией.

Требование отсутствия в графе контуров и кратных дуг является несущественным. Однако выполнение этого требования облегчает исследование сетевой модели на ЭВМ и позволяет использовать разработанные в настоящее время программы вычисления параметров сетевой модели.

Диаграмма сетевой модели называется *сетевым графиком*.

Основными элементами сетевой модели являются операции (работы) и события.

Определение 3.2.3. **Операцией (работой)** называется любое целенаправленное действие, приводящее к достижению определенных результатов.

Операции по отношению к затратам средств и времени на их осуществление подразделяются на действительные и фиктивные.

Определение 3.2.4. **Действительная операция** – операция, на осуществление которой необходимо затратить время или ресурсы.

Определение 3.2.5. **Фиктивная операция** – операция, на осуществление которой не требуется никаких затрат.

Фиктивная операция характеризует только связь между операциями, позволяя отразить порядок их следования с помощью сетевой модели.

Определение 3.2.6. **Событием** называется факт достижения требуемого результата.

Событие не имеет продолжительности во времени. Оно свершается мгновенно, а его свершение лишь фиксирует момент окончания или начала одной или нескольких операций.

При сетевом моделировании сложных процессов важное значение имеет отношение предшествования или следования, определяемое для операций и событий. Для задания этого отношения введем следующие понятия.

Определение 3.2.7. **Операция, предшествующая данной операции** – операция, без выполнения которой не может быть начата данная операция.

Определение 3.2.8. **Операция, непосредственно предшествующая данной операции** – предшествующая данной операции операция, между окончанием которой и началом данной операции не требуется выполнения каких-либо других операций.

Определение 3.2.9. **Операция, последующая за данной операцией** – операция, до начала выполнения которой необходимо выполнить данную операцию.

Определение 3.2.10. **Операция, непосредственно последующая за данной операцией** – последующая для данной операции операция, между началом которой и окончанием выполнения данной операции не требуется выполнения каких-либо других операций.

Определение 3.2.11. **Событие, предшествующее данному событию** – событие, свершение которого необходимо для свершения данного события.

Определение 3.2.12. **Событие, непосредственно предшествующее данному событию** – предшествующее для данного события событие, между свершением которого и свершением данного события не требуется свершения каких-либо других событий.

Определение 3.2.13. **Событие, последующее для данного события** – событие, для свершения которого необходимо свершение данного события.

Определение 3.2.14. **Событие, непосредственно последующее для данного события** – последующее для данного события событие, между свершением которого и свершением данного события не требуется свершения каких-либо других событий.

Аналогичным образом определяются операции, предшествующие, непосредственно предшествующие, последующие, непосредственно последующие для данного события, и события, предшествующие, непосредственно предшествующие, последующие и непосредственно последующие для данной операции.

Определение 3.2.15. **Начальное для данной операции событие** – событие, непосредственно предшествующее данной операции.

Определение 3.2.16. **Конечное для данной операции событие** – событие, непосредственно последующее для данной операции.

Определение 3.2.17. **Исходное событие** – событие, не имеющее предшествующих операций и событий.

С исходного события начинается выполнение моделируемого сетью комплекса операций, составляющего сложный процесс.

Определение 3.2.18. *Завершающее событие* – событие, не имеющее последующих операций и событий.

Завершающим событием заканчивается выполнение моделируемого сетью комплекса операций, составляющих сложный процесс.

Определение 3.2.19. *Исходная операция* – операция, не имеющая предшествующих операций и событий.

Определение 3.2.20. *Завершающая операция* – операция, не имеющая последующих операций и событий.

Введенных понятий оказывается вполне достаточно для задания отношения предшествования или следования на моделируемом комплексе операций.

В зависимости от цели моделирования сетевые модели могут быть ориентированы либо на события, либо на операции, либо на операции и события. *Сетевая модель, ориентированная на события* – это сеть, в которой вершинам сопоставлены события, а дугам – связи между ними. *Сетевая модель, ориентированная на операции* – это сеть, в которой вершинам сопоставлены операции, а дугам – связи между ними. *Сетевая модель, ориентированная на операции и события* – это сеть, в которой вершинам сопоставлены события, а дугам – операции. Эти сетевые модели называют также моделями в терминах событий, операций, операций и событий соответственно.

На рис. 3.2.1 представлены сетевые графики сетевых моделей. Эти модели составлены для одного и того же комплекса операций, включающего 14 операций и одну логическую связь (15). Вершины графа изображаются на графике геометрическими фигурами, а дуги – сплошными и штриховыми стрелками. При этом вершины, сопоставленные событиям, обычно изображаются кружками, а сопоставленные операциям – квадратами или прямоугольниками. Номера вершин проставляются внутри соответствующих фигур. Связи между событиями в сетевой модели в терминах событий и действительные операции в сетевой модели в терминах операций и событий изображаются сплошными линиями со стрелками, фиктивные операции – штриховыми линиями со стрелками. Длительность операций на сетевом графике в терминах операций

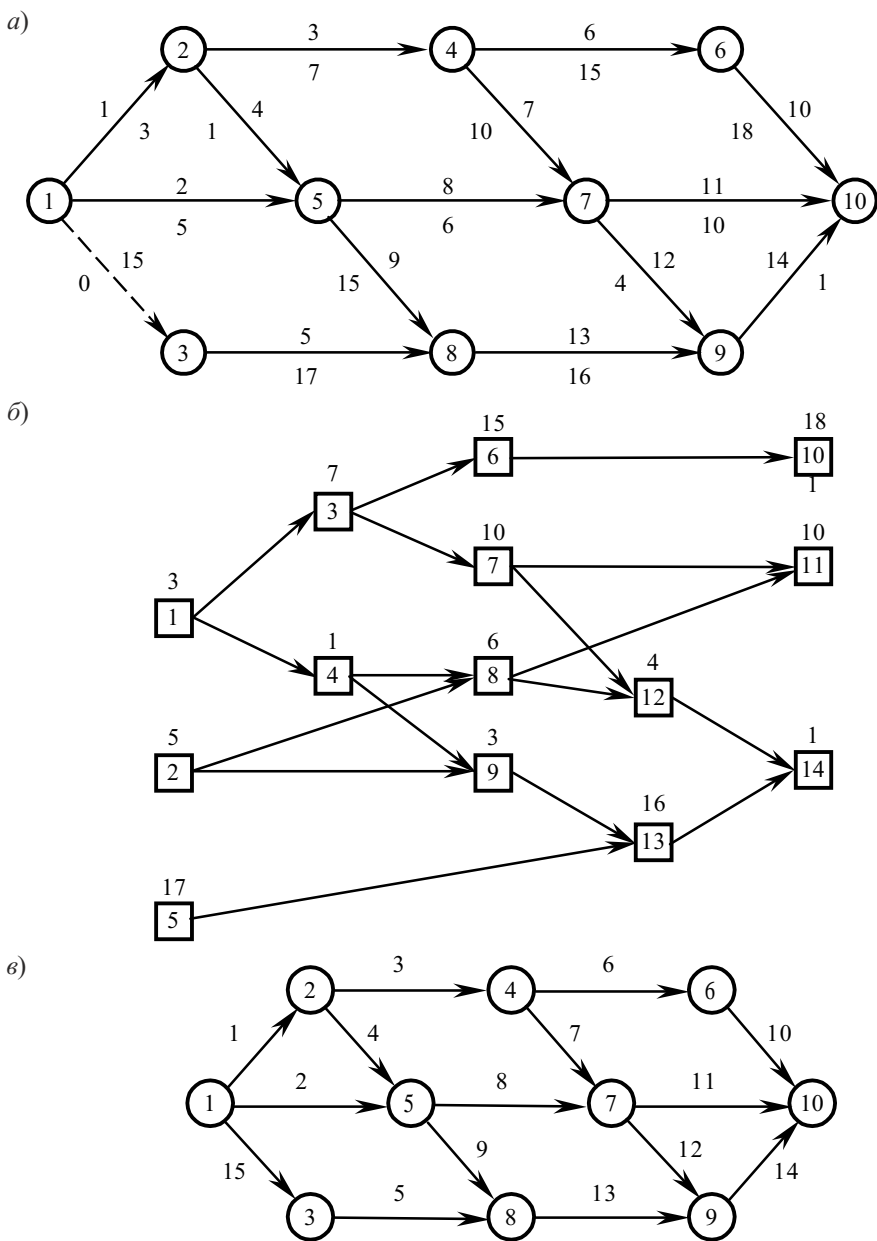


Рис. 3.2.1. Сетевые графики сетевых моделей, ориентированных на:
 а – события; б – операции; в – операции и события

проставляются у вершин, а на сетевом графике в терминах операций и событий – под соответствующими дугами.

По количеству сетей, описывающих исследуемый комплекс операций, различают *односетевые* и *многосетевые* модели. По количеству конечных целей, для достижения которых осуществляется комплекс операций, сетевые модели подразделяются на *одноцелевые* (с одним завершающим событием) и *многоцелевые* (с несколькими завершающими событиями). По количеству исходных событий или операций различают сеть *с одним исходным событием (одной исходной операцией)* и *несколькими исходными событиями (несколькими исходными операциями)*. По степени неопределенности сетевой модели различают *детерминированные* и *стохастические* сетевые модели. По количеству операций, составляющих комплекс, сетевые модели подразделяются на сети *большого объема* (свыше 10 000 операций), *среднего объема* (от 1500 до 10 000 операций) и *малого объема* (до 1500 операций). На рис. 3.2.2 приведена рассмотренная классификация сетевых моделей.

Следует отметить, что с помощью фиктивных операций многосетевая многоцелевая модель с несколькими исходными событиями (операциями) всегда может быть преобразована в односетевую одноцелевую модель с одним исходным событием.

3.3. ПОСТРОЕНИЕ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

Правила построения сетевых моделей определяются сферой их применения, к которой относится сетевое планирование и управление, и соответствующим программным обеспечением современных ЭВМ, разработанным для построения и анализа сетей. При построении сетевой модели ее вершинам обычно присваиваются числа, которые служат номерами вершин. Тогда каждой дуге сети может быть сопоставлена пара чисел, первое из которых соответствует вершине, из которой исходит дуга, а второе – вершине, в которую заходит дуга.

К основным правилам, которыми следует руководствоваться при построении сетевых моделей, относятся следующие.

1. Для каждой вершины сети номер любой предшествующей ей вершины должен быть меньше ее собственного номера.

2. В сетевой модели не должно быть "лишних" висячих и тупиковых вершин, т. е. таких висячих вершин, которые не соответствуют исход-

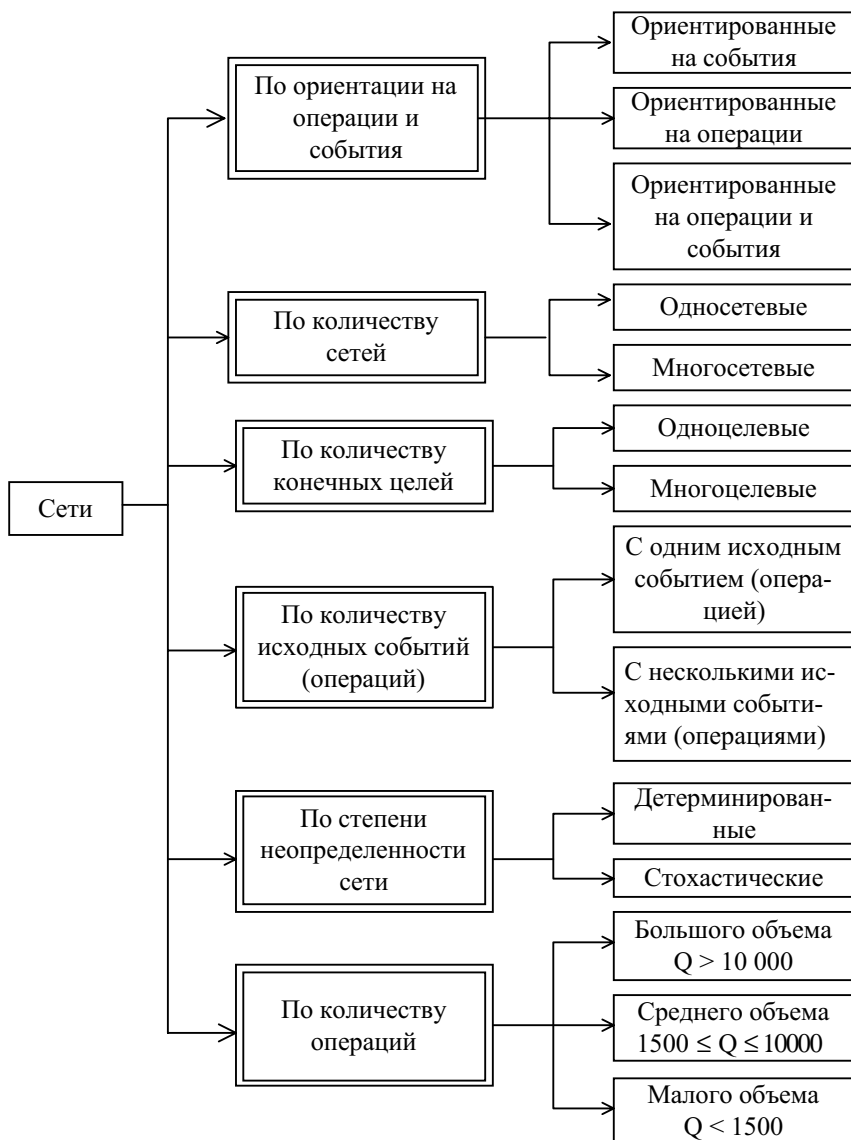


Рис. 3.2.2. Классификация сетевых моделей

ным событиям и операциям, и таких тупиковых вершин, которые не соответствуют завершающим событиям и операциям.

3. В сети не должно быть петель, контуров и кратных дуг.

4. В сети должны быть только одна исходная и одна завершающая вершины.

Сетевая модель, для которой справедливо первое правило, называется *упорядоченной*. Выполнение этого правила обеспечивается соответствующей нумерацией вершин сети.

Нарушение второго правила свидетельствует либо о наличии в комплексе лишних операций, которые не влияют на конечные результаты и ход выполнения всего комплекса операций, либо об ошибках в построении сети.

Выполнение третьего и четвертого правил достигается путем введения в сеть фиктивных дуг и вершин. Введение таких дуг и вершин позволяет осуществлять эквивалентное преобразование многоцелевых сетевых моделей с кратными дугами и несколькими исходными вершинами в одноцелевую сеть без кратных дуг с одной завершающей вершиной. Примеры такого преобразования путем введения фиктивных дуг и вершин приведены на рис. 3.3.1.

Кратные дуги в сети соответствуют параллельно выполняемым операциям или параллельным связям в моделируемом комплексе операций. Как видно из рис. 3.3.1, *а*, в случае обозначения таких дуг парами, состоящими из номеров начальных и конечных вершин, они будут неразличимы. Это в значительной мере осложняет исследование моделей, содержащих кратные дуги. Введение в модель дополнительных вершин и фиктивных дуг так, как это показано на рис. 3.3.1, *б*, позволяет осуществить эквивалентное преобразование сети с кратными дугами в сеть без кратных дуг.

На рис. 3.3.1, *в–е* представлены способы эквивалентного преобразования многоцелевой сети с несколькими исходными и завершающими вершинами в одноцелевую сеть с одной исходной и одной завершающей вершинами. При этом сетевые графики на рис. 3.3.1, *д, е* соответствуют сетям в терминах операций.

Выполнение указанных выше правил облегчает построение и контроль правильности построения сетевой модели, а также позволяет применять существующие программы для расчета параметров и анализа сетей на ЭВМ. Это обусловлено тем, что при соблюдении правил номер начальной вершины всегда будет меньше номера конечной вершины для любой дуги сети. А данное условие, во-первых, легко проверяется и, во-вторых, позволяет значительно упростить программы исследования се-

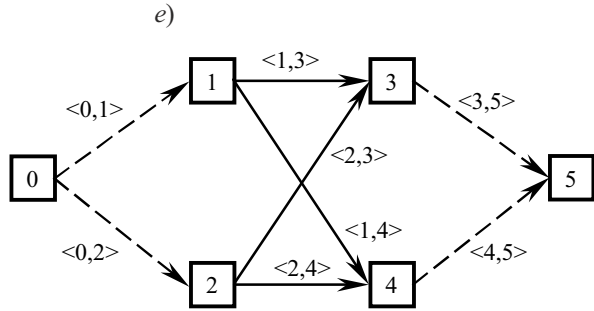
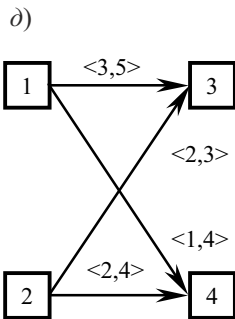
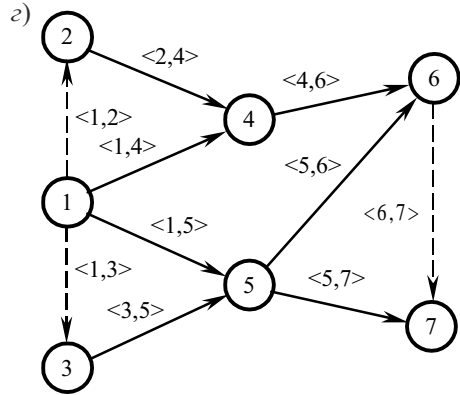
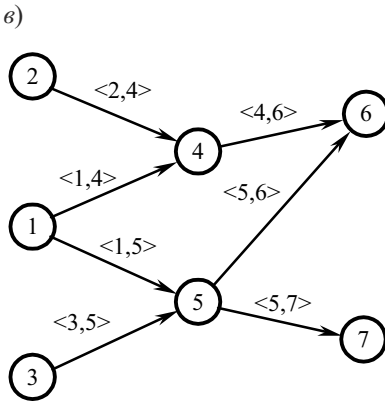
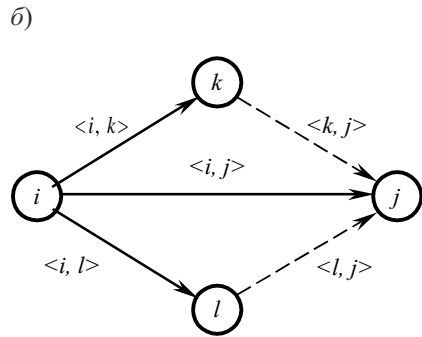
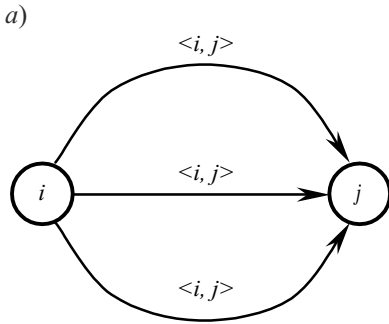


Рис. 3.3.1. Эквивалентные преобразования сети

тей на ЭВМ. Поэтому существующие программы обязательно содержат проверку выполнения данного условия, что необходимо учитывать при их использовании.

Кроме данной проверки, в различных программах могут проводиться проверки и других условий, требующих соблюдения при построении

сетей дополнительных правил, которые будут рассмотрены далее по мере необходимости. Существует несколько способов построения сетевых моделей с соблюдением перечисленных выше правил. Для построения, например, сетевой модели, ориентированной на операции, может быть рекомендована методика, включающая следующие этапы:

- составление перечня операций;
- составление матрицы смежности;
- заполнение таблицы слоев;
- нумерация вершин и построение сетевого графика.

Рассмотрим эти этапы.

Составление перечня операций. Перечень операций для моделируемого комплекса операций составляется в виде таблицы, головка которой приведена ниже.

№ операции	Содержание (наименование, индекс) операции	Параметры				Вероятность	Непосредственно предшествующие операции	Непосредственно последующие операции
		Продолжительность						
		t_{\min}	t_{\max}	$t_{\text{вер}}$	$t_{\text{ср}}$			
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Номера присваиваются операциям по мере включения их в перечень. К параметрам операций относятся наименьшее, наибольшее, вероятное и среднее времена выполнения операций. При этом первые три параметра определяются экспертным путем, а среднее время выполнения операции вычисляется по всем трем либо первым двум параметрам, если отсутствует третий. Кроме указанных параметров, для сетей с вероятностной структурой используется вероятность выполнения операции, которая также заносится в таблицу.

Для построения детерминированной сетевой модели в перечне операций достаточно было бы указать только непосредственно предшествующие либо последующие операции. Однако включение тех и других операций в перечень значительно облегчает построение и контроль правильности построения сетевой модели. Особенно это касается сетей среднего и большого объема.

Для стохастических сетей включение всех указанных операций в перечень обязательно.

Составление матрицы смежности. Матрица смежности \mathbf{R} составляется по перечню операций. Она представляет собой квадратную матрицу, размерность которой равна числу операций в комплексе, а строки и столбцы соответствуют операциям.

Элементы матрицы вычисляются по формуле

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я операция непосредственно} \\ & \text{предшествует } j\text{-й;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3.3.1)$$

При наличии в перечне непосредственно предшествующих и последующих операций матрица смежности может быть составлена по предшествующим операциям, а правильность ее составления проверена по последующим и наоборот.

Если комплекс операций имеет вероятностную структуру, то элементы матрицы смежности соответствуют вероятностям осуществления предшествующих операций.

Заполнение таблицы слоев. Представим головку таблицы слоев.

Таблица слоев

№ слоя	Операции, входящие в слой
--------	---------------------------

Заполнение таблицы слоев производится следующим образом. Выполняют суммирование элементов матрицы смежности для каждого столбца по строкам:

$$r^{(j)} = \sum_{i=1}^n r_{ij}, \quad j = 1(1)n, \quad (3.3.2)$$

где

$r^{(j)}$, $j = 1(1)n$ – сумма элементов матрицы смежности по всем строкам для j -го столбца;

n – размерность матрицы смежности.

Затем определяют столбцы, для которых полученные суммы равны нулю. Операции, номера (индексы) которых совпадают с номерами (индексами) этих столбцов, составляют первый слой. Номер этого слоя представляется в первой строке первого столбца таблицы, а но-

мера операций, входящих в этот слой – в ту же строку второго столбца таблицы.

Из полученных для каждого столбца сумм вычитают элементы матрицы смежности, находящиеся на пересечении рассматриваемого столбца и строк, соответствующих операциям, составляющим первый слой. Определяют столбцы, для которых полученные разности равны нулю. Операции, номера (индексы) которых совпадают с номерами (индексами) этих столбцов, составляют второй слой. Номер слоя и номера составляющих его операций заносятся в соответствующие столбцы таблицы во вторую строку.

Затем из разностей, полученных для каждого столбца на предыдущем шаге, вычитают элементы, соответствующие операциям, составляющим второй слой. Определяют столбцы, для которых новые разности равны нулю, и по ним – операции, составляющие третий слой. Заполняют третью строку таблицы слоев, и шаги повторяются.

Процесс заполнения таблицы слоев продолжается до тех пор, пока соответствующая разность для каждого столбца не станет равной нулю. Таким образом получаем распределение всех операций по слоям.

Операции, входящие в один слой, обладают тем свойством, что для каждой из них предшествующие операции включены только в слой с меньшим номером, чем слой, в который входит рассматриваемая операция, а непосредственно предшествующая операция обязательно принадлежит слою с номером на единицу меньше, чем номер слоя, в который входит данная операция. Номер слоя соответствует максимальной длине пути из исходной вершины в вершины слоя, если длина пути измеряется количеством входящих в него дуг. Любые две вершины одного слоя не являются смежными.

Нумерация вершин и построение сетевого графика. При нумерации вершин сетевой модели необходимо соблюдать следующее правило: номер любой вершины слоя должен быть больше номера любой вершины, входящей в предшествующие слои. На нумерацию вершин внутри единого слоя ограничений обычно не накладывает. При таком способе нумерации вершин номер начала дуги всегда будет меньше номера конца этой же дуги для любой дуги сети. Использование конкретных программ для расчета параметров сетей может потребовать соблюдения дополнительных правил при нумерации вершин. К

ним относятся, например, требования начинать нумерацию обязательно с единицы, не допускать пропусков в нумерации вершин и т. д.

После завершения нумерации вершин производят присвоение новых номеров столбцам и строкам матрицы смежности и их перестановку в порядке возрастания новых номеров. В результате получают матричное представление упорядоченной сети.

Новые номера операций заносят в перечень операций, а также в специальную таблицу для того, чтобы получить возможность легко переходить от старой нумерации к новой и наоборот.

При построении диаграммы сетевой модели (построении сетевого графика) вершины, входящие в один слой, располагают на одном уровне, а соединяющие их дуги определяются по матрице смежности.

Замечание. Если сетевая модель построена, и необходимо только перенумеровать вершины так, чтобы сеть стала упорядоченной, то можно воспользоваться следующей процедурой.

1-й этап

1-й шаг. Определяют исходные вершины и присваивают им начальные номера в порядке возрастания.

2-й шаг. Отмечают все дуги, для которых эти вершины являются начальными.

k-й этап

1-й шаг. Определяют все вершины, которые являются конечными только для отмеченных дуг, и перенумеровывают их в любом порядке.

2-й шаг. Отмечают все дуги, для которых перенумерованные вершины стали начальными, и переходят к $k + 1$ -му этапу.

Данный процесс является итеративным, начинается с первого этапа, продолжается последовательным выполнением k -го этапа, начиная с $k = 2$, и заканчивается тогда, когда всем завершающим вершинам будут присвоены порядковые номера. При этом на каждом k -м этапе определяются и нумеруются вершины, входящие в k -й слой.

На этом построение сети в терминах операций заканчивается. Для построения сети в терминах операций и событий можно использовать изложенную ранее процедуру преобразования вершинного графа в реберный, беря в качестве вершинного графа сетевую модель в

терминах операций, либо производить построение непосредственно по сети в терминах операций и перечню операций. При этом желательно включение в перечень и соответствующих событий. Следует отметить, что построение сети в терминах операций значительно облегчает последующее построение сети в терминах операций и событий.

Применение указанной методики построения сетевых моделей, ориентированных на операции, рассмотрим на следующем примере.

Пример 3.3.1

Задан комплекс операций. Требуется построить сетевую модель, ориентированную на операции, и сетевую модель, ориентированную на операции и события, для заданного комплекса.

Решение. Пусть для заданного комплекса операций составлен перечень операций в виде табл. 3.3.1.

1. По перечню операций составим матрицу смежности сетевой модели в терминах операций рис. 3.3.2. Нули в матрице не проставлены.

Таблица 3.3.1

Перечень операций комплекса

Наименование (индекс) операции	Продолжительность операции t_{cp}	Непосредственно предшествующая операция	Непосредственно последующая опе- рация
B_1	4	—	B_2, B_4, B_5
B_2	3	B_1	B_3, B_6, B_7
B_3	3	B_2	—
B_4	2	B_1	B_{12}, B_{14}
B_5	4	B_1	B_{15}
B_6	8	B_2	B_{15}
B_7	5	B_2	B_8

Наименование (индекс) операции	Продолжительность операции t_{cp}	Непосредственно предшествующая операция	Непосредственно последующая опе- рация
B_8	8	B_7, B_{10}, B_{15}	—
B_9	4	B_{12}	—
B_{10}	4	B_{12}	B_8
B_{11}	4	B_{12}	B_{15}
B_{12}	9	B_4, B_{13}	B_9, B_{10}, B_{11}
B_{13}	10	—	B_{12}, B_{14}
B_{14}	5	B_4, B_{13}	B_{15}
B_{15}	8	B_5, B_6, B_{11}, B_{14}	B_8

2. Для удобства заполнения таблицы слоев составим вспомога-тельную таблицу (табл. 3.3.2), в которую будем последовательно заносить результаты суммирования и последующих вычитаний элементов матрицы смежности для каждого столбца. В первую строку таблицы занесем результаты суммирования элементов матрицы смежности построчно для каждого столбца согласно формуле (3.3.2).

Равные нулю суммы оказались в столбцах, соответствующих операциям с индексами B_1 и B_{13} . Поэтому занесем эти индексы в первый слой таблицы слоев (табл. 3.3.3), а содержимое строк матрицы смежности, соответствующих данным индексам, вычтем из полученных для каждого столбца сумм. При этом столбцы, содержимое которых в строке сумм равно нулю, в процессе вычитания на данном этапе и в дальнейшем процессе не участвует. Это правило будет справедливо для тех столбцов вспомогательной таблицы, в которых на последующих этапах будут получаться нули.

На втором этапе равными нулю оказались разности в столбцах вспомога-тельной таблицы с индексами B_2, B_4, B_5 . Занесем эти индексы во второй слой таблицы слоев, а содержимое строк матрицы смежности с

$i \backslash j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}
B_1		1		1	1										
B_2			1			1	1								
B_3															
B_4												1		1	
B_5															1
B_6															1
B_7								1							
B_8															
B_9															
B_{10}								1							
B_{11}															1
B_{12}										1	1	1			
B_{13}												1		1	
B_{14}															1
B_{15}								1							

Рис. 3.3.2. Матрица смежности сети в терминах операций

данными индексами вычтем из содержимого столбцов второй строки вспомогательной таблицы.

На третьем этапе равными нулю оказались разности в столбцах вспомогательной таблицы с индексами $B_3, B_6, B_7, B_{12}, B_{14}$. Занесем эти индексы в третий слой таблицы слоев, а содержимое строк матрицы смежности с данными индексами вычтем из содержимого столбцов третьей строки вспомогательной таблицы.

Действуя таким образом, постепенно заполняем вспомогательную таблицу и таблицу слоев до тех пор, пока все операции комплекса не будут распределены по слоям. На этом заполнение таблицы слоев за-

канчивается. Окончательный результат заполнения вспомогательной таблицы и таблицы слоев приведен в виде табл. 3.3.2 и 3.3.3.

Таблица 3.3.2

Вспомогательная таблица

$i \backslash j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}
1	0	1	1	1	1	1	1	3	1	1	1	2	0	2	4
2		0	1	0	0	1	1	3	1	1	1	1		1	4
3			0			0	0	3	1	1	1	0		0	3
4								1	0	0	0				1
5								1							0
6								0							

Таблица 3.3.3

Таблица слоев

№ слоя	Индекс операции, входящей в слой
I	B_1, B_{13}
II	B_2, B_4, B_5
III	$B_3, B_6, B_7, B_{12}, B_{14}$
IV	B_9, B_{10}, B_{11}
V	B_{15}
VI	B_8

3. По таблице слоев и матрице смежности строим сетевой график модели, ориентированной на операции. При этом вершины сети, входящие в один слой, располагают по вертикали таким образом, чтобы из-

бежать лишних пересечений дуг. Над вершиной проставляется индекс соответствующей ей операции, а под вершиной – продолжительность этой операции. Затем производят нумерацию вершин в соответствии с указанными в приведенной выше методике правилами. Построенный таким образом сетевой график упорядоченной сети в терминах операций представлен на рис. 3.3.3.

Поскольку построенная сеть содержит малое число элементов и достаточно проста, то сетевой график сети, ориентированной на операции и события, строим непосредственно по сети, ориентированной на опера-

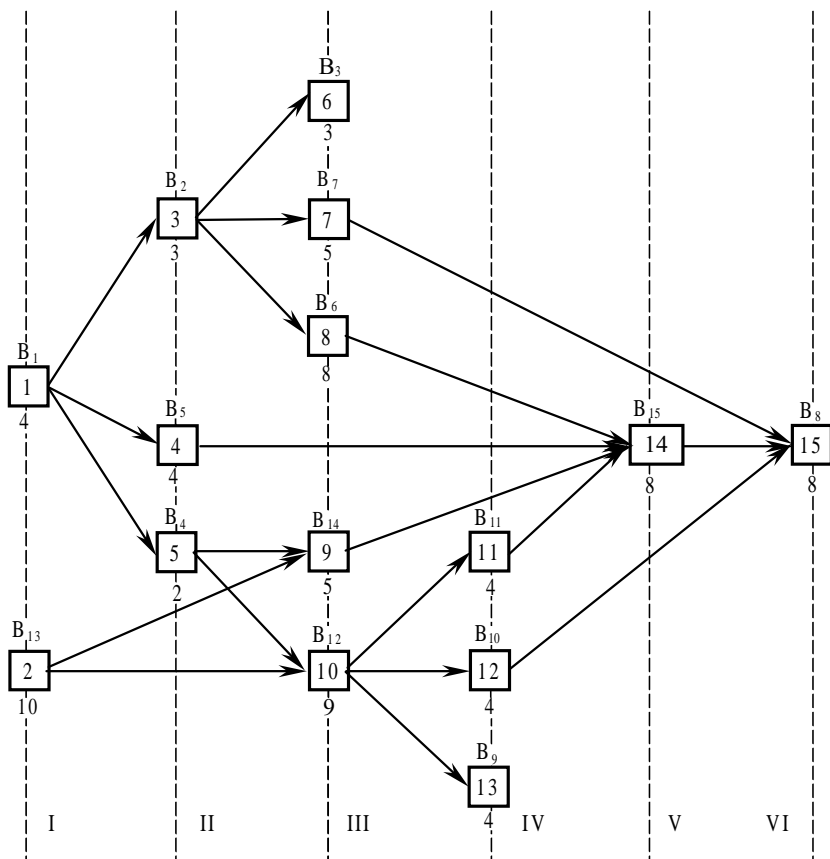


Рис. 3.3.3. Упорядоченная сеть в терминах операций

ции. При этом нумерация вершин (событий) производится способом, указанным в замечании к методике, без предварительного построения таблицы слоев. Построенный сетевой график сетевой модели, ориентированной на операции и события, приведен на рис. 3.3.4.

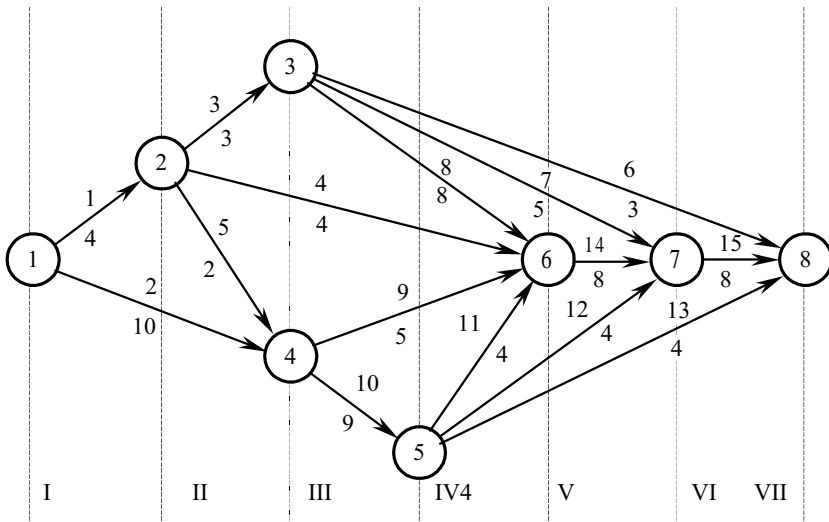


Рис. 3.3.4. Упорядоченная сеть в терминах операций и событий

Номера операций указаны под дугами, а их продолжительность – под ними.

3.4. АНАЛИЗ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

3.4.1. Оценивание продолжительности операций

Основу анализа сетевой модели составляет расчет значений ее параметров.

Определение 3.4.1. *Параметры сетевой модели* – величины, характеризующие временные соотношения между событиями и операциями, а также вид, количество ресурсов, затрачиваемых в процессе выполнения операций, и объем выполняемых работ.

Параметры, описывающие временные соотношения между событиями и операциями в сетевой модели, а также затраты времени на выполнение операций, называются *временными параметрами*.

Исходными для определения всех временных параметров служит продолжительность (длительность) операции, обозначаемая t_{ij} для операции $\langle i, j \rangle$. Продолжительность любой операции до окончания ее выполнения является величиной неизвестной, а следовательно, случайной. Наиболее полно случайная величина характеризуется законом распределения. Точные законы распределения продолжительностей операций, входящих в моделируемый комплекс, также обычно неизвестны. Поэтому на практике используют аппроксимирующие законы, которые стараются подобрать таким образом, чтобы один и тот же закон распределения, различаясь только числовыми характеристиками, с точностью, достаточной для целей моделирования, аппроксимировал законы распределения продолжительностей всех операций, входящих в комплекс.

Наиболее часто в качестве аппроксимирующих законов используют законы бета-распределения, треугольного и логарифмически нормального распределений.

В общем случае формула плотности бета-распределения случайной величины \hat{x} , заданной на интервале $(0, 1]$, имеет следующий вид:

$$\varphi_{\hat{x}}(x; p, q) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{1}{B(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 0 & \text{при } x > 1, \end{cases} \quad (3.4.1)$$

где $B(p, q)$ – бета-функция, определяемая выражением

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad (3.4.2)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция, определяемая по формуле

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{z-1} dy. \quad (3.4.3)$$

Известно, что для целых z функция $\Gamma(z)$ определяется выражением

$$\Gamma(z) = (z-1)!$$

Математическое ожидание, дисперсия и мода случайной величины, распределенной по закону (3.4.1), вычисляются по формулам

$$M[\hat{x}] = \frac{p}{p+q}, \quad (3.4.4)$$

$$D[\hat{x}] = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}, \quad (3.4.5)$$

$$Mo[\hat{x}] = \frac{p-1}{p+q-2}. \quad (3.4.6)$$

Величины p и q называются параметрами закона распределения (3.4.1).

Если для аппроксимации реальных распределений продолжительностей операций используют бета-распределение, то поступают следующим образом.

Полагают, что продолжительность \hat{t}_{ij} произвольной операции есть заданная на интервале $(t_{ij}^{\min}, t_{ij}^{\max})$ случайная величина, наиболее вероятное значение которой равно m , т. е.

$$\hat{t}_{ij} \in (t_{ij}^{\min}, t_{ij}^{\max}),$$

$$Mo[\hat{t}_{ij}] = m.$$

Введя параметры $\alpha = p - 1$, $\gamma = q - 1$ и задавая линейное преобразование случайной величины \hat{x} в случайную величину \hat{t}_{ij} выражением

$$x = \frac{t_{ij} - t_{ij}^{\min}}{t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}},$$

из формулы (3.4.1) получают следующее выражение для плотности распределения продолжительности t_{ij} операции:

$$\varphi_{\hat{t}_{ij}}(t) = \begin{cases} 0, & \forall t \notin (t_{ij}^{\min}, t_{ij}^{\max}), \\ C(t - t_{ij}^{\min})^\alpha (t_{ij}^{\max} - t)^\alpha \left(\frac{1}{m'} - 1\right), & \forall t \in (t_{ij}^{\min}, t_{ij}^{\max}), \end{cases} \quad (3.4.7)$$

где

$$C = \left[\left(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min} \right)^{\alpha + \gamma + 1} B(\alpha + 1, \gamma + 1) \right]^{-1};$$

$$m' = \frac{m - t_{ij}^{\min}}{t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}};$$

$$\gamma = \alpha \left(\frac{1}{m'} - 1 \right).$$

Если предположить (как было сделано, например, разработчиками математического аппарата системы ПЕРТ), что

$$\alpha + \gamma = 4, \quad (3.4.8)$$

то для математического ожидания и дисперсии случайной величины, подчиненной закону (3.4.7), будут справедливы следующие выражения:

$$M[\hat{t}_{ij}] = \frac{t_{ij}^{\min} + 4m + t_{ij}^{\max}}{6}, \quad (3.4.9)$$

$$D[\hat{t}_{ij}] = \frac{\left(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min} \right)^2}{28} - \frac{4}{63} \left[\frac{t_{ij}^{\min} + t_{ij}^{\max}}{2} - m \right]^2. \quad (3.4.10)$$

Вместо выражения (3.4.10) для вычисления дисперсии часто используют приближенную формулу

$$D[\hat{t}_{ij}] \approx \frac{\left(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min} \right)^2}{36}. \quad (3.4.11)$$

Поскольку точные значения t_{ij}^{\min} , t_{ij}^{\max} , $Mo[\hat{t}_{ij}]$ для реальных операций не известны, то на практике применяют оценки этих величин, полученные экспертным путем или путем статистической обработки результатов наблюдений, с помощью которых вычисляют оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения по формулам

$$\tilde{M}[\hat{t}_{ij}] = \frac{1}{6}(\tilde{t}_{ij}^{\min} + 4\text{Mo}[\hat{t}_{ij}] + \tilde{t}_{ij}^{\max}); \quad (3.4.12)$$

$$\tilde{\sigma}[\hat{t}_{ij}] = \frac{1}{6}(\tilde{t}_{ij}^{\max} - \tilde{t}_{ij}^{\min}), \quad (3.4.13)$$

где

$\tilde{M}[\hat{t}_{ij}]$ – оценка математического ожидания продолжительности \hat{t}_{ij} операции;

$\tilde{\sigma}[\hat{t}_{ij}]$ – оценка среднего квадратического отклонения продолжительности \hat{t}_{ij} операции;

\tilde{t}_{ij}^{\min} – оценка наименьшей возможной продолжительности \hat{t}_{ij}^{\min} операции;

\tilde{t}_{ij}^{\max} – оценка наибольшей возможной продолжительности \hat{t}_{ij}^{\max} операции;

$\tilde{\text{Mo}}[\hat{t}_{ij}]$ – оценка наиболее вероятной продолжительности $\text{Mo}[\hat{t}_{ij}]$ операции.

Оценки \tilde{t}_{ij}^{\min} , \tilde{t}_{ij}^{\max} , и $\tilde{\text{Mo}}[\hat{t}_{ij}]$ называют оптимистической, пессимистической и наиболее вероятной оценками продолжительности \hat{t}_{ij} операции.

Метод вычисления оценок числовых характеристик по формулам (3.4.12), (3.4.13) называют трехоценочным методом.

Для аппроксимации реального закона распределения продолжительности операции используют выражение (3.4.7), в котором точные значения величин t_{ij}^{\min} , t_{ij}^{\max} , m заменены их оценками, а числовые характеристики определяются по формулам (3.4.12), (3.4.13).

Как следует из выражения (3.4.10), дисперсия продолжительности операции, подчиненной закону бета-распределения (3.4.7), при постулировании, что $\alpha + \gamma = 4$, зависит от моды распределения. Поэтому ис-

пользование оценки (3.4.13) и задание одного и того же значения α при аппроксимации реальных законов распределения продолжительностей операций законом (3.4.7) приводит к противоречию с заданием в качестве исходных данных трех оценок \hat{t}_{ij}^{\min} , \hat{t}_{ij}^{\max} , m .

От данного недостатка свободно в значительной степени аппроксимирующее бета-распределение, для которого параметры α и γ закона распределения выбраны таким образом, что дисперсия распределения наименьшим образом зависит от разброса моды. Этот выбор можно осуществить следующим образом.

Дисперсию в рассматриваемом случае можно представить как функцию случайного аргумента, а именно моды. Поэтому сама дисперсия есть величина случайная. Если усреднить дисперсию по всем возможным значениям моды и взять в качестве ее оценки полученное среднее, то данная оценка при достаточно большом количестве операций в сети практически не будет зависеть от разброса мод продолжительностей операций.

Задавая в качестве среднего значения дисперсии величину

$$\tilde{D}[\hat{t}_{ij}] = \frac{(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min})^2}{36},$$

можно определить искомые значения параметров α и γ . Это было выполнено В. С. Поповым, который получил, что $\alpha + \gamma = 4,55$. Округляя полученное значение до ближайшего целого, он принял, что

$$\alpha + \gamma = 5, \tag{3.4.14}$$

и с учетом этого предположения получил следующее выражение для плотности аппроксимирующего бета-распределения¹:

$$\varphi_{\hat{t}_{ij}}(t) = \begin{cases} C_1 \left(t - t_{ij}^{\min} \right) \frac{5(m - t_{ij}^{\min})}{t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}} \left(t_{ij}^{\max} - t \right) \frac{5(m - t_{ij}^{\min})}{t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}}, & \forall t \in \left(t_{ij}^{\min}, t_{ij}^{\max} \right], \\ 0, & \forall t \notin \left(t_{ij}^{\min}, t_{ij}^{\max} \right], \end{cases} \tag{3.4.15}$$

¹ Голенко Д. И. Статистические методы сетевого планирования и управления. М.: Наука, 1968. 400 с.

где

$$C_1 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{5\pi(m-t_{ij}^{\min})}{720 \sin \frac{t_{ij}^{\max}-t_{ij}^{\min}}{5}}, \\ \pi \prod_{k=0}^5 \left[k(t_{ij}^{\max}-t_{ij}^{\min}) - 5(m-t_{ij}^{\min}) \right], \\ m \neq t_{ij}^{\min} + \frac{l}{5}(t_{ij}^{\max}-t_{ij}^{\min}), \quad l \in [0(1)5], \\ \frac{5(m-t_{ij}^{\min})}{720(-1)^{\frac{t_{ij}^{\max}-t_{ij}^{\min}}{5}}}, \\ \left(t_{ij}^{\max}-t_{ij}^{\min} \right) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq q}}^5 \left[k(t_{ij}^{\max}-t_{ij}^{\min}) - 5(m-t_{ij}^{\min}) \right], \\ q = \frac{5(m-t_{ij}^{\min})}{t_{ij}^{\max}-t_{ij}^{\min}}, \\ m = t_{ij}^{\min} + \frac{l}{5}(t_{ij}^{\max}-t_{ij}^{\min}), \quad l \in [0(1)5]. \end{array} \right.$$

Числовые характеристики бета-распределения (3.4.15) определяются выражениями

$$M[\hat{t}_{ij}] = \frac{1}{7} \left(t_{ij}^{\min} + 5m + t_{ij}^{\max} \right); \quad (3.4.16)$$

$$D[\hat{t}_{ij}] = \frac{(t_{ij}^{\max}-t_{ij}^{\min})^2}{392} \left[6 + 25 \frac{m-t_{ij}^{\min}}{t_{ij}^{\max}-t_{ij}^{\min}} - 25 \left(\frac{m-t_{ij}^{\min}}{t_{ij}^{\max}-t_{ij}^{\min}} \right)^2 \right]. \quad (3.4.17)$$

При этом вместо (3.4.17) с достаточной степенью точности можно использовать выражение

$$D[\hat{t}_{ij}] = \frac{(t_{ij}^{\max}-t_{ij}^{\min})^2}{36}. \quad (3.4.18)$$

При практическом применении выражений (3.4.15), (3.4.16), (3.4.18) вместо величин t_{ij}^{\max} , t_{ij}^{\min} , m используют их оценки.

Кроме бета-распределения при трехоченном методе в качестве аппроксимирующего может быть использовано треугольное распределение, плотность которого определяется выражением

$$\Phi_{\hat{t}_{ij}} = \begin{cases} \frac{2(t - t_{ij}^{\min})}{(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min})(m - t_{ij}^{\min})}, & \text{если } t \in (t_{ij}^{\min}, m]; \\ \frac{2(t_{ij}^{\max} - t)}{(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min})(t_{ij}^{\max} - m)}, & \text{если } t \in (m, t_{ij}^{\max}]; \\ 0, & \text{если } t \notin (t_{ij}^{\min}, t_{ij}^{\max}]. \end{cases} \quad (3.4.19)$$

Функция распределения для треугольного закона имеет вид

$$F_{\hat{t}_{ij}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq t_{ij}^{\min}; \\ \frac{(t - t_{ij}^{\min})^2}{(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min})(m - t_{ij}^{\min})}, & \text{если } t \in (t_{ij}^{\min}, m]; \\ 1 - \frac{(t_{ij}^{\max} - t)^2}{(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min})(t_{ij}^{\max} - m)}, & \text{если } t \in (m, t_{ij}^{\max}]; \\ 1, & \text{если } t > t_{ij}^{\max}. \end{cases} \quad (3.4.20)$$

Числовые характеристики треугольного распределения определяются по формулам

$$M[\hat{t}_{ij}] = \frac{1}{3}(t_{ij}^{\min} + m + t_{ij}^{\max}); \quad (3.4.21)$$

$$D[\hat{t}_{ij}] = \frac{1}{18}(t_{ij}^{\min 2} + m^2 + t_{ij}^{\max 2} - mt_{ij}^{\min} - t_{ij}^{\min} t_{ij}^{\max} - mt_{ij}^{\max}). \quad (3.4.22)$$

Применение треугольного распределения и бета-распределения вида (3.4.7) при предположении (3.4.8) дает примерно одинаковые результаты.

Хорошие результаты может дать использование двухоценочного метода при аппроксимации реальных распределений продолжительностей операцией бета-распределением¹. При этом плотность распределения описывается выражением

$$\varphi_{\hat{t}_{ij}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \notin (t_{ij}^{\min}, t_{ij}^{\max}); \\ 12 \frac{(t - t_{ij}^{\min})(t_{ij}^{\max} - t)^2}{(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min})^4}, & \text{если } t \in (t_{ij}^{\min}, t_{ij}^{\max}), \end{cases} \quad (3.4.23)$$

а числовые характеристики имеют вид

$$M[\hat{t}_{ij}] = 0,2(3t_{ij}^{\min} + 2t_{ij}^{\max}); \quad (3.4.24)$$

$$D[\hat{t}_{ij}] = 0,04(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min})^2; \quad (3.4.25)$$

$$Mo[\hat{t}_{ij}] = \frac{2t_{ij}^{\min} + t_{ij}^{\max}}{3}. \quad (3.4.26)$$

Вычислению оценок двухоценочным методом следует отдать предпочтение перед трехоценочным, так как наибольшие затруднения у экспертов встречает получение оценки моды, которая не используется в двухоценочном методе, а расхождение между оценка-

¹ Голенко Д. И. Указ. соч.

ми математического ожидания по двухоценочному и трехоценочному методам составляет чуть больше одного процента.

3.4.2. *Параметры сетевой модели*

В основе определения параметров сетевой модели лежит понятие пути. Сетевая модель представляет собой ориентированный граф, поэтому путем в сети будет любая последовательность дуг, в которой начало непосредственно последующей дуги совпадает с концом непосредственно предшествующей. В детерминированной сети отсутствуют петли и контуры, следовательно, любой путь проходит через любую дугу и любую вершину не более одного раза. Это означает, что все пути в сетевой модели являются простыми и элементарными.

В сетевом моделировании используются следующие виды путей: между вершинами, предшествующий вершине, последующий за вершиной, полный.

Определение 3.4.2. *Путь между вершинами* – путь, исходящий из одной рассматриваемой вершины и входящий в другую рассматриваемую вершину.

Путь между вершинами i и j обычно обозначают символом L_{ij} .

Определение 3.4.3. *Путь, предшествующий вершине* – путь между исходной и рассматриваемой вершинами.

При обозначении исходной вершины символом I путь, предшествующий вершине i , обозначается символом I_{Ii} .

Определение 3.4.4. *Путь, последующий за вершиной* – путь между рассматриваемой и завершающей вершинами.

При обозначении завершающей вершины символом C путь, последующий за вершиной i , обозначается символом L_{iC} .

Определение 3.4.5. *Полный путь* – это путь между исходной и завершающей вершинами.

Обычно полный путь обозначается символом L_{IC} .

Среди полных путей в сетевой модели ввиду особой важности выделяют критические и подкритические пути.

Определение 3.4.6. **Критический путь** – полный путь, имеющий в сетевой модели наибольшую продолжительность.

Подкритическим путем называют путь, продолжительность которого мало отличается от продолжительности критического пути. Это отличие чаще всего измеряется в долях от продолжительности критического пути и для всех подкритических путей не должно превышать заданного.

Для критического пути введем обозначение $L_{кр}$.

При анализе сетевых моделей наибольшее применение находят следующие параметры сети.

1. *Продолжительность $t(L_{ij})$ пути L_{ij} между вершинами i и j*

$$t(L_{ij}) = \sum_{\forall r_{lk} \in L_{ij}} t(r_{lk}), \quad (3.4.27)$$

где r_{lk} – операция $\langle l, k \rangle$; $t(r_{lk})$ – продолжительность операции $\langle l, k \rangle$.

Продолжительность пути равна сумме продолжительностей операций, составляющих рассматриваемый путь.

2. *Продолжительность $T_{кр}$ критического пути*

$$T_{кр} = t(L_{кр}) = \max_{\{L_{IC}\}} t(L_{IC}). \quad (3.4.28)$$

3. *Ранний срок t_i^P свершения i -го события*

$$t_i^P = \max_{\{L_{ii}\}} t(L_{ii}). \quad (3.4.29)$$

Раз событие не может произойти, пока не будут выполнены все предшествовавшие ему операции, то ранний срок свершения события определяется наибольшей из всех продолжительностей предшествовавших этому событию путей.

4. Поздний срок t_i^{Π} свершения i -го события

$$t_i^{\Pi} = T_{\text{кр}} - \max_{\{L_{iC}\}} t(L_{iC}). \quad (3.4.30)$$

Самое позднее свершение события не должно приводить к увеличению продолжительности критического пути, поэтому поздний срок свершения события определяется разностью между продолжительностью критического пути и наибольшей из всех продолжительностей последующих за этим событием путей.

5. Ранний срок $t_{ij}^{\text{p.н}}$ начала операции $\langle i, j \rangle$

$$t_{ij}^{\text{p.н}} = t_i^{\text{p}}. \quad (3.4.31)$$

Поскольку операция не может быть начата, пока не свершится ее начальное событие, то ранний срок начала операции совпадает с ранним сроком свершения ее начального события.

6. Поздний срок $t_{ij}^{\text{п.н}}$ начала операции $\langle i, j \rangle$

$$t_{ij}^{\text{п.н}} = t_j^{\text{п}} - t_{ij}, \quad (3.4.32)$$

где t_{ij} – продолжительность операции $\langle i, j \rangle$.

Выполнение операции не должно вызывать увеличения продолжительности критического пути, а следовательно, и позднего срока свершения конечного события операции. Так как операция имеет определенную продолжительность, то позднее начало операции вычисляется как разность между поздним сроком свершения ее конечного события и продолжительностью самой операции.

7. Ранний срок $t_{ij}^{\text{p.о}}$ окончания операции $\langle i, j \rangle$

$$t_{ij}^{\text{p.о}} = t_i^{\text{п}} + t_{ij}. \quad (3.4.33)$$

8. Поздний срок $t_{ij}^{\text{п.о}}$ окончания операции $\langle i, j \rangle$

$$t_{ij}^{\text{п.о}} = t_j^{\text{п}}. \quad (3.4.34)$$

9. Резерв времени $R(L_{IC})$ полного пути

$$R(L_{IC}) = T_{кр} - t(L_{IC}). \quad (3.4.35)$$

Резервом времени полного пути называют разность между продолжительностями критического и рассматриваемого полного путей. Данный параметр определяет наибольший промежуток времени, на который можно увеличить продолжительность рассматриваемого полного пути, не увеличивая при этом продолжительности критического пути.

10. Резерв времени R_i i -го события

$$R_i = t_i^{\Pi} - t_i^{\text{P}}. \quad (3.4.36)$$

11. Полный резерв времени R_{ij}^{Π} операции $\langle i, j \rangle$

$$R_{ij}^{\Pi} = t_j^{\Pi} - t_i^{\text{P}} - t_{ij} = t_{ij}^{\Pi,0} - t_{ij}^{\text{P},0}. \quad (3.4.37)$$

Полный резерв времени операции – это наибольший промежуток времени, на который можно увеличить продолжительность операции, не увеличивая при этом продолжительности критического пути.

12. Частный резерв времени первого вида R'_{ij} операции $\langle i, j \rangle$

$$R'_{ij} = t_j^{\Pi} - t_i^{\Pi} - t_{ij} = t_{ij}^{\Pi,Н} - t_i^{\Pi}. \quad (3.4.38)$$

Частный резерв времени первого вида операции – это наибольший промежуток времени, на который может быть увеличена продолжительность операции при условии, что это не вызовет изменения позднего срока свершения ее начального события.

13. Частный резерв времени второго вида R''_{ij} операции $\langle i, j \rangle$

$$R''_{ij} = t_j^{\text{P}} - t_i^{\text{P}} - t_{ij} = t_j^{\text{P},0} - t_{ij}^{\text{P},0}. \quad (3.4.39)$$

Частный резерв времени второго вида операции – это наибольший промежуток времени, на который может быть увеличена продолжительность операции при условии, что это не вызовет изменения раннего срока свершения ее конечного события.

14. Свободный резерв времени R_{ij}^c операции $\langle i, j \rangle$

$$R_{ij}^c = t_j^p - t_i^n - t_{ij}. \quad (3.4.40)$$

Свободный резерв времени операции – это наибольший промежуток времени, на который может быть увеличена продолжительность операции при условии, что это не вызовет изменения позднего срока свершения ее начального события и раннего срока свершения ее конечного события.

Рассмотрим введенные параметры.

Исходя из определений раннего и позднего сроков свершения событий для исходного и завершающего события получаем

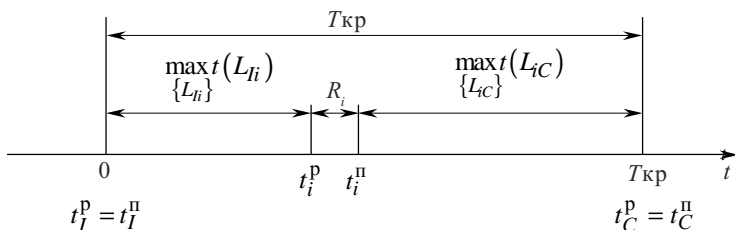


Рис. 3.4.1. Диаграмма взаимосвязи временных параметров событий в сети

$$t_I^p = t_I^n = 0;$$

$$t_C^p = t_C^n = T_{кр}.$$

Графически ранний и поздний сроки свершения любого события, а также его резерв времени могут быть представлены в следующем виде (рис. 3.4.1).

Обозначим символом $L_{IC}^{(i)}$ полный путь, проходящий через i -е событие, а символом $t(L_{IC}^{(i)})_{\max}$ – наибольшую из продолжительностей таких путей.

Легко показать, что

$$t(L_{IC}^{(i)})_{\max} = \max_{\{L_{IC}^{(i)}\}} t(L_{IC}^{(i)}) = \max_{\{L_{li}\}} t(L_{li}) + \max_{\{L_{ic}\}} t(L_{ic}). \quad (3.4.41)$$

Анализ выражения (3.4.41) и диаграммы (см. рис. 3.4.1) позволяют сделать следующие выводы.

1. Резерв времени события равен резерву времени полного пути, проходящего через это событие и имеющего наибольшую продолжительность:

$$R_i = R(L_{IC}^{(i)})_{\min},$$

где

$$R(L_{IC}^{(i)})_{\min} = T_{\text{кр}} - t(L_{IC}^{(i)})_{\max}.$$

2. Резервы времени событий, принадлежащих критическому пути, равны нулю. Это означает, что для каждого события, принадлежащего критическому пути, ранний и поздний сроки его свершения совпадают.

Графическое представление остальных параметров сети приведено на рис. 3.4.2.

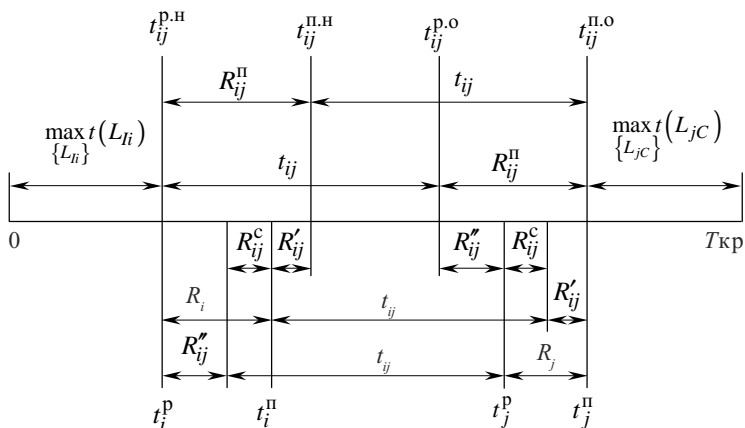


Рис. 3.4.2. Диаграмма взаимосвязи временных параметров операций в сети

Обозначим символом $L_{IC}^{\langle ij \rangle}$ полный путь, проходящий через операцию $\langle i, j \rangle$, а символом $t\left(L_{IC}^{\langle ij \rangle}\right)_{\max}$ – наибольшую из продолжительностей таких путей.

Тогда

$$t\left(L_{IC}^{\langle ij \rangle}\right)_{\max} = \max_{\{L_{IC}^{\langle ij \rangle}\}} t\left(L_{IC}^{\langle ij \rangle}\right) = \max_{\{L_{i\bar{i}}\}} t(L_{i\bar{i}}) + \max_{\{L_{j\bar{j}}\}} t(L_{j\bar{j}}) + t_{ij}. \quad (3.4.42)$$

Выражение (3.4.42) и графическое представление параметров сети (см. рис. 3.4.2) позволяют сделать следующие выводы.

1. Полный резерв времени операции равен резерву времени полного пути, проходящего через эту операцию и имеющего наибольшую продолжительность:

$$R_{ij}^{\Pi} = \min_{\{L_{IC}^{\langle ij \rangle}\}} R\left(L_{IC}^{\langle ij \rangle}\right).$$

2. Все резервы времени операций, принадлежащих критическому пути, равны нулю.

3. Частные резервы первого и второго вида, а также свободный резерв времени операций являются частями полного резерва времени этой операции, удовлетворяющими соотношениям:

$$R'_{ij} = R_{ij}^{\Pi} - R_i; \quad (3.4.43)$$

$$R''_{ij} = R_{ij}^{\Pi} - R_j; \quad (3.4.44)$$

$$R_{ij}^{\Pi} = R'_{ij} + R''_{ij} + R_{ij}^C. \quad (3.4.45)$$

4. Полный резерв времени операции может быть вычислен по следующим формулам:

$$R_{ij}^{\Pi} = t_{ij}^{\Pi.H} - t_{ij}^{\Pi.H}; \quad (3.4.46)$$

$$R_{ij}^{\Pi} = t_{ij}^{\Pi,0} - t_{ij}^{p,0}; \quad (3.4.47)$$

$$R_{ij}^{\Pi} = t_{ij}^{\Pi,0} - t_{ij}^{p,H} - t_{ij}. \quad (3.4.48)$$

5. Если

$$t_j^p - t_i^{\Pi} \leq t_{ij},$$

то свободный резерв времени операции будет отрицательным или равным нулю. Это говорит о том, что продолжительность рассматриваемой операции не может быть увеличена без изменения раннего срока свершения конечного и позднего срока свершения начального событий этой операции.

6. Частный резерв времени первого вида образуется у операции, через начальное событие которой проходит хотя бы один полный путь, имеющий продолжительность большую, чем любой полный путь, проходящий через рассматриваемую операцию.

7. Частный резерв времени второго вида образуется у операции, через конечное событие которой проходит хотя бы один полный путь, имеющий продолжительность большую, чем любой полный путь, проходящий через рассматриваемую операцию.

При использовании резервов времени в процессе планирования и управления комплексом операций следует иметь в виду, что увеличение продолжительности операции приводит к соответствующему уменьшению резервов времени всех операций, принадлежащих полному и наиболее продолжительному пути, проходящему через данную операцию. Это означает, например, что, если полный резерв времени некоторой операции уменьшился на некоторую величину за счет увеличения ее продолжительности, то ровно на эту величину уменьшился полный резерв времени каждой операции, принадлежащей наиболее продолжительному из полных путей, проходящих через рассматриваемую операцию.

Полные пути, обладающие достаточно большими резервами времени, называют ненапряженными. Продолжительность критического пути, резервы времени операций и событий относят к основным параметрам, а остальные – к вспомогательным. Кроме параметров, рассмотренных при анализе сетевой модели, могут быть использованы и другие параметры, описание которых имеется в соответствующей литературе.

3.4.3. Методы расчета параметров сетевой модели

Методы расчета параметров сети подразделяются на методы с использованием ЭВМ и ручного расчета, в которых ЭВМ не используется.

Методы ручного расчета применяются в тех случаях, когда объем сети достаточно мал (300–400 операций), а также для проверочных расчетов и расчетов отдельных параметров, например, продолжительности критического пути.

Эти методы можно разделить на две группы: аналитические и статистические, основанные на статистическом моделировании.

Аналитические методы включают расчет параметров по формулам, непосредственно на сетевом графике, табличный и матричный методы. Рассмотрим их.

Расчет параметров сетевой модели по формулам

Метод основан на использовании приведенных ранее аналитических зависимостей между параметрами сетевой модели и продолжительностью операций. Применение метода рассмотрим на примере.

Пример 3.4.1

Пусть сетевая модель, ориентированная на операции и события, задана сетевым графиком (см. рис. 3.3.4). Требуется рассчитать ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени событий, продолжительность и состав критического пути, полные и частные резервы времени операций.

Решение. Вычисление искомых параметров производят следующим образом.

1. Ранние сроки свершения событий вычисляются по формуле

$$t_i^p = \max_{\{L_{ii}\}} t(L_{ii}) = \max_{\{k\}} \{t_k^p + t_{ki}\}, \quad (3.4.49)$$

в которой множество $\{k\}$ определяет множество всех вершин сети, из которых исходят дуги, заходящие в i -ю вершину.

Вычисления начинают с исходного события и для упорядоченной сети выполняют последовательно в порядке возрастания номеров событий. Заканчивают вычисления на завершающем событии. Порядок вычислений и их результаты для рассматриваемого примера следующие:

$$t_1^p = 0;$$

$$t_2^p = t_1^p + t_{12} = 0 + 4 = 4;$$

$$t_3^p = t_2^p + t_{13} = 4 + 3 = 7;$$

$$t_4^p = \max \{t_1^p + t_{14}, t_2^p + t_{25}\} = \max \{0 + 10, 4 + 2\} = 10;$$

$$t_5^p = t_4^p + t_{45} = 10 + 9 = 19;$$

$$t_6^p = \max \{t_2^p + t_{26}, t_3^p + t_{36}, t_4^p + t_{56}, t_5^p + t_{56}\} = \\ = \max \{4 + 4, 7 + 8, 10 + 5, 19 + 4\} = 23;$$

$$t_7^p = \max \{t_3^p + t_{37}, t_5^p + t_{57}, t_6^p + t_{64}\} = \max \{7 + 5, 19 + 4, 23 + 8\} = 31;$$

$$t_8^p = \max \{t_3^p + t_{38}, t_5^p + t_{58}, t_7^p + t_{78}\} = \max \{7 + 3, 19 + 4, 31 + 8\} = 39.$$

2. Продолжительность критического пути. В рассматриваемой сети завершающим событием является восьмое событие, поэтому

$$T_{\text{кр}} = t_8^p = 39.$$

3. Поздние сроки свершения событий вычисляются по формуле

$$t_i^p = T_{\text{кр}} - \max_{\{L_{iC}\}} t(L_{iC}) = \min_{\{k\}} \{t_k^p - t_{ik}\}, \quad (3.4.50)$$

в которой множество $\{k\}$ определяет множество всех вершин сетевой модели, в которые заходят дуги, исходящие из i -й вершины.

Вычисления начинают с завершающего события и для упорядоченной сети выполняют последовательно в порядке убывания номеров событий. Заканчивают вычисления на исходном событии:

$$t_8^{\Pi} = T_{\text{кр}} = 39;$$

$$t_7^{\Pi} = t_8^{\Pi} - t_{78} = 39 - 8 = 31;$$

$$t_6^{\Pi} = t_7^{\Pi} - t_{67} = 31 - 8 = 23;$$

$$t_5^{\Pi} = \min \{ t_6^{\Pi} - t_{56}, t_7^{\Pi} - t_{57}, t_8^{\Pi} - t_{58} \} = \min \{ 23 - 4, 31 - 4, 39 - 4 \} = 19;$$

$$t_4^{\Pi} = \min \{ t_5^{\Pi} - t_{45}, t_6^{\Pi} - t_{46} \} = \min \{ 19 - 9, 23 - 5 \} = 10,$$

$$t_3^{\Pi} = \min \{ t_6^{\Pi} - t_{36}, t_7^{\Pi} - t_{37}, t_8^{\Pi} - t_{38} \} = \min \{ 23 - 8, 31 - 5, 39 - 3 \} = 15;$$

$$t_2^{\Pi} = \min \{ t_3^{\Pi} - t_{23}, t_4^{\Pi} - t_{24}, t_6^{\Pi} - t_{26} \} = \min \{ 15 - 3, 10 - 2, 23 - 4 \} = 8.$$

$$t_1^{\Pi} = \min \{ t_2^{\Pi} - t_{12}, t_4^{\Pi} - t_{14} \} = \min \{ 8 - 4, 10 - 10 \} = 0.$$

Результат вычисления позднего срока исходного события служит контролем правильности вычислений. Если он оказывается не равным нулю, то где-то в вычислениях допущена ошибка.

4. Резервы времени событий вычисляются по формуле

$$R_i = t_i^{\Pi} - t_i^{\text{P}}.$$

$$R_1 = t_1^{\Pi} - t_1^{\text{P}} = 0 - 0 = 0; \quad R_5 = t_5^{\Pi} - t_5^{\text{P}} = 19 - 19 = 0;$$

$$R_2 = t_2^{\Pi} - t_2^{\text{P}} = 8 - 4 = 4; \quad R_6 = t_6^{\Pi} - t_6^{\text{P}} = 23 - 23 = 0;$$

$$R_3 = t_3^{\Pi} - t_3^{\text{P}} = 15 - 7 = 8; \quad R_7 = t_7^{\Pi} - t_7^{\text{P}} = 31 - 31 = 0;$$

$$R_4 = t_4^{\Pi} - t_4^{\text{P}} = 10 - 10 = 0; \quad R_8 = t_8^{\Pi} - t_8^{\text{P}} = 39 - 39 = 0$$

Поскольку резервы времени 1-, 4-, 5-, 6-, 7- и 8-го событий равны нулю, то критический путь проходит через эти события.

5. Полные резервы времени операций вычисляются по формуле

$$R_{ij}^{\Pi} = t_j^{\Pi} - t_i^{\text{P}} - t_{ij}.$$

$$\begin{aligned}
R_{12}^{\Pi} &= t_2^{\Pi} - t_1^{\text{P}} - t_{12} = 8 - 0 - 4 = 4; & R_{45}^{\Pi} &= t_5^{\Pi} - t_4^{\text{P}} - t_{45} = 19 - 10 - 9 = 0; \\
R_{14}^{\Pi} &= t_4^{\Pi} - t_1^{\text{P}} - t_{14} = 10 - 0 - 10 = 0; & R_{46}^{\Pi} &= t_6^{\Pi} - t_4^{\text{P}} - t_{46} = 23 - 10 - 5 = 8; \\
R_{23}^{\Pi} &= t_3^{\Pi} - t_2^{\text{P}} - t_{23} = 15 - 4 - 3 = 8; & R_{56}^{\Pi} &= t_6^{\Pi} - t_5^{\text{P}} - t_{56} = 23 - 19 - 4 = 0; \\
R_{24}^{\Pi} &= t_4^{\Pi} - t_2^{\text{P}} - t_{24} = 10 - 4 - 2 = 4; & R_{57}^{\Pi} &= t_7^{\Pi} - t_5^{\text{P}} - t_{57} = 31 - 19 - 4 = 8; \\
R_{26}^{\Pi} &= t_6^{\Pi} - t_2^{\text{P}} - t_{26} = 23 - 4 - 4 = 15; & R_{58}^{\Pi} &= t_8^{\Pi} - t_5^{\text{P}} - t_{58} = 39 - 19 - 4 = 16; \\
R_{36}^{\Pi} &= t_6^{\Pi} - t_3^{\text{P}} - t_{36} = 23 - 7 - 8 = 8; & R_{67}^{\Pi} &= t_7^{\Pi} - t_6^{\text{P}} - t_{67} = 31 - 23 - 8 = 0; \\
R_{37}^{\Pi} &= t_7^{\Pi} - t_3^{\text{P}} - t_{37} = 31 - 7 - 5 = 19; & R_{78}^{\Pi} &= t_8^{\Pi} - t_7^{\text{P}} - t_{78} = 39 - 31 - 8 = 0. \\
R_{38}^{\Pi} &= t_8^{\Pi} - t_3^{\text{P}} - t_{38} = 39 - 7 - 3 = 29;
\end{aligned}$$

Полные резервы времени операции $\langle 1, 4 \rangle$, $\langle 4, 5 \rangle$, $\langle 5, 6 \rangle$, $\langle 6, 7 \rangle$, $\langle 7, 8 \rangle$ равны нулю, поэтому эти операции принадлежат критическому пути.

6. Частные резервы времени первого вида операций вычисляются по формуле

$$R'_{ij} = R_{ij}^{\Pi} - R_i.$$

$$\begin{aligned}
R'_{12} &= R_{12}^{\Pi} - R_1 = 4 - 0 = 4; & R'_{45} &= R_{45}^{\Pi} - R_4 = 0 - 0 = 0; \\
R'_{14} &= R_{14}^{\Pi} - R_1 = 0 - 0 = 0; & R'_{46} &= R_{46}^{\Pi} - R_4 = 8 - 0 = 8; \\
R'_{23} &= R_{23}^{\Pi} - R_2 = 8 - 4 = 4; & R'_{56} &= R_{56}^{\Pi} - R_5 = 0 - 0 = 0; \\
R'_{24} &= R_{24}^{\Pi} - R_2 = 4 - 4 = 0; & R'_{57} &= R_{57}^{\Pi} - R_5 = 8 - 0 = 8; \\
R'_{26} &= R_{26}^{\Pi} - R_2 = 15 - 4 = 11; & R'_{58} &= R_{58}^{\Pi} - R_5 = 16 - 0 = 16; \\
R'_{36} &= R_{36}^{\Pi} - R_3 = 8 - 8 = 0; & R'_{67} &= R_{67}^{\Pi} - R_6 = 0 - 0 = 0; \\
R'_{37} &= R_{37}^{\Pi} - R_3 = 19 - 8 = 11; & R'_{78} &= R_{78}^{\Pi} - R_7 = 0 - 0 = 0. \\
R'_{38} &= R_{38}^{\Pi} - R_3 = 29 - 8 = 21;
\end{aligned}$$

7. Частные резервы времени второго вида операций вычисляются по формуле

$$R''_{ij} = R_{ij}^{\Pi} - R_j.$$

$$\begin{aligned}
R''_{12} &= R''_{12} - R_2 = 4 - 4 = 0; & R''_{45} &= R''_{45} - R_5 = 0 - 0 = 0; \\
R''_{14} &= R''_{14} - R_4 = 0 - 0 = 0; & R''_{46} &= R''_{46} - R_6 = 8 - 0 = 8; \\
R''_{23} &= R''_{23} - R_3 = 8 - 8 = 0; & R''_{56} &= R''_{56} - R_6 = 0 - 0 = 0; \\
R''_{24} &= R''_{24} - R_4 = 4 - 0 = 4; & R''_{57} &= R''_{57} - R_7 = 8 - 0 = 8; \\
R''_{26} &= R''_{26} - R_6 = 15 - 0 = 15; & R''_{58} &= R''_{58} - R_8 = 0 - 0 = 0; \\
R''_{36} &= R''_{36} - R_6 = 8 - 0 = 8; & R''_{67} &= R''_{67} - R_7 = 0 - 0 = 0; \\
R''_{37} &= R''_{37} - R_7 = 19 - 0 = 19; & R''_{78} &= R''_{78} - R_8 = 0 - 0 = 0. \\
R''_{38} &= R''_{38} - R_8 = 29 - 0 = 29;
\end{aligned}$$

На этом рассмотрение примера закончено.

Расчет параметров сетевой модели непосредственно на сетевом графике

Данный метод расчета может быть рекомендован для проведения поверочного расчета сети. Максимальный объем сети для расчета этим методом не должен превышать 1500 тысяч операций. Для анализируемой сетевой модели в терминах операций и событий составляется сетевой график, вершины которого изображаются геометрическими фигурами, например, кругами, разделенными на четыре сектора. В верхний сектор заносится номер события, в левый сектор – ранний срок свершения события, в правый сектор – поздний срок свершения события, в нижний сектор – резерв времени события (рис. 3.4.3).

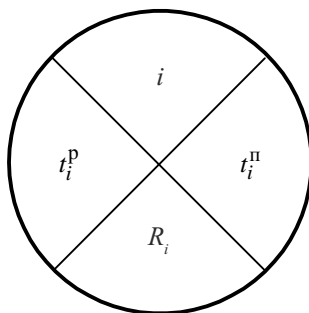


Рис. 3.4.3. Диаграмма вершины сети для расчета параметров непосредственно по сетевому графику

Процесс расчета параметров непосредственно по сетевому графику включает четыре этапа: расчет ранних и поздних сроков свершения событий; расчет резервов времени событий; определение критического пути.

Выполнение расчета покажем на примере.

Пример 3.4.2

Пусть сетевая модель, ориентированная на операции и события, задана сетевым графиком (см. рис. 3.3.4). Требуется провести поверочный расчет ранних и поздних сроков свершения событий, резервов времени событий и продолжительности критического пути непосредственно на сетевом графике.

Решение. События на сетевом графике изображаем кругами, разделенными на четыре сектора. Длительности операций проставляем над соответствующими дугами. В верхние сектора заносим номера событий (рис. 3.4.4).

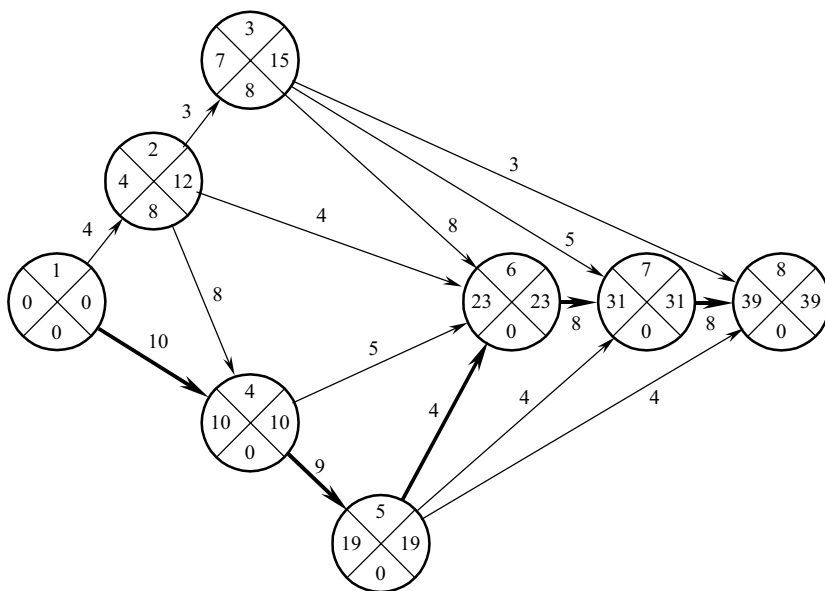


Рис. 3.4.4. Расчет параметров сети непосредственно по сетевому графику

1. Расчет ранних сроков свершения событий выполняют, начиная с исходного события, последовательно в порядке возрастания номеров событий с использованием формулы (3.4.49).

Результаты расчета заносят в левые сектора соответствующих вершин сетевого графика. Ранний срок свершения завершающего события, которым в данном примере является восьмое, равен продолжительности критического пути

$$T_{кр} = t_8^p = 39.$$

2. Расчет поздних сроков свершения событий вычисляем по формуле (3.4.50).

Вычисление начинают с завершающей (восьмой) вершины, выполняют последовательно в порядке убывания номеров вершин и заканчивают на исходной вершине. Результаты вычислений заносят в правый сектор соответствующих вершин.

Для завершающего события

$$t_8^п = t_8^p = 39.$$

3. Расчет резервов времени события определяется по формуле

$$R_i = t_i^п - t_i^p.$$

При этом из содержимого правого сектора вычитают содержимое левого сектора, а результат заносят в нижний сектор.

4. Определение критического пути. При определении состава критического пути используют такое свойство, как отсутствие резервов у событий, принадлежащих критическому пути. Нулевые резервы времени имеют события 1, 4, 5, 6, 7, 8, поэтому критический путь проходит через них, а сам критический путь включает операции <1, 4>, <4, 5>, <5, 6>, <6, 7>, <7, 8>.

Аналогичным образом можно произвести поверочный расчет параметров сети по сетевому графику в терминах операций, определяя при этом поздние и ранние сроки начала и окончания операций и полные резервы времени операций.

Табличный метод расчета параметров сети

При расчете параметров сетевой модели табличным методом составляется специальная таблица, строки и столбцы которой заполняются в определенном порядке, облегчающем выполнение расчетов. Метод применяется, когда число операций в комплексе не превышает четырехсот. Схема метода представлена в табл. 3.4.1.

Рассмотрим содержание и порядок выполнения этапов табличного метода расчета параметров сети.

1 этап. Составление таблицы и занесение в таблицу исходных данных. В зависимости от рассчитываемых параметров таблица име-

Расчет параметров сети табличным методом

Этап	Содержание этапа
I	1. Составление таблицы 2. Занесение исходных данных в таблицу
II	3. Вычисление ранних сроков начала и окончания операций 4. Вычисление частных резервов времени второго вида
III	5. Вычисление поздних сроков начала и окончания операций 6. Вычисление частных резервов времени первого вида
IV	7. Вычисление полных резервов времени операций

ет различное число столбцов. Так, например, при расчете параметров операции шапка таблицы имеет следующий вид:

Таблица расчета параметров операции в сети

Количество непосредственно предшествующих операций	Код операции		Параметр								
	i	j	$t_{ij}^{p,n}$	t_{ij}	$t_{ij}^{p,o}$	r_{ij}''	r_{ij}'	$t_{ij}^{n,n}$	t_{ij}	$t_{ij}^{n,o}$	$t_{ij}^{n,n}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

В столбец 2 заносят номера начальных, а в столбец 3 – номера конечных событий операций. Для упорядоченной сети коды операций заносят последовательно в порядке возрастания номеров начальных событий. Занесение начинают с исходного события, и в случае наличия нескольких операций с одинаковыми номерами начальных событий выполняют в порядке возрастания номеров конечных событий.

Затем заполняют столбцы 5 и 10, в которые заносят продолжительность соответствующих операций, и столбец 1, определяя количество непосредственно предшествующих операций по сетевому графику либо подсчитывая количество операций, для которых началь-

ное событие интересующей нас операции является конечным. При этом достаточно просмотреть только операции, расположенные в таблице выше интересующей.

II этап. Вычисление ранних сроков начала и окончания операций и частных резервов времени второго вида. В столбец 4 заносят ранние сроки начала операции, начиная с тех операций, для которых начальным событием служит исходное. В соответствующие строки заносятся нули. Одновременно в столбец 6 в эти же строки заносят продолжительность соответствующих операций, так как для них ранний срок окончания операции совпадает с ее продолжительностью.

Для последующих операций столбцы 4 и 6 заполняются следующим образом. Определяют количество непосредственно предшествующих операций (столбец 1). Затем среди операций, расположенных в таблице выше интересующей, выбирают все операции, для которых начальное событие интересующей операции служит конечным. Число этих операций должно быть равно числу непосредственно предшествующих операций. Для выбранных операций просматривают столбец 6, и наибольшее значение раннего срока окончания операций из всех просмотренных заносят в столбец 4 в качестве раннего срока начала интересующей операции. Столбец 6 для данной операции заполняют, суммируя содержимое столбцов 4 и 5 для данной строки. Заполнение столбцов 4 и 6 ведут до тех пор, пока эти столбцы не будут заполнены полностью.

После заполнения столбцов 4 и 6 приступают к столбцу 7, занося в него частные резервы времени второго вида операций следующим образом.

Просматривают столбец 3 номеров конечных событий операций. Если какой-либо номер встречается в столбце только один раз, то в соответствующую этому номеру строку столбца 7 заносят нуль, так как операция с таким номером конечного события имеет нулевой частный резерв времени второго вида. Если какой-либо номер конечного события встречается в столбце 3 более одного ряда, то просматривают содержимое столбца 6 для всех строк с данным номером, выбирают наибольшее из просмотренных значений, и затем разность между наибольшим значением и содержимым столбца 6 для каждой строки с данным номером заносят в эту строку столбца 7.

Процесс заполнения столбца 7 заканчивается, когда будут вычислены частные резервы времени второго вида для всех операций и все

строки столбца 7 будут заполнены. Вычисления при этом фактически производятся по формуле

$$R_{ij}'' = t_{jk}^{p.H} - t_{ij}^{p.O},$$

эквивалентной выражению (3.4.39).

III этап. Вычисление поздних сроков начала и окончания операций и частных резервов времени первого вида выполняется последовательно в порядке убывания номеров начальных событий операций. Начинают расчет с операций, конечные события которых совпадают с завершающим. Если такая операция принадлежит критическому пути, то для нее справедливо равенство

$$t_{ij}^{p.O} = t_{ij}^{п.О} = T_{кр}.$$

Поэтому, просматривая строки столбца 6, соответствующие этим операциям, выбирают наибольшее значение и заносят его во все те строки столбца 11, которые соответствуют операциям, имеющим завершающее событие в качестве конечного. Кроме того, это же значение определяет продолжительность критического пути, поэтому его выделяют в таблице тем или иным способом. Поздний срок начала данных операций вычисляется по формуле

$$t_{ij}^{п.H} = t_{ij}^{п.О} - t_{ij}$$

путем вычитания из содержимого строки столбца 11 содержимого этой же строки столбца 10. Результат заносят в соответствующую строку столбца 9.

Затем выбирают первую снизу незаполненную строку столбца 11. Просматривают начальные события всех операций, расположенных ниже выбранной. Для всех операций, у которых номера начальных событий совпали с номером конечного события выбранной операции, сравнивают содержимое строк столбца 9 и наименьшее из сравниваемых значений заносят в выбранную строку столбца 11. Вычитая из него содержимое этой же строки столбца 10, получают поздний срок начала выбранной операции, который заносят в эту же строку столбца 9. Таким образом, процесс заполнения столбцов 11 и 9 происходит практически параллельно.

После заполнения столбцов 9 и 11 переходят к вычислению частных резервов времени первого вида операций и заполнению столбца 8 таблицы, которое производят следующим образом.

Просматривают столбец 2 номеров начальных событий операций. Если этот номер в столбце единственный, то в строку столбца 8, соответствующую данному номеру, заносят нуль. Если номер встречается более одного раза, то для всех этих строк с данным номером просматривают содержимое столбца 9, выбирают наименьшее из рассмотренных значений и затем разность между содержимым столбца 9 для строки с данным номером и наименьшим значением заносят в эту же строку столбца 8. Процесс соответствует вычислению частного резерва времени первого вида операции по формуле

$$R'_{ij} = t_{ij}^{\text{п.н}} - t_{ki}^{\text{п.о}},$$

эквивалентной выражению (3.4.38).

IV этап. Вычисление полных резервов времени операций выполняют по формуле

$$R_{ij}^{\text{п}} = t_{ij}^{\text{п.н}} - t_{ij}^{\text{р.н}} = t_{ij}^{\text{п.о}} - t_{ij}^{\text{р.о}}.$$

Для этого достаточно из содержимого строки столбца 9 вычесть содержимое этой же строки столбца 4 и результат занести в ту же строку столбца 12, либо из содержимого строки столбца 11 вычесть содержимое этой же строки столбца 9 и результат занести в ту же строку столбца 12.

После окончания заполнения столбца 12 все операции с нулевым полным резервом выделяются тем или иным способом, так как они принадлежат критическому пути. Продолжительность критического пути равна позднему или раннему сроку окончания операции, конечное событие которой совпадает с завершающим событием, а полный резерв времени равен нулю.

Результаты расчета сетевых параметров рассмотренным методом для сетевой модели, представленной сетевым графиком (см. рис. 3.3.4), приведены в табл. 3.4.2. Начальные и конечные события операций, составляющих критический путь, выделены жирным шрифтом. Продолжительность критического пути, представленная в последней строке столбцов 6 и 11, также выделена тем же шрифтом.

Таблица 3.4.2

Результаты расчета сетевых параметров табличным методом

Число непосредственно предшествующих операций	Код операции		Параметр								
	i	j	$t_{ij}^{P.H}$	t_{ij}	$t_{ij}^{P.O}$	r_{ij}''	r_{ij}'	$t_{ij}^{П.H}$	t_{ij}	$t_{ij}^{П.O}$	$r_{ij}^П$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	2	0	4	4	0	4	4	4	8	4
0	1	4	0	10	10	0	0	0	10	10	0
1	2	3	4	3	7	0	4	12	3	15	8
1	2	4	4	2	6	4	0	8	2	10	4
1	2	6	4	4	8	15	11	19	4	23	15
1	3	6	7	8	15	8	0	15	8	23	8
1	3	7	7	5	12	19	11	26	5	31	19
1	3	8	7	3	10	29	21	36	3	39	29
2	4	5	10	9	19	0	0	10	9	19	0
2	4	6	10	5	15	8	8	18	5	23	8
1	5	6	19	4	23	0	0	19	4	23	0
1	5	7	19	4	23	8	8	27	4	31	8
1	5	8	19	4	23	16	16	35	4	39	16
4	6	7	23	8	31	0	0	23	8	31	0
3	7	8	31	8	39	0	0	31	8	39	0

Матричный метод расчета параметров сети

Матричный метод позволяет определять ранние и поздние сроки свершения событий, а также состав и продолжительность критического пути.

Этапы метода и последовательность их выполнения представлены в табл. 3.4.3. Для упрощения расчетов и перед их проведением сеть упорядочивают. Приведем пример расчета параметров сети матричным методом.

Таблица 3.4.3

Расчет параметров сети матричным методом

Этап	Содержание этапа
I	Построение матрицы
II	Вычисление ранних сроков свершения событий
III	Определение продолжительности и состава критического пути
IV	Вычисление поздних сроков свершения событий

Пример 3.4.3

Пусть сетевая модель, ориентированная на операции и события, задана сетевым графиком (см. рис. 3.3.4).

Требуется определить ранние и поздние сроки свершения событий, а также состав и продолжительность критического пути.

Решение. I этап. Построение матрицы, фактически представляющей собой взвешенную матрицу смежности вершин сетевой модели, элементы которой равны продолжительности соответствующих операций, с присоединенными справа столбцом ранних сроков свершения событий и снизу строкой поздних сроков свершения событий (рис. 3.4.5).

II этап. Вычисление ранних сроков свершения событий начинают с исходного события и выполняют в порядке возрастания номеров событий, последовательно заполняя при этом строки столбца t_i^P матрицы.

Поскольку ранний срок свершения исходного события всегда равен нулю, то заносят нуль в первую строку столбца t_i^P . Затем просматривают столбец 2 матрицы и содержимое первой строки данного столбца суммируют с содержимым этой же строки столбца t_i^P . Сумму заносят во вторую строку столбца t_i^P . В скобках указывают номер строки, для которой вычислена эта сумма. Затем переходят к следующему столбцу и все вычисления в дальнейшем выполняют по следующей схеме.

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	t_i^P
1		4		10					0
2			3	2		4			4(1)
3						8	5	3	7(2)
4					9	5			10(1)
5						4	4	4	19(4)
6							8		23(5)
7								8	31(6)
8									39(7)
t_j^H	0	8	15	10	19	23	31	39	39

Рис. 3.4.5. Матрица временных параметров событий сети

Просматривают очередной столбец. Содержимое строк этого столбца суммируют с содержимым тех же строк столбца t_i^P . Наибольшая полученная сумма заносится в строку с номером, совпадающим с номером просматриваемого столбца, с указанием в скобках строки, для которой эта сумма получена. После этого переходят к следующему столбцу. Вычисления заканчивают на завершающем событии.

III этап. Определение продолжительности и состава критического пути. Ранний срок свершения завершающего события равен продолжительности критического пути. Поэтому это значение из строки 8 столбца t_i^P заносят в строку t_j^H столбца t_i^P .

Состав критического пути определяют следующим образом. Завершающее событие обязательно принадлежит критическому пути. Просматривают номера событий в скобках столбца t_i^P , начиная с завершающего события. В строке 8 в скобках указано событие 7, в строке 7 – событие 6, в строке 6 – событие 5, в строке 5 – событие 4, в строке 4 – событие 1, которое является исходным. Все указанные события принадлежат критическому пути.

IV этап. Вычисление поздних сроков свершения событий. Поздний срок свершения завершающего события равен раннему сроку его свершения. Поэтому заносим это значение в строку $t_i^{\text{п}}$ столбца 8. Вычисление поздних сроков свершения остальных событий выполняют последовательно, начиная с события, номер которого меньше номера завершающего на единицу, в порядке убывания номеров событий. Общая схема вычислений имеет следующий вид.

Из содержимого строки $t_i^{\text{п}}$ вычитают по столбцам содержимое строки, номер которой совпадает с номером события, для которого вычисляют поздний срок свершения. Сравнивают полученные разности и наименьшую из них заносят в строку $t_j^{\text{п}}$ соответствующего столбца. После этого переходят к следующему событию. Вычисления заканчивают на исходном событии. Равенство нулю вычисленного значения позднего срока свершения исходного события служит контролем правильности проведенных вычислений.

Следует отметить, что матричный метод основан на унифицированном алгоритме Форда.

*Методы расчета параметров сети, основанные
на статистическом моделировании*

Они включают моделирование реализаций продолжительностей операций и структуры комплекса в соответствии с заданными законами распределения методами статистических испытаний, вычисление для полученных реализаций конкретных значений искомых параметров одним из рассмотренных выше методов, обработку полученных данных методами математической статистики и получение необходимых оценок числовых характеристик этих параметров. Точность определения параметров данными методами на 15–20 % выше, чем детерминированными. Однако трудоемкость статистических методов расчета параметров весьма велика, поэтому ручной счет возможен только для сетевых моделей малых объектов, а для остальных моделей необходимо использование ЭВМ.

При методах расчета параметров сети с использованием ЭВМ применяют универсальные и специализированные аналоговые ЭВМ.

Основными в настоящее время являются методы с использованием универсальных ЭВМ, так как они позволяют решать наиболее широкий спектр задач по расчету, анализу и оптимизации параметров сети. Для

этого разработаны пакеты программ, реализующие различные алгоритмы. Достаточно полно многие из этих алгоритмов и программ описаны в литературе.

Методы, использующие специализированные аналоговые ЭВМ, основаны на создании аналогии между исследуемой сетевой моделью и электрической сетью, имеющей ту же топологию, что и исследуемая. Операции в этом случае моделируются с помощью отдельных цепей, включающих источники ЭДС и вентильные элементы, а топология исследуемой сетевой модели отображается соответствующим соединением этих цепей. Напряжения источников ЭДС устанавливаются пропорционально длительностям моделируемых операций, вентили обеспечивают направленность протекания тока в цепях. Исследуемые параметры сетевой модели определяются путем непосредственного измерения разности потенциалов между соответствующими точками электрической схемы при подключении к ней определенным образом источников тока.

Сетевой график сетевой модели в терминах операций и событий и эквивалентная ей электрическая сеть с подключением для измерения продолжительности критического пути источником тока I_0 представлены на рис. 3.4.6 и 3.4.7. Ток в сети между узлами идет по ветвям с максимальной суммой напряжений, включенных в них источников ЭДС, т. е. по ветви, соответствующей критическому пути, что позволяет измерить его в единицах напряжений, а также выделить цепи, входящие в этот путь, применяя различные индикаторы.

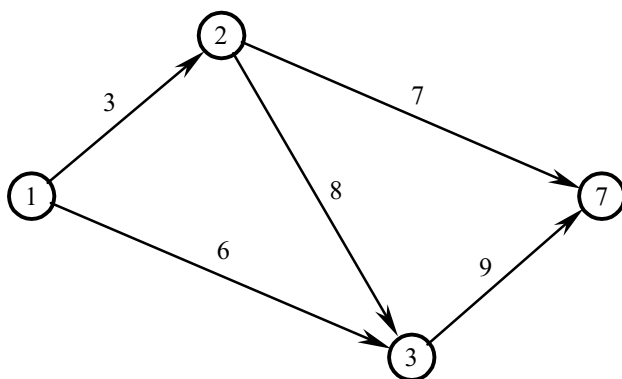


Рис. 3.4.6. Сетевой график в терминах операций и событий

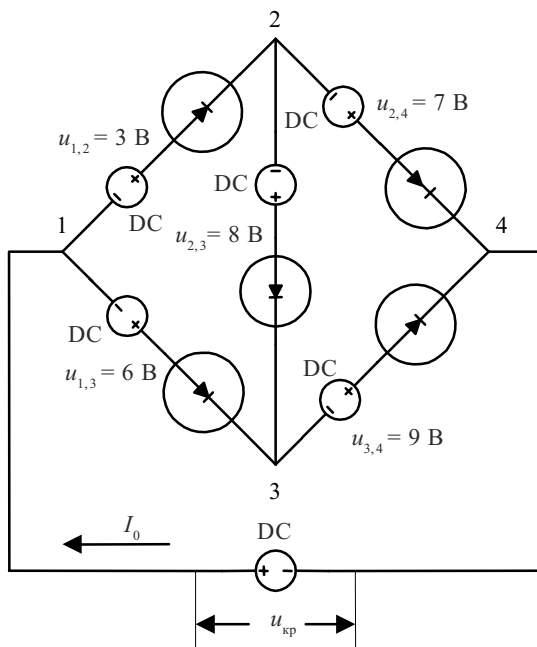


Рис. 3.4.7. Электрический аналог (аналоговая модель) сети, представленной на рис. 3.4.6

В рассматриваемом примере ток течет по ветвям $\langle 1, 2 \rangle$, $\langle 2, 3 \rangle$, $\langle 3, 4 \rangle$, так как $u_{1,2} + u_{2,3} > u_{1,3}$ и $u_{2,3} + u_{3,4} > u_{2,4}$. Следовательно, эти цепи составляют критический путь, а его продолжительность, измеренная в единицах напряжения, равна 20 В.

Аналоговое моделирование комплексов операций на специализированных ЭВМ целесообразно в тех случаях, когда число операций не превышает пятисот, а сама модель требует постоянной коррекции.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМ

4.1. ОБЩИЙ ВИД МОДЕЛИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ

Функциональное моделирование систем представляет собой процесс построения и исследования моделей функционирования (функциональных моделей), т. е. объектов, исследование которых позволяет получить информацию о функционировании или поведении системы-оригинала.

Основной задачей функционального моделирования является установление зависимости между входными воздействиями на систему, свойствами системы и ее реакцией на эти воздействия. При этом структура системы-оригинала в явном виде не рассматривается и не учитывается.

К наиболее общему виду моделей функционирования систем следует отнести "черный ящик", т. е. систему, у которой могут быть наблюдаемы лишь внешние воздействия и реакция на эти воздействия. Свойства же системы и процессы, в ней протекающие, считаются неизвестными и не наблюдаемыми (рис. 4.1.1).

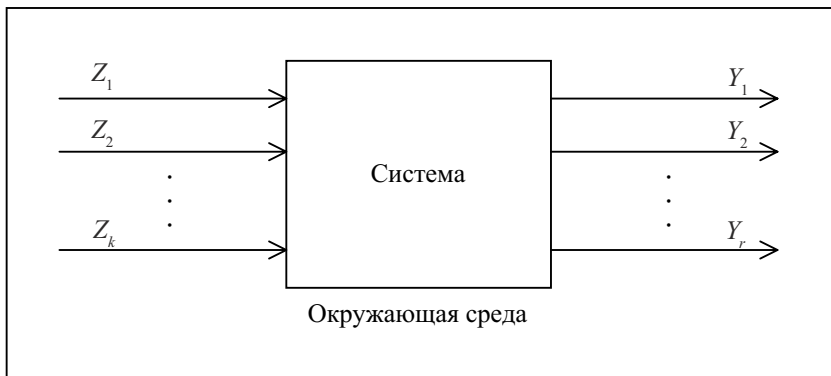


Рис. 4.1.1. Модель "черный ящик"

Процесс моделирования в данном случае заключается в построении модели

$$M_{\phi} = \langle Z, Y \rangle, \quad (4.1.1)$$

где Z – множество входных воздействий; Y – множество реакций, и преобразовании ее к виду

$$\Gamma = \langle Z, Y, G \rangle, \quad (4.1.2)$$

где G – соответствие; $G \subset Z \times Y$ – график соответствия.

В общем случае данное соответствие не является ни *функциональным* (есть пары с одинаковыми первыми и разными вторыми компонентами), ни *инъективным* (есть пары с одинаковыми вторыми и разными первыми компонентами), поэтому одна и та же модель (4.1.2) описывает целый класс систем, гомоморфных для данной модели, которые при одинаковых входных воздействиях имеют разные реакции и, наоборот, одинаково реагируют на различные входные воздействия.

Такая неоднозначность моделей типа "черного ящика" может быть устранена путем введения определенных допущений или постулатов при формализованном описании функционирования систем.

1. Любая система функционирует во времени, взаимодействуя с внешней (окружающей) средой, и в каждый момент времени находится в одном из возможных состояний.

2. Состояние системы в данный момент времени определяется ее предыдущими состояниями и входными воздействиями на систему в данный и предыдущие моменты времени.

3. Реакция системы в данный момент времени определяется состояниями системы и входными воздействиями на нее в данный и предыдущие моменты времени.

4. Функционирование системы во времени рассматривается как процесс перехода системы из состояния в состояние.

Введенные допущения позволяют построить модель функционирования системы в виде

$$\left. \begin{aligned}
 X(t) &= \Phi(X(t-\varepsilon), U(t-\varepsilon), U(t), Z(t-\varepsilon), Z(t), t); & (1) \\
 Y(t) &= \Psi(X(t-\varepsilon), X(t), U(t-\varepsilon), U(t), Z(t-\varepsilon), Z(t), t); & (2) \\
 X(t) &\in A(t); & (3) \\
 U(t) &\in B(t); & (4) \\
 t &\in [t_0, T]; & (5) \\
 \varepsilon &\in [0, t-t_0], & (6)
 \end{aligned} \right\} (4.1.3)$$

где

$X(t)$ – вектор состояний системы;

$Y(t)$ – вектор выходов (реакций) системы;

$U(t)$ – вектор управлений;

$Z(t)$ – вектор возмущающих воздействий;

t_0 – начальный момент времени;

T – конечный момент времени;

Φ – оператор перехода;

Ψ – оператор выхода;

ε – запаздывание;

$A(t)$ – множество допустимых состояний системы;

$B(t)$ – множество допустимых управлений.

В модели (4.1.3) выражение (1) называется *уравнением состояния*, а выражение (2) – *уравнением выхода*.

Для систем без последействия модель функционирования записывается в более простом виде

$$\left. \begin{aligned}
 X(t) &= \Phi(X(t_0), U(t), Z(t), t); & (1) \\
 Y(t) &= \Psi(X(t), t); & (2) \\
 X(t) &\in A(t); & (3) \\
 U(t) &\in B(t); & (4) \\
 t &\in [t_0, T]. & (5)
 \end{aligned} \right\} (4.1.4)$$

4.2. МЕТОДЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В зависимости от способа построения и исследования модели функционирования системы различают следующие виды функционального моделирования: аналитическое, экспериментальное, имитационное.

4.2.1. Аналитическое моделирование

Сущность аналитического моделирования состоит в том, что модель функционирования системы, представляющая собой совокупность математических выражений, описывающих процессы, которые происходят или могут протекать в моделируемых системах, строится на основании результатов анализа этих процессов.

В основе аналитического моделирования лежит использование общих законов природы, а также законов и закономерностей протекания процессов в исследуемых системах, выявленных при анализе.

Построение модели включает следующие этапы:

- анализ процессов, протекающих в моделируемой системе;
- выбор процессов, существенно влияющих на функционирование системы;
- определение параметров, характеризующих выбранные процессы, описание этих процессов;
- построение аналитической модели функционирования системы.

Результатом построения аналитической модели является совокупность математических выражений, которые решаются аналитически либо численными методами.

Достоинством аналитического моделирования следует считать возможность проведения полного исследования функционирования системы математическими методами (в любых условиях при любых управляющих и возмущающих воздействиях).

К недостаткам аналитического моделирования следует отнести:

- трудности, связанные с выявлением законов и закономерностей протекания процессов в сложных системах и обусловленные:
 - завуалированностью этих процессов;
 - трудностью выделения факторов, влияющих на процессы;
 - сложностью процессов, подлежащих анализу;
- необходимость существенных упрощений при построении аналитических моделей и неизбежная в связи с этим потеря информативности и адекватности моделей;
- сложность получаемой аналитической модели, несмотря на принятые упрощения.

Практически хорошие аналитические модели можно построить только для сравнительно простых и хорошо изученных систем.

4.2.2. Экспериментальное моделирование

Сущность экспериментального моделирования состоит в следующем. Проводится эксперимент над системой. По полученным результатам наблюдений входных и выходных переменных исследуемой системы строится математическая модель, позволяющая получить аналитическую зависимость между входом и выходом системы.

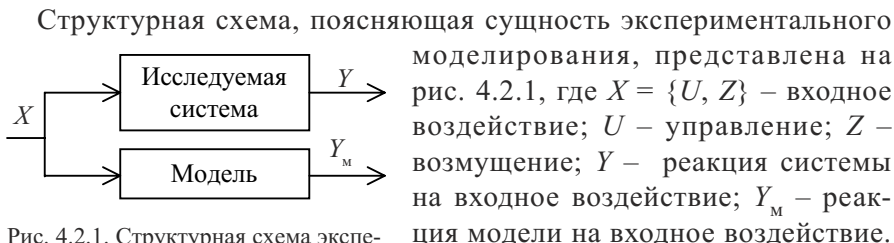


Рис. 4.2.1. Структурная схема экспериментального моделирования

Степень адекватности модели системе определяется степенью близости реакций системы Y и модели Y_M . Для этого используется функция рассогласования

$$r = \rho(Y, Y_M) = \|Y - Y_M\|,$$

где $\| \cdot \|$ – норма, заданная в пространстве, которому принадлежат Y и Y_M .

Примеры функций рассогласования:

$$a) \quad r = \frac{1}{T} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+T} \left(\rho(Y(t), Y_M(t))^p dt \right)^{1/p},$$

где $[t_0, t_0 + T]$ – интервал наблюдений реакций системы и модели; $p \geq 1$;

$$b) \quad r = \max_{t_0 \leq t \leq t_0+T} \rho(Y(t), Y_M(t)).$$

Если $Y(t), Y_M(t) \in E^n$, то $Y(t) = Y_{\langle n \rangle}(t)$, $Y_M(t) = Y_{M\langle n \rangle}(t)$.

Тогда:

$$a) \quad r(Y(t), Y_M(t)) = \left\{ \sum_{i=1}^n q_i |y_i(t) - y_{Mi}(t)|^p \right\}^{1/p},$$

где $q_i, i = 1(1)n$ – вес i -й координаты; $q_i \geq 0$; $p \geq 1$;

$$\bar{b}) \quad \rho(Y(t), Y_M(t)) = \max_{\forall i \in [1(1)n]} \left(q_i |y_i(t) - y_{Mi}(t)| \right),$$

где $q_i \geq 0$.

Возможны и другие способы оценивания адекватности модели путем введения показателей, характеризующих пригодность модели для решения задач исследования моделируемой системы.

Обычно оператор, описывающий моделируемую функциональную зависимость, выбирают из вполне определенного класса. Наиболее часто используют класс линейных операторов (линейных дифференциальных, интегральных уравнений и т. д.). После выбора класса операторов определяют параметры модели. Достоинством экспериментального моделирования является то, что построение модели требует ограниченных априорных данных о системе. К недостаткам экспериментального моделирования можно отнести следующие:

- экспериментальная модель является, как правило, *локальной*, т. е. она адекватна только в узком диапазоне изменения входных и выходных величин, в пределе которого производились исследования;
- экспериментальные модели плохо приспособлены к целям управления;
- построение модели возможно только для реально функционирующей системы;
- построение модели связано с проведением значительного числа экспериментов;
- не для любой системы возможно проведение экспериментов для построения модели, так как:
 - в результате эксперимента может быть нарушено нормальное функционирование системы;
 - в функциональных системах, составной частью которых являются люди, на результат экспериментов может повлиять эффект, проявляющийся в том, что люди, чувствуя, что за ними наблюдают, меняют свое поведение;
 - может оказаться невозможным проведение исследований вариантов функционирования системы, грозящих разрушением системы или ухудшением безопасности окружающей среды.

4.2.3. Имитационное моделирование

Имитационное моделирование представляет собой процесс построения модели исследуемой системы и экспериментирования с этой моделью для получения информации о функционировании моделируемой системы.

Сущность имитационного моделирования заключается в имитации на модели процессов функционирования исследуемой системы. При этом имитироваться может как весь процесс в целом, так и его составляющие с сохранением логической структуры процесса и последовательности протекания имитируемых явлений во времени.

К основным целям имитационного моделирования относятся:

- описание процессов функционирования систем;
- построение теорий и гипотез, объясняющих наблюдаемые процессы функционирования;
- предсказание хода функционирования системы в будущем.

Широкое применение имитационное моделирование получило с появлением компьютеров. Машинная имитационная модель представляет собой программу, реализующую с помощью компьютера алгоритм, отображающий динамику последовательности смены состояний математической модели функционирования исследуемой системы. Такой *алгоритм* называется *моделирующим*. Поскольку моделирующий алгоритм воспроизводит работу математической модели, то при имитационном моделировании стремятся, чтобы математическая модель структурно и динамически соответствовала исследуемой системе.

Обычно моделирующий алгоритм включает:

- алгоритмы, моделирующие функционирование элементов системы;
- алгоритм, моделирующий взаимодействие элементов системы и объединяющий процессы их функционирования в единый процесс;
- алгоритм, обеспечивающий согласованную работу всех подалгоритмов моделирующего алгоритма (алгоритм-диспетчер); он определяет последовательность выполнения операций во времени.

Теоретически имитационные модели позволяют решать любые задачи по исследованию сложных систем. Исследование на этих моделях наиболее близко к натурному эксперименту, и его часто называют вычислительным экспериментом.

Применение имитационного моделирования следует считать целесообразным при выполнении хотя бы одного из следующих условий:

– не существует законченной математической модели исследуемой системы, либо еще не разработаны аналитические методы ее исследования;

– аналитические методы исследования существуют, но столь сложны, что имитационное моделирование дает более простой способ исследования;

– аналитические методы не могут быть реализованы вследствие недостаточной профессиональной подготовки исследователей;

– невозможна постановка натурных экспериментов и наблюдение за функционированием реальных систем в реальных условиях;

– реальный процесс слишком скоротечен либо слишком длителен для того, чтобы обеспечить возможность эффективного наблюдения за ним.

Достоинства имитационного моделирования:

– достаточно информации только о функционировании элементов системы;

– допустимы любые классы входных воздействий при моделировании;

– не обязательно наличие реальной системы;

– удобно для исследования с точки зрения управления;

– имеет широкие возможности для применения в обучении.

Недостатки имитационного моделирования:

– сложность оценивания адекватности модели оригиналу;

– громоздкость имитационной модели;

– сложность интерпретации получаемых результатов;

– исследование на имитационных моделях всегда имеет частный характер, так как каждая модель применима для моделирования относительно узкого класса систем с ограниченным числом условий функционирования, параметров системы и их значений.

4.2.4. Имитационное динамическое моделирование

Имитационное динамическое моделирование, или метод системной динамики (System Dynamics), основы которого были разработаны Дж. Форрестелом (США) в 50-х годах, применяется для исследования сложных систем и является разновидностью имитационного моделирования. Данный метод дал хорошие результаты при создании моделей динамики развития производственно-сбытовой фирмы, урбанизированных территорий, конфликтов и сотрудничества между государства-

ми. А. В. Федотов успешно использовал имитационное динамическое моделирование для построения и исследования моделей высшего учебного заведения.

Метод имитационного динамического моделирования обладает рядом достоинств, существенных при моделировании сложных систем, так как позволяет:

- строить модели отдельных подсистем моделируемой системы, которые могут быть объединены в единую модель, отражающую все аспекты функционирования и влияния подсистем на систему в целом;
- формализовать слабоструктуризованное описание исследуемой системы в соответствии с объективно выявленными причинно-следственными связями;
- использовать промежуточные результаты моделирования для повышения эффективности управления моделируемой системой;
- прогнозировать результаты выполнения того или иного управленческого решения, выбирая по результатам прогноза лучшее.

При имитационном динамическом моделировании модель строится с учетом структуры моделируемой системы. Для этого используется специфический аппарат, позволяющий отобразить причинно-следственные связи между элементами системы и динамику изменений каждого элемента. При построении имитационной динамической модели (ИДМ) обычно применяют специализированный язык моделирования DYNAMO. В имитационном динамическом моделировании используются следующие основные понятия.

Диаграмма причинно-следственных связей – графическое изображение причинно-следственных связей между элементами. Дуги в диаграмме направлены от причины к следствию. Связь будет положительной, если изменение причины вызывает аналогичное изменение следствия, и отрицательной, если изменение причины вызывает противоположное изменение следствия.

На рис. 4.2.2 приведена диаграмма, в которой $\langle A, B \rangle$ – положительная причинно-следственная связь, где A – причина, B – следствие;

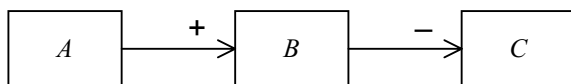


Рис. 4.2.2. Диаграмма причинно-следственных связей

$\langle B, C \rangle$ – отрицательная причинно-следственная связь, где B – причина, C – следствие.

Диаграмма потоков и уровней – графическое изображение уровней и связывающих их потоков.

Уровень – элемент диаграммы, соответствующий какой-либо характеристике моделируемой системы. Обычно уровень обозначается прямоугольником, внутри которого помещают обозначение уровня (наименование характеристики и момент, на который определяется ее значение) и номер уравнения, описывающего динамику изменения характеристики.

Поток – переносимый ингредиент. Вливаясь в уровень или вытекая из него, определяет динамику изменения уровня. Потоки в диаграмме потоков и уровней изображают штриховыми стрелками, если они информационные, и сплошными стрелками, если они имеют любую иную природу.

Темп потока – характеристика потока, описывающая количество переносимого потоком ингредиента в единицу времени. Темп потока изображается на диаграмме специального вида фигурой, острием своим касающейся стрелки, которая изображает соответствующий поток. Внутри пятиугольника помещают обозначение темпа (наименование темпа и интервал, на котором темп считается постоянным).

Вспомогательные элементы (запаздывание, различные промежуточные элементы и т. д.) обозначают окружностями. Их вводят в модель по мере необходимости в процессе построения ИДМ.

Основные символы, используемые при построении диаграммы потоков и уровней, приведены в табл. 4.2.1.

Шаг моделирования – интервал времени, через который вычисляются все параметры модели. Он обозначается DT .

На протяжении всего интервала DT все параметры модели считаются постоянными, определенными на момент начала интервала и меняющимися скачкообразно в момент окончания интервала. Таким образом, ИДМ представляет собой дискретную модель с интервалом дискретности, равным шагу моделирования. Так как в модели одновременно могут быть рассмотрены только три момента: предшествующий настоящему – J , настоящий – K и будущий – L , – то данная модель является моделью с ограниченным последствием.

Расстояние между настоящим K и предшествующим J , а также между будущим L и настоящим K моментами равно шагу моделирования DT .

Таблица 4.2.1

**Основные символы диаграммы потоков и уровней
(графической модели)**

Название	Обозначение		Назначение (использование)
	буквенное	графическое	
1. Озеро	<i>O</i>		Истоки и стоки
2. Информационная связь	<i>F</i>		Информационные потоки
3. Неинформационная (прочие) связь			Материальные, вещественные и прочие неинформационные потоки
4. Уровень	<i>L</i>		Переменные состояния
5. Запаздывание	<i>L</i>		Различные виды запаздывания; D_s – число уровней запаздывания
6. Темп	<i>R</i>		Интенсивность потока, проходящего по соответствующей дуге
7. Вспомогательная переменная	<i>A</i>		
8. Дополнительный вход	<i>C</i>		Экзогенные переменные, константы
9. Дополнительный выход	<i>S</i>		Дополнительные переменные (параметры), которые интересуют пользователя

Фрагмент диаграммы потоков и уровней приведен на рис. 4.2.3, где приняты обозначения:

LEV – уровень (level);

RT – темп потока (rate torrent);

C – константа пропорциональности темпа потока уровню;

m – номер уравнения вычисления уровня (L означает, что уравнение относится к уровню);

n – номер уравнения вычисления темпа (R означает, что уравнение относится к темпу).

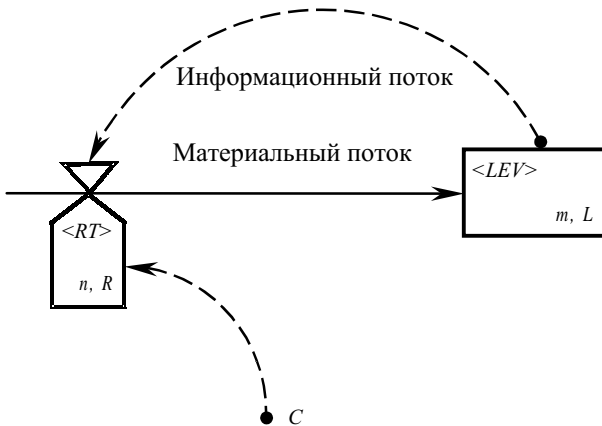


Рис. 4.2.3. Фрагмент диаграммы потоков и уровней

Уравнения модели, соответствующие данному фрагменту диаграммы потоков и уровней, имеют вид

$$LEV.K = LEV.J + DT \times RT.JK, \quad (m, L)$$

$$RT.KL = C \times LEV.K, \quad (n, R)$$

где

$LEV.K$ – уровень в настоящий момент K ;

$LEV.J$ – уровень в предшествующий момент J ;

$RT.JK$ – темп на интервале $[J, K)$;

$RT.KL$ – темп на интервале $[K, L)$.

Начальные условия $LEV.0 = LEV(0)$.

Проведя моделирование, получаем результаты, соответствующие численному решению однородного линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dLEV}{dt} + C \times LEV = 0,$$

имеющему вид

$$LEV(t) = LEV(0) \times e^{-ct}.$$

Следует несколько подробнее остановиться на таком элементе имитационной динамической модели, как запаздывание. В реальных системах запаздывание существует всегда, так как любой процесс, протекающий в таких системах, обладает инерцией. Поэтому реакция системы на входные воздействия всегда наступает с некоторой задержкой. Запаздывания позволяют смоделировать возникающие в системе временные задержки в тех случаях, когда они существенно влияют на функционирование моделируемой системы и возникает необходимость их учета при моделировании.

Графическое изображение запаздывания приведено на рис. 4.2.4.

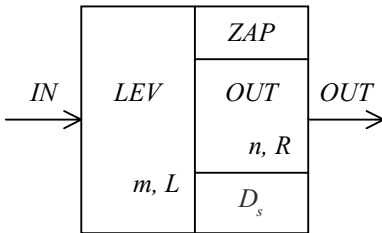


Рис. 4.2.4. Графическое изображение запаздывания

Обозначения на рисунке:

IN – входящий в запаздывание поток (темп потока);

OUT – выходящий из запаздывания поток (темп потока);

ZAP – общее время запаздывания;

D_s – количество уровней запаздывания (порядок запаздывания);

LEV – наименование запаздывающего параметра (характеристики);

m, L – номер уравнения, определяющего общее количество ингредиента, перемещающегося в запаздывании;

n, R – номер уравнения выходного потока.

Запаздывания в имитационно-динамической модели могут задаваться различными способами. Наиболее простым является использование показательных запаздываний, которым в теории управления соответствуют инерционные (апериодические) звенья. Порядок запаздывания определяет число последовательно соединенных инерционных звеньев первого порядка, сумма постоянных времени которых равна постоян-

ной времени запаздывания. Изменение порядка запаздывания позволяет обеспечить желаемую динамику изменения потока на выходе запаздывания.

Уравнение запаздывания в сжатой форме имеет вид

$$OUT.KL = DELAY_s(IN.JK, ZAP), \quad (n, R)$$

$$LEV.K = LEV.J + DT \times (IN.JK - OUT.JK), \quad (m, L)$$

где $DELAY_s(*)$ – запаздывание s -го порядка.

Развернутая диаграмма для двухуровневого запаздывания представлена на рис. 4.2.5.

Пусть $ZAP1 = ZAP2 = 0.5ZAP$.

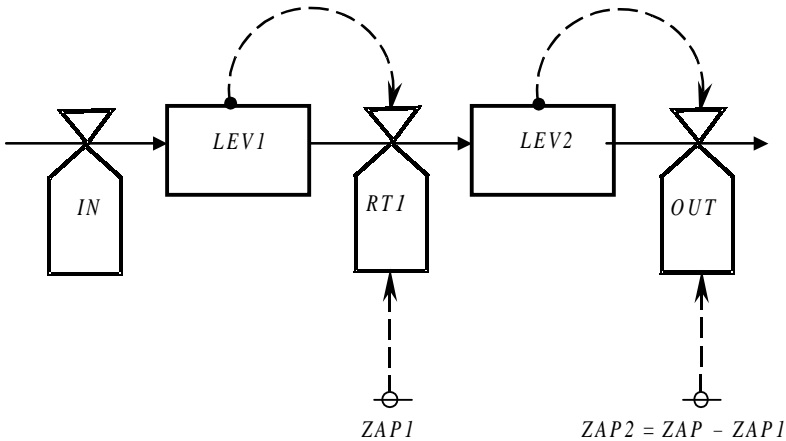


Рис. 4.2.5. Диаграмма двухуровневого запаздывания

Тогда уравнение запаздывания в развернутой форме имеет вид

$$RT1.KL = \frac{LEV1.K}{ZAP/2}, \quad (1, R)$$

$$LEV1.K = LEV1.J + DT \times (IN.JK - RT1.JK), \quad (2, L)$$

$$OUT.KL = \frac{LEV2.K}{ZAP/2} = DELAY_s(IN.JK, ZAP), \quad (3, R)$$

$$LEV2.K = LEV2.J + DT \times (RT1.JK - OUT.JK), \quad (4, L)$$

$$LEV.K = LEV1.K + LEV2.K = LEV.J + DT \times (IN.JK - OUT.JK). (5, L)$$

Имитационную динамическую модель исследуемой системы в целом строят путем объединения соответствующих диаграмм потоков и уровней.

Процесс построения имитационных динамических моделей можно представить в виде последовательности следующих этапов (рис. 4.2.6).



Рис. 4.2.6. Этапы имитационного динамического моделирования

1. Составление и анализ вербального описания моделируемой системы.

2. Преобразование вербального описания в диаграмму причинно-следственных связей.

3. Построение диаграмм потоков и уравнений для подсистем и моделируемой системы в целом (графической модели).

4. Построение математической модели системы.

5. Верификация модели (проверка на адекватность и чувствительность модели).

6. Проведение вычислительного эксперимента на ЭВМ.

7. Интерпретация результатов моделирования.

Процесс имитационного динамического моделирования является итерационным, где на каждом этапе может потребоваться коррекция как содержимого этапов, так и внесения изменений в моделируемую систему для повышения качества ее функционирования.

Рекомендуемая литература

ОСНОВНАЯ

1. *Башин М. Л.* Планирование работ отраслевых НИИ и КБ. М.: Экономика, 1973. 248 с.
2. *Бир С.* Мозг фирмы: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1993. 416 с.
3. *Браверман Э. М.* Математические модели планирования и управления в экономических системах. М.: Наука, 1976. 366 с.
4. *Брусиловский Б. Я.* Математические модели в прогнозировании и организации науки. Киев: Наук. думка, 1975. 232 с.
5. *Голубков Е. П.* Использование системного анализа в принятии плановых решений. М.: Экономика, 1982. 160 с.
6. *Зыков А. А.* Основы теории графов. М.: Наука, 1987. 384 с.
7. *Краснощевков П. С., Петров А. А.* Принципы построения моделей. М.: Изд-во МГУ, 1983. 264 с.
8. *Кристофидес Н.* Теория графов: алгоритмический подход: Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 432 с.
9. *Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М.* Дискретная математика для инженера. 2-е изд. М.: Энергоатомиздат, 1988. 480 с.
10. *Кук Д., Бейз Г.* Компьютерная математика: Пер. с англ. М.: Наука, 1990. 384 с.
11. *Лебедев А. Н.* Моделирование в научно-технических исследованиях. М.: Радио и связь, 1989. 224 с.
12. Лекции по теории графов / *В. А. Емеличев* и др. М.: Наука, 1990. 384 с.
13. *Максименко В. И., Эртель Д.* Прогнозирование в науке и технике. М.: Финансы и статистика, 1982. 238 с.
14. *Неуймин Я. Г.* Модели в науке и технике. История, теория, практика. Л.: Наука, 1984. 189 с.
15. *Нечипоренко В. И.* Структурный анализ систем (эффективность и надежность). М.: Сов. радио, 1977. 216 с.
16. *Оре О.* Теория графов: Пер. с англ. 2-е изд. М.: Наука, 1980. 336 с.
17. *Первозванский А. А.* Математические модели в управлении производством. М.: Наука, 1975. 46 с.
18. *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети и алгоритмы: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 455 с.
19. Системный анализ и структуры управления / Под ред. *В. Г. Шорина*. М.: Знание, 1975. Кн. 8. 304 с.
20. *Темников Р. Е.* и др. Теоретические основы информационной техники: Учеб. пособие для вузов. М.: Энергия, 1979. 512 с.
21. Теория систем и методы системного анализа в управлении и связи / *В. Н. Волков, В. А. Воронков, А. Л. Денисов* и др. М.: Радио и связь, 1983. 248 с.

22. Технология системного моделирования / *Е. Ф. Аврамчук* и др.; Под общ. ред. *С. В. Емельянова* и др. М.: Машиностроение; Берлин: Техник, 1988. 520 с.
23. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 207 с.
24. *Федотов Л. В.* Моделирование в управлении вузом. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 120 с.
25. Модели управления учебным процессом вуза / *И. П. Чучалин, В. З. Ямпольский, В. Н. Чудинов* и др. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1992. 180 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

26. *Акоф Р., Сасиени М.* Основы исследования операций: Пер. с англ. М.: Мир, 1971. 533 с.
27. *Ахьюджа Х.* Сетевые методы управления в проектировании и производстве: Пер. с англ. М.: Мир, 1979. 638 с.
28. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. Вып. 1. 406 с.
29. *Вагнер Г.* Основы исследования операций: В 3 т.: Пер. с англ. М.: Мир, 1972–1973.
30. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. М.: Сов. радио, 1972. 552 с.
31. *Вентцель Е. С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. 2-е изд. М.: Наука, 1988. 208 с. (Проблемы науки и технического прогресса).
32. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Основы динамического программирования. Минск: Изд-во БГУ, 1975. 260 с.
33. *Голенко Д. И.* Статистические методы сетевого планирования и управления. М.: Наука, 1968. 400 с.
34. *Громова Н. Б., Минько Э. В., Прохоров В. И.* Методы исследования операций в моделировании организационно-экономических задач: Учеб. пособие / МАИ. М., 1992. 240 с.
35. *Губин Н. М., Доброзравов А. С., Дорохов Б. С.* Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении в отрасли связи: Учебник для вузов. 3-е изд. М.: Радио и связь, 1993. 376 с.
36. *Денисов А. А., Колесников Д. Н.* Теория больших систем управления: Учеб. пособие для вузов. Л.: Энергоиздат, 1982. 288 с.
37. *Зайченко Ю. П.* Исследование операций. Киев: Вища шк., 1979. 392 с.
38. Исследование операций: В 2 т.: Пер. с англ. / Под ред. *Дж. Моудера, С. Элмаграби*. М.: Мир, 1981. Т. 1. 712 с.; Т. 2. 677 с.
39. *Зайченко Ю. П., Шуилова С. А.* Исследование операций: Сб. задач. Киев: Вища шк., 1984. 224 с.
40. *Калашиников В. В.* Организация моделирования сложных систем. М.: Знание, 1982. 64 с.
41. *Кендэл М.* Временные ряды: Пер. с англ. М.: Финансы и статистика, 1981. 199 с.

42. *Кофман А., Анри-Лабордер А.* Методы и модели исследования операций: В 3 т.: Пер. с фран. М.: Мир, 1960–1977.
43. *Кофман А., Фор Р.* Займемся исследованием операций: Пер. с фран. М.: Мир, 1966. 280 с.
44. *Кривцов А. М., Шеховцов В. В.* Сетевое планирование и управление. М.: Экономика, 1978. 191 с.
45. *Кудрявцев Е. М.* Исследование операций в задачах, алгоритмах и программах. М.: Радио и связь, 1984. 184 с.
46. Математическое моделирование: Пер. с англ. / Под ред. *Дж. Эндрюса и Р. Мак-Лоуна.* М.: Мир, 1979. 278 с.
47. *Морозов В. В., Сухарев А. Г., Федоров В. В.* Исследование операций в задачах и упражнениях: Учеб. пособие для студентов вузов, обуч. по спец. "Прикладная математика". М.: Высш. шк., 1986. 287 с.
48. *Николаев В. И., Брук В. М.* Системотехника: методы и приложения. Л.: Машиностроение, 1985. 199 с.
49. *Прицкер А.* Введение в имитационное моделирование и язык СЛАМ II: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 646 с.
50. Сетевые графики в планировании. М.: Высш. шк., 1981. 168 с.
51. *Таха Х.* Введение в исследование операций: В 2 кн.: Пер. с англ. М.: Мир, 1985.
52. Теория систем и методы системного анализа в управлении и связи / *В. Н. Волкова, В. А. Воронков, А. А. Денисов* и др. М.: Радио и связь, 1983. 248 с.
53. *Тернер Д.* Вероятность, статистика и исследование операций: Пер. с англ. М.: Статистика, 1976. 431 с.
54. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 496 с.
55. *Форрестер Дж.* Основы кибернетики предприятия (индустриальная динамика): Пер. с англ. М.: Прогресс, 1971. 340 с.
56. *Цвирикун А. Д.* Структура сложных систем (Библиотека технической кибернетики). М.: Сов. радио, 1975. 200 с.
57. *Шеннон Р.* Имитационное моделирование систем – искусство и наука: Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 418 с.

Оглавление

Предисловие	3
Введение	5
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ	9
1.1. Система	9
1.1.1. Определения	9
1.1.2. Характеристики системы	13
1.1.3. Классификация систем	18
1.2. Управление	20
1.2.1. Система управления	20
1.2.2. Понятие о процессах управления	24
1.2.3. Методы управления и структуры системы управления	27
1.3. Информация	31
1.3.1. Основные понятия	31
1.3.2. Количественные меры информации	37
1.4. Модель	43
1.4.1. Определения	43
1.4.2. Классификация моделей и методов моделирования	49
1.5. Квалиметрия моделей	54
1.5.1. Определения	54
1.5.2. Качество моделей	58
1.5.3. Эффективность моделирования	61
2. СТРУКТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ	67
2.1. Цели и задачи структурного моделирования. Аппарат формализованного описания структур	67
2.2. Методы формализованного описания структур	77
2.3. Структурно-топологические характеристики систем	98
2.3.1. Изолированные, висячие и тупиковые вершины	98
2.3.2. Петли и контуры	100
2.3.3. Количество и состав связей между элементами системы	107
2.3.4. Связность структуры	117
2.3.5. Значимость элементов в структуре системы	118

3. СЕТЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННЫХ ПРОЦЕССОВ	122
3.1. Назначение и область применения сетевого моделирования	122
3.2. Основные понятия	124
3.3. Построение сетевых моделей	129
3.4. Анализ сетевых моделей	142
3.4.1. Оценивание продолжительности операций	142
3.4.2. Параметры сетевой модели	151
3.4.3. Методы расчета параметров сетевой модели	159
4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМ	176
4.1. Общий вид модели функционирования	176
4.2. Методы функционального моделирования	178
4.2.1. Аналитическое моделирование	179
4.2.2. Экспериментальное моделирование	180
4.2.3. Имитационное моделирование	182
4.2.4. Имитационное динамическое моделирование	183
Рекомендуемая литература	192