Л.А. Мироновский, В.А. Слаев

АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЙ

Санкт-Петербург
«Профессионал»
2010

L.A. Mironovsky, V.A. Slaev

ALGORITHMS FOR EVALUATING THE RESULT OF THREE MEASUREMENTS

Saint Petersburg
“Professional”
2010

ББК 30.10
М64
УДК 389

М64 Мироновский Л.А., Слаев В.А.
Алгоритмы оценивания результата трех измерений. — СПб.: «Профессионал», 2010. — 192 с.: ил.

ISBN 978-5-91259-041-2

Монография состоит из пяти глав и трех приложений. В ней собраны, классифицированы и проанализированы алгоритмы оценивания, направленные на решение «задачи о трех измерениях».

В **Главе I** приведена классификация погрешностей измерений, а также методов оценивания, оптимизирующих выбранные критерии. Эти методы по виду критериев подразделяются на вероятностные, детерминированные, эвристические и диагностические. Описаны классические средние оценки и их свойства.

Глава II посвящена вероятностному и детерминированному подходам к оцениванию. В ней рассмотрены оценки максимального правдоподобия, марковские, байесовские, квадратические, модульные и степенные оценки, а также оценки, оптимизирующие составные и комбинированные критерии.

Глава III описывает принципы эвристического оценивания, основанные на математическом определении средних величин по Коши и Колмогорову. На этом пути строятся классические средние, линейные, квазилинейные, а также разностные квазилинейные и нелинейные оценки.

В **Главе IV** рассматриваются диагностические методы получения оценок, основанные на применении алгебраических инвариантов. Наличие алгебраических инвариантов позволяет осуществить отбраковку искаженных измерений методами технической диагностики по минимальному или максимальному рассогласованию. Алгоритмы оценивания скалярной величины по трем измерениям сведены в таблицу, в которой отражено более семидесяти различных оценок.

Глава V касается применения средних оценок для фильтрации сигналов. Охарактеризован принцип использования «гладкости» сигналов для борьбы с погрешностями, применение которого приводит к фильтрам с конечной памятью. Описаны медианные и диагностические фильтры, приведен пример фильтрации навигационной информации.

В **Приложения** вынесены современная терминология по характеристикам точности, соотношение между неопределенностями и характеристиками погрешности, а также статистические свойства получаемых оценок.

Для метрологов, приборостроителей и разработчиков алгоритмов, реализуемых в программно управляемых средствах измерений, а также для экспертов, осуществляющих их аттестацию. Может быть полезна студентам и аспирантам технических вузов.

УДК 389
ББК 30.10

Рекомендовано секцией «Теоретическая и квантовая метрология»
Ученого совета ВНИИМ им. Д.И. Менделеева
в качестве научного издания — учебного пособия

ISBN 978-5-91259-041-2

BBC 30.10
M64
UDC 389

M64 **L.A. Mironovsky, V.A. Slaev**
Algorithms for Evaluating the Result of Three Measurements. — Saint Petersburg: «Professional», 2010. — 192 p.: ill.

ISBN 978-5-91259-041-2

The monograph consists of five chapters and three supplements. It represents a collection of classified and analyzed evaluation algorithms intended to be applied in solving «the problem of three measurements».

Chapter 1 deals with classification of measurement errors as well as with methods of evaluation, which optimize the criteria selected. These methods, according to the type of criteria, are subdivided into probabilistic, deterministic, heuristic and diagnostic ones. Classical mean estimates and their properties are described.

Chapter II is devoted to the probabilistic and deterministic approaches to an evaluating procedure. This chapter contains a review of maximum likelihood estimates, Markovian, Bayes, quadratic, modular and power estimates, as well as estimates optimizing composite and combined criteria.

Chapter III describes principles of heuristic evaluation based on mathematical determination of mean values according with Cauchy and Kolmogorov methods. Following these principles classical means, as well as linear, quasi-linear, difference quasi-linear and nonlinear estimates are obtained.

In **Chapter IV** there are considered diagnostic methods of getting estimates based on usage of algebraical invariants. The availability of algebraical invariants permits to realize rejection of distorted measurements using methods of technical diagnostics by a minimum or maximum residue. Algorithms of scalar quantity evaluation of three measurements are summarized in a table where more than 70 various estimates are given.

Chapter V deals with application of mean estimates for filtration of signals. A principle of signals «smoothness» usage for error elimination, which leads to filters with finite memory, are characterized. Median and diagnostic filters as well as an example of navigational data filtration are described also.

Supplements include the modern terminology for accuracy characteristics, relationship between uncertainties and error characteristics, as well as statistical properties of the estimates being obtained.

The monograph is intended for metrologists, instrument-making designers, developers of algorithms realized in software controlled measuring instruments, as well as for experts performing their validation. The book may be useful for students and postgraduates of technical institutes of higher education.

UDC 389
BBC 30.10

Recommended by the Section «Theoretical and quantum metrology» of the Academic council of the D.I. Mendeleyev Institute for Metrology as a scientific edition — and tutorial

ISBN 978-5-91259-041-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Один из важных разделов метрологии связан с обработкой результатов многократных измерений неизвестной скалярной величины. В частности, речь может идти о выходных сигналах нескольких датчиков, измеряющих одну и ту же величину, например температуру, давление или навигационные параметры. Для получения оценки измерительные данные с выходов датчиков подвергаются обработке в соответствии с выбранным алгоритмом, а затем передаются для дальнейшего использования.

Выбор алгоритма обработки измерительных данных существенно зависит от представительности выборки, характеризующей генеральную совокупность наблюдений или полученных значений измеряемой величины либо параметра. Измерения, с точки зрения представительности выборки и точности получаемых результатов, можно условно разделить на три категории: метрологические, лабораторные и технические.

Метрологические измерения [68] представляют собой измерения высшей достигнутой точности и характеризуются, как правило, большой представительностью выборки, тщательностью выполнения процедуры измерения, высокой квалификацией персонала, долговременным исследованием стабильности и достоверности результатов измерений, скрупулезным учетом всех факторов, влияющих на результат, обеспечением фиксированных нормальных условий работы аппаратуры, а также прослеживаемостью результатов измерений к национальным эталонам.

Для *технических измерений* [47, 48, 79] характерны заранее установленные требования к необходимой точности результата измерения, небольшой объем выборки, невысокие требования к квалификации персонала, быстрота получения результата, рабочие условия измерений, а прослеживаемость к эталонам, хоть и, безусловно, обеспечивается, однако внимание на этом не акцентируется.

Лабораторные измерения занимают промежуточное положение между метрологическими и техническими измерениями.

Очевидно, что основной объем ресурсов, затрачиваемых в любой стране на измерительные цели, приходится на проведение технических измерений. Простейшим примером технических измерений с минимальной выборкой может служить ситуация, когда покупатель, приобретая товар, подходит к контрольным весам в помещении магазина и проводит одно взвешивание. При этом он сразу получает конечный результат измерения, не требующий дополнительной обработки, с погрешностью, не превышающей класса точности контрольных весов, если они поверены и правильно установлены.

Аналогичные ситуации возникают при измерении параметров уникальных процессов и явлений, например характеристик ядерного взрыва. В таких случаях на большой объем выборки рассчитывать невозможно и приходится довольствоваться «малой» выборкой [28], насчитывающей одно, два, три или чуть более измеренных значений. При этом имеющийся мощный аппарат математической статистики оказывается бесполезным.

Довольно неожиданным примером такого рода оказались ключевые сличения национальных измерительных эталонов с целью установления степени их эквивалентности [119]. В этих сличениях участвует сравнительно небольшое число лабораторий. Для некоторых видов измерений это число достаточно компетентных и независимых национальных лабораторий — участников сличений ограничивается двумя-тремя. Такой пример был приведен В. Бремзером [72] при обосновании необходимости нахождения оценки «самодостаточного» нестатистического опорного значения измеряемой величины в ключевых сличениях.

В данной книге рассматривается именно такая ситуация, которую можно условно назвать «задачей о трех измерениях», хотя многие возникающие здесь проблемы и результаты распространяются и на выборки большего объема. Для получения оценки в подобных ситуациях также приходится использовать некоторые алгоритмы обработки измерительных данных. При этом одним из основных критериев оценивания результата измерений с помощью выбранного алгоритма, наряду с его сложностью и надежностью получаемых оценок, является погрешность или неопределенность результата.

Заметим, что сравнительно недавно получило статус международного документа «Руководство по выражению неопределенности измерения» [96]. И на данный момент в России для описания точности измерения используются два подхода: традиционная концепция погрешности и введенная в соответствии с [90] концепция неопределенности измерений. Некоторое сглаживание противоречий, существующих между упомянутыми подходами, произошло с появлением третьей редакции Международного словаря по метрологии [74], в котором обе эти концепции используются совместно.

Несмотря на методическую и организационную важность этих концепций, они не оказывают существенного влияния на выбор алгоритма оценивания в случае малых выборок (два, три измерения). Определяющим здесь является выбор оптимизируемого критерия, который однозначно приводит к некоторому алгоритму оценивания, например взвешенному среднему арифметическому, среднему гармоническому, медианному или иному. Описанию, систематизации и анализу подобных алгоритмов оценивания и посвящена эта книга.

ВВЕДЕНИЕ

Одна из классических проблем метрологии известна как задача о трех измерениях. Ее отличает простота формулировки в сочетании с глубиной содержания и нетривиальностью результатов. В простейшей постановке эта задача сводится к следующему. Имеются результаты трех измерений x_1, x_2, x_3 неизвестной величины x. Требуется на их основе сформировать по возможности более точную оценку $\hat{x}$ величины x.

Эта задача чрезвычайно широко распространена и встречается в различных областях человеческой деятельности — науке, технике, промышленности, экономике, медицине, спорте, обыденной жизни и т. д.

Например, речь может идти об определении массы (веса) предмета по результатам трех повторных взвешиваний, о вычислении среднемесячной зарплаты за квартал, определении средней цены картофеля на рынке, об оценке выступления спортсмена по результатам нескольких попыток, о сличении национальных измерительных эталонов и др.

В технике для повышения надежности аппаратуры часто используют параллельное включение трех однотипных блоков с последующим осреднением их выходных сигналов. Другими словами — для этого вводится структурная или аппаратурная избыточность. Подобный подход широко применяется для улучшения надежности бортовой аппаратуры — сервоприводов, автопилотов, измерительных датчиков, бортовых цифровых вычислительных машин и т. п. [120].

В качестве примера на рис. 1 приведена структура, содержащая три датчика для измерения одного и того же параметра x.

В частности, речь может идти о совместном использовании трех измерителей скорости самолета или об оценке температуры по показаниям трех термометров. Выходные сигналы датчиков

x_1, x_2, x_3 обрабатываются по выбранному алгоритму в блоке f, в результате чего формируется оценка $\hat{x}$ измеряемой величины или параметра.

При этом центральной задачей является выбор вида функциональной зависимости $\hat{x} = f(x_1,\ x_2,\ x_3)$. Пусть, например, требуется оценить время по показаниям трех хронометров. Один из естественных способов — вычисление среднего арифметического $\hat{x} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ — вполне удовлетворителен, когда все три показания близки. Если же один из хронометров отказал, то средняя арифметическая оценка дает неадекватный результат. Более надежной в этом смысле является оценка типа выборочной медианы, согласно которой крайние измерения отбрасываются, а за оценку принимается показание «среднего» хронометра.

Заметим, что подобный подход, когда крайние значения отбрасываются, а остальные осредняются, часто применяется при оценке качества спортивных выступлений, например в фигурном катании или гимнастике, где результат оценивает судейская коллегия. В других видах спорта применяются иные алгоритмы оценивания, например, в стрелковом спорте суммируются результаты всех попыток (по существу, это эквивалентно использованию среднего арифметического), в прыжках и метании в зачет идет максимальное значение из трех попыток.

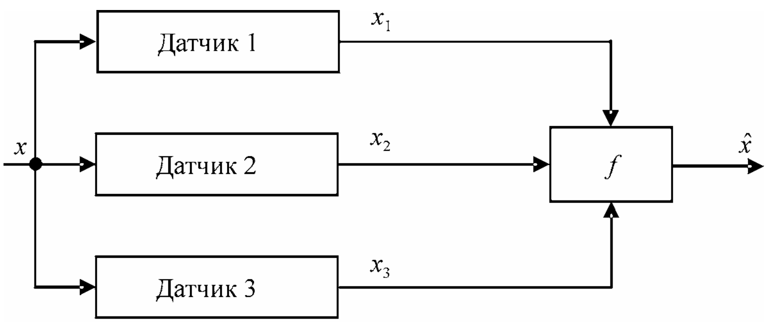


Рис.1. Структурная интерпретация задачи о трех измерениях
(x — измеряемая величина или параметр, $\hat{x}$ — получаемая оценка)

В целом, задача об оценивании неизвестной величины по результатам многократных измерений, несмотря на внешнюю простоту и элементарность, оказывается весьма глубокой и содержательной. При ее постановке обычно привлекается дополнительная информация о характеристиках измеряемых сигналов, статистических свойствах помех, надежности датчиков, а для решения используется аппарат математической статистики, теории вероятностей, интерполяции, фильтрации и оптимизации.

Задачей обработки результатов многократных измерений занимались многие выдающиеся ученые. В начале XIX в. большой вклад в ее исследование внес немецкий математик К.Ф. Гаусс [29], а в XX в. — академик Ю.В. Линник [66]. Необходимо также упомянуть достойный вклад французского математика О.Л. Коши [155, 156] и советского математика академика А.Н. Колмогорова [153], которые разработали классическую теорию средних оценок (среднее арифметическое, геометрическое, степенное и др.), лежащую в основе многих алгоритмов оценивания.

Актуальность этой тематики в технике определяется широким распространением методов комплексирования [52], структурного резервирования [50] и технической диагностики [76], требующих формирования выходных сигналов на основе прямых или косвенных измерений различных параметров. Кроме того, появилась возможность компьютерной реализации достаточно сложных алгоритмов оценивания, представлявших ранее чисто теоретический интерес.

Целесообразность исследования «задачи трех измерений» подтверждается национальным стандартом «Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений», где отмечено, что: «Под многократными измерениями понимают те случаи, когда осуществляется не менее четырех измерений». Отсюда следует, что случай $n = 3$ является особым и требует специального рассмотрения.

В настоящее время известно множество алгоритмов оценивания результатов измерений, обладающих различными точностными, надежностными и другими характеристиками. Описания большинства из них рассеяны по журнальным, монографическим, патентным и другим источникам [см., в частности, 1–158 и др.]. В данной книге собраны вместе, описаны, систематизированы и проанализированы более семидесяти различных алгоритмов оценивания. Для их наглядного сопоставления используется геометрическая интерпретация функций оценивания в виде двумерных графиков и трехмерных поверхностей.

Основное внимание уделено алгоритмам обработки трех измерений, хотя большинство результатов допускает естественное обобщение на многомерный случай.

ГЛАВА I. ЗАДАЧА ОЦЕНИВАНИЯ И КЛАССИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ

1.1. Классификация погрешностей измерений

Любому измерению, как бы тщательно оно ни было проведено, присущи погрешности (неопределенности), которые определяют точность оценки интересующих параметров [34, 35, 68, 74, 89, 98 и др.]. Выборочный обзор терминологии по характеристикам точности измерений, включающий в себя понятия погрешности [89] и неопределенности [74], приведен в Приложении 1.

По происхождению различают следующие виды погрешностей [56, 59]: личные, инструментальные, внешние, методические, погрешности из-за неадекватности модели, а также погрешности, обусловленные ошибками классификации.

Личными, субъективными или грубыми называются погрешности (промахи), зависящие от физических и физиологических особенностей оператора (наблюдателя): его квалификации, степени утомления и т. п., которые определяют их значения и характерные особенности. Под промахом или грубой погрешностью измерений понимается [89] погрешность отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда.

Инструментальными называются погрешности (отказы, сбои, ошибки), возникающие вследствие неидеальности измерительных приборов. Причины возникновения инструментальных погрешностей обычно тщательно анализируются, и, если нет возможности их устранить, они учитываются при помощи различных поправок. Инструментальные погрешности включают в себя такие составляющие, как вариацию и дрейф показаний измерительного прибора, смещение нуля, зону нечувствительности средства измерений и др.

Внешние погрешности связаны с влиянием на прибор физических величин, которые являются характеристиками внешней среды, но не представляют объект измерения. Толчки, вибрации, сильный ветер, влажность, колебания температуры и другие отклонения параметров окружающей среды от нормальных условий, при которых осуществлялась калибровка (градуировка) средства измерений, также приводят к возникновению погрешностей в его показаниях. Различают нормальные, нормированные, рабочие и предельные условия измерений или эксплуатации средств измерений, а также нормальные и рабочие области значений влияющих величин.

Большой важностью обладают *методические* погрешности, т. е. погрешности, вызванные неидеальностью выбранного метода измерений. Чаще всего это происходит вследствие упрощений, принятых в уравнениях для измерений. Они порождаются также различными аппроксимациями, округлениями, отбрасыванием членов высших порядков в разложениях в ряд, отсутствием учета различных других факторов, которые влияют на результаты обработки измерительных данных.

Погрешности, вызванные *неадекватностью используемой модели*, связаны с тем, что исследуемый объект и различные его физические связи присутствуют в процессе обработки данных измерений в виде некоторых абстрактных понятий (моделей), отражающих только главные черты реального объекта и реальных связей, но никогда полностью с ними не совпадающих. Адекватность модели объекта означает, что модель отражает именно те свойства объекта, которые представляют интерес для исследователя, позволяют ему судить о том, насколько эти свойства существенны и какими из них можно пренебречь.

Простейший пример погрешностей такого рода — измерение радиуса стального шарика. Этот шарик в нашем сознании выступает как идеальная сфера, диаметр которой мы и хотим определить. На самом же деле имеется реальный шарик, не совпадающий с идеализированным представлением о нем. Измеряя в различных направлениях диаметр этого шарика, будем получать несовпадающие между собой результаты.

Если некоторую совокупность экспериментальных данных, подчиненную неизвестной закономерности, аппроксимируют кривой заданного вида, то различие между формульным выражением этой кривой и истинным законом изменения переменных является источником погрешностей, которые также следует считать погрешностями, обусловленными неадекватностью модели.

Погрешности, обусловленные *ошибками классификации*, появляются, если имеется возможность отнесения измерения параметров постороннего объекта к изучаемому объекту. Такие ошибки иногда возникают, например, при наблюдении искусственных спутников Земли, когда за исследуемый спутник ошибочно принимают ракетоноситель или другой спутник. Для исключения ошибок классификации обычно предварительно производится проверка выполнения условий поставленной измерительной задачи. Проверки такого рода входят составной частью в самостоятельный раздел теории вероятностей — теорию статистических решений.

По своему характеру каждая из перечисленных погрешностей (личная, инструментальная и т. д.) может быть отнесена к систематической или случайной.

Систематической называют такую погрешность, которая выражает существенные связи, возникающие в процессе измерений или в процессе обработки измерительных данных, и которая неизбежно появляется каждый раз при создании определенных условий. По определению [89] — это составляющая погрешности результата измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же физической величины.

Случайной называется погрешность, которая имеет стохастический характер и отражает менее существенные связи и которую невозможно в точности воспроизвести, создавая те или иные условия наблюдений. Эта составляющая погрешности результата измерения изменяется случайным образом (по знаку и значению) при повторных измерениях одной и той же постоянной физической величины, проведенных с одинаковой тщательностью.

Грубой погрешностью (промахом, сбоем, ошибкой высокого уровня, аномальным значением измерения) называют частный вид случайной погрешности, когда она намного превосходит номинальные (паспортные) характеристики прибора. Обычно грубую погрешность связывают с резким нарушением условий эксперимента, поломками или неисправностью прибора, ошибками в алгоритмах, а также с просчетами обслуживающего персонала. В частности, ошибки классификации всегда относятся к категории грубых ошибок.

Под *суммарной* погрешностью понимают [89] погрешность результата измерений, состоящую из суммы случайных и неисключенных систематических погрешностей, принимаемых за случайные.

Характер образования суммарной погрешности измерения можно представить в виде схемы, показанной на рис. 1.1.

Следует отметить, что граница между систематическими и случайными погрешностями имеет несколько размытый характер. Одна и та же погрешность в зависимости от того, на все или на часть измерений она распространяется, может считаться либо систематической, либо случайной. Число измерений, как правило, зависит от протяженности временно́го интервала, на котором проводятся измерения. Если какой-либо фактор действует на протяжении всего интервала, то погрешность, вызванную действием этого влияющего фактора, следует считать систематической. Если же действие этого фактора проявляется на протяжении короткого интервала времени, намного меньшего всего интервала, то ее следует считать случайной. Иногда действие такого фактора удается изучить и учесть соответствующую погрешность введением поправки. В таком случае эта погрешность практически исключается из общей суммы погрешностей. В некоторых же ситуациях действием фактора пренебрегают, и тогда погрешность считается случайной (как и в случае неисключенных остатков систематических погрешностей) и именно в таком качестве она присутствует при обработке измерительных данных. Таким образом, одну и ту же погрешность можно считать либо случайной, либо систематической в зависимости от конкретного содержания проводимого эксперимента.

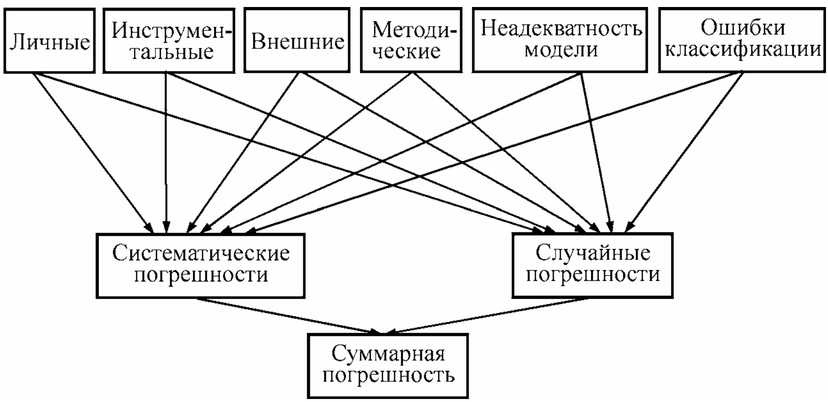


Рис. 1.1. Характер образования суммарной погрешности

Приведенную классификацию можно представить также и в терминах концепции неопределенности измерения. Во ВНИИМ им. Д.И. Менделеева в 1999 г. была разработана Рекомендация МИ 2552–99 Государственная система обеспечения единства измерений. Применение «Руководства по выражению неопределенности измерения», которая стала основой для создания документа [90]. Выдержки из этой Рекомендации приведены в Приложении 2. Они содержат изложение основных положений *Руководства* [96] и рекомендаций по их практическому применению, сравнительный анализ двух подходов к описанию характеристик точности измерений, а также показ соответствия между формами представления результатов измерений, используемыми в нормативных документах, основанных на использовании концепции погрешностей, и формой, используемой в упомянутом *Руководстве.*

Универсальным способом уменьшения случайной и суммарной погрешностей являются многократные измерения одной и той же физической величины. На практике широко применяются повторные измерения либо использование нескольких, желательно разнотипных, измерительных датчиков. При этом возникает задача осреднения значений измерений для получения результирующей оценки.

В дальнейшем перейдем к рассмотрению классических алгоритмов осреднения, уделяя основное внимание случаю трех измерений.

1.2. Постановка задачи и классификация методов оценивания

Пусть x_1, x_2, x_3 — результаты трех измерений неизвестного параметра x; e_1, e_2, e_3 — неизвестные значения погрешности измерений. Тогда связь между ними описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} x + e_1 &= x_1, \\ x + e_2 &= x_2, \\ x + e_3 &= x_3. \end{aligned} \tag{1.1}$$

В случае косвенных измерений система (1.1) принимает более общий вид:

$$\begin{aligned} \xi_1(x) + e_1 &= x_1, \\ \xi_2(x) + e_2 &= x_2, \\ \xi_3(x) + e_3 &= x_3, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — аппаратные функции датчиков.

Системы уравнений (1.1) и (1.2) являются не совсем обычными, т. к. число неизвестных: x, e_1, e_2, e_3, превышает число уравнений. Поэтому при всей своей кажущейся простоте поставленная задача оценки параметра x давно привлекает внимание исследователей, которые предложили немало методов его оценивания.

Основой одного из первых подходов к решению этой задачи явилось предположение о равенстве нулю всех значений погрешности измерения, т. е. $e_1 = e_2 = e_3 = 0$. Тогда вместо недоопределенной системы уравнений (1.1) получаем избыточную (поскольку число уравнений в этом случае превышает число неизвестных) и, в общем случае, противоречивую систему:

$$x = x_1, \qquad x = x_2, \qquad x = x_3. \tag{1.3}$$

Противоречие это носит искусственный характер, поскольку связано с заведомо ложным предположением о равенстве нулю всех значений погрешности.

На основе такого подхода родились методы получения оценки $\hat{x}$ параметра x из системы уравнений (1.1 или 1.2), ставшие уже классическими. Это методы получения средней арифметической, минимаксной (чебышевской) и медианной оценок.

Метод получения **средней арифметической оценки** при трех измерениях

$$\hat{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \tag{1.4}$$

настолько естественен, что его вряд ли можно приписать конкретному автору. В более общей постановке для произвольного числа измерений и нескольких оцениваемых параметров подобную оценку получил К.Ф. Гаусс [29] в начале XIX в. При более детальном рассмотрении оказывается, что полученная оценка минимизирует квадратический критерий

$$J_1 = (x_1 - \hat{x})^2 + (x_2 - \hat{x})^2 + (x_3 - \hat{x})^2 \to \min_{\hat{x}}. \qquad (1.5)$$

Действительно, дифференцируя J_1 по $\hat{x}$ и приравнивая результат нулю, получаем $x_1 + x_2 + x_3 - 3\hat{x} = 0$, откуда сразу следует формула (1.4).

Таким образом, средняя арифметическая оценка является оптимальной в смысле метода наименьших квадратов.

Минимаксная, или чебышевская, оценка параметра x имеет вид:

$$\hat{x} = \frac{\max(\ x_1,\ \ x_2,\ \ x_3\ ) + \min(\ x_1,\ \ x_2,\ \ x_3\ )}{2}. \qquad (1.6)$$

Эта оценка называется минимаксной, т. к. она минимизирует критерий

$$J_2 = \min_{\hat{x}} \max\left(|x_1 - \hat{x}|, |x_2 - \hat{x}|, |x_3 - \hat{x}|\right). \qquad (1.7)$$

Недостатком приведенных оценок является их практическая неработоспособность при наличии грубых погрешностей (промахов, ошибок, сбоев) измерения.

Защититься от промахов можно, используя **медианную оценку**, которая минимизирует *модульный критерий*

$$J_3 = |x_1 - \hat{x}| + |x_2 - \hat{x}| + |x_3 - \hat{x}| \to \min_{\hat{x}}. \qquad (1.8)$$

Оптимальную оценку $\hat{x}$, минимизирующую этот критерий, можно получить графоаналитическим способом, построив график $J_3(\hat{x})$ (рис. 1.2).

Из графика видно, что оптимальная оценка совпадает со средним по величине из трех значений измерений $\hat{x} = x_2$, причем изменение

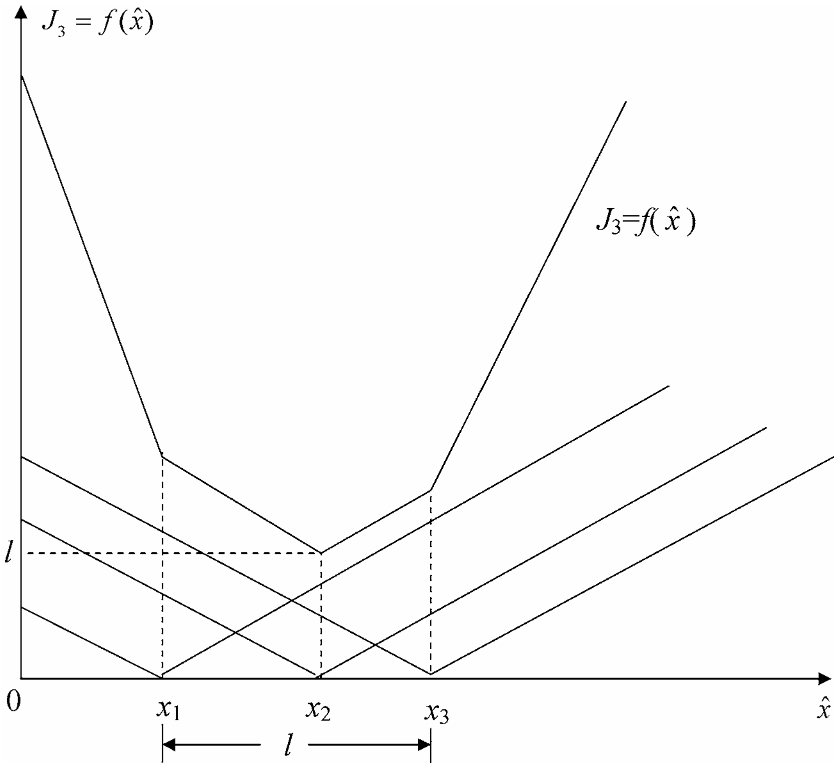


Рис. 1.2. Графоаналитический способ нахождения медианной оценки

значения x_1 в диапазоне $\left[-\infty, x_2\right]$ и значения x_3 в диапазоне $\left[x_2, \infty\right]$ не приводит к изменению оценки $\hat{x}$. Это свидетельствует о хорошей помехозащищенности данной оценки, которую называют также *выборочной медианой.*

К настоящему времени известно большое количество методов получения оценок как по прямым, так и по косвенным измерениям. Эти методы по способу их обоснования можно разбить на следующие группы.

1. Методы получения оценок, оптимизирующих вероятностные критерии.

2. Методы получения оценок, оптимизирующих детерминированные критерии.

3. Эвристические методы.

4. Диагностические методы.

Соответствующая классификация методов оценивания приведена на рис. 1.3.

Отметим, что эвристика при получении оценок присутствует во всех четырех группах. Она проявляется при выборе критерия, при задании функции плотности распределения вероятностей измеряемой величины, а также при учете априорной информации о значении измеряемого параметра.

Прежде чем перейти к рассмотрению каждой из групп, подробнее остановимся на таких классических оценках, как среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое, среднее квадратическое, и некоторых их обобщениях.

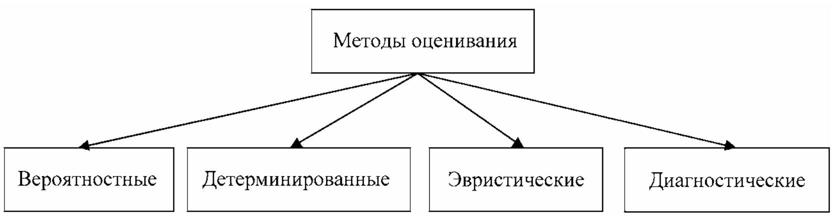


Рис. 1.3. Классификация методов оценивания

1.3. Классические средние и их свойства

1.3.1. Среднее арифметическое

Средним арифметическим n чисел $x_1, ..., x_n$ называется величина:

$$\hat{x} = A\ (x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \tag{1.9}$$

Для случая двух и трех измерений среднее арифметическое определяется формулами:

$$\hat{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \qquad \hat{x} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3).$$

Среднее арифметическое — самое известное и распространенное из всех средних, оно широко применяется как в научных исследованиях, так и в технике, промышленности и в быту.

Его название связано с тем, что каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому его соседних членов.

Пример 1. Рассчитаем средний возраст студентов в группе из 20 человек на основе данных, приведенных в табл. 1.1.

Таблица 1.1

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Возраст (лет)	18	19	19	20	19	20	19	19	19	20

№ п/п	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Возраст (лет)	22	19	19	20	20	21	19	19	19	19

Средний возраст находим по формуле (1.9):

$$\hat{x} = \frac{1}{20}(18 + 19 + 19 + \ldots + 21 + 19 + 19 + 19 + 19) = \frac{388}{20} = 19,4 \text{ года.}$$

1.3.2. Среднее геометрическое

Средним геометрическим нескольких положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ называется величина:

$$\hat{x} = G(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}. \qquad (1.10)$$

Для случая двух и трех измерений среднее геометрическое определяется формулами:

$$\hat{x} = \sqrt{x_1 x_2}, \qquad \hat{x} = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}.$$

Название этого среднего связано с тем, что каждый член геометрической прогрессии с положительными членами, начиная со второго, равен среднему геометрическому его соседних членов.

В математике выражение $b^2 = ac$ известно как геометрическая пропорция. Она выражает и среднее геометрическое двух чисел, и геометрическую прогрессию со знаменателем (коэффициентом) $q = a/b = b/c$.

Заметим, что высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна среднему геометрическому отрезков основания (рис. 1.4) $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$ или $x = \sqrt{a \cdot b}$. Это дает геометрический способ построения среднего геометрического длин двух отрезков: нужно построить окружность на сумме этих двух отрезков как на диаметре, тогда высота, восставленная из точки их соединения до пересечения с окружностью, даст искомую среднюю геометрическую оценку.

Рис. 1.5 позволяет визуально сопоставить среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел. Из него видно, что, если a не равно b, то среднее арифметическое всегда больше среднего геометрического.

При больших значениях n среднее геометрическое обычно вычисляют с помощью логарифмирования, сначала находя среднее арифметическое логарифмов:

$$\ln G(x_1, ..., x_n) = \frac{\ln x_1 + \ldots + \ln x_n}{n},$$

а затем выполняя потенцирование. По этой причине среднее геометрическое иногда называют *средним логарифмическим*.

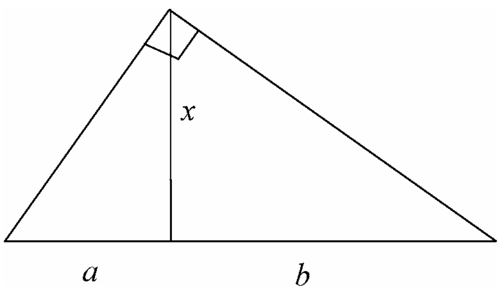


Рис. 1.4. Построение среднего геометрического

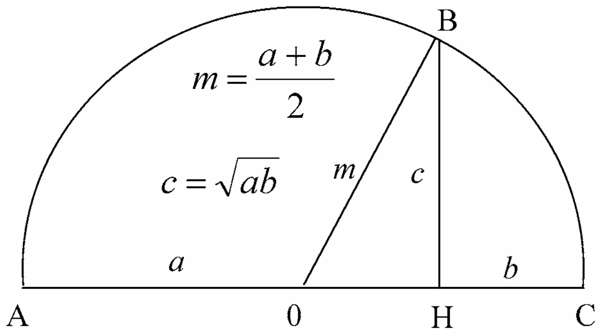


Рис. 1.5. Способ построения средних отрезков

В прикладной статистике среднее геометрическое полезно при нелинейной шкале измерений. Чаще всего среднее геометрическое находит свое применение при определении средних темпов роста (средних коэффициентов роста), когда индивидуальные значения признака представлены в виде относительных величин. Оно используется также, если необходимо найти среднее между минимальным и максимальным значениями признака (например, между 100 и 1 000 000).

В качестве **примера** *применения среднего геометрического* на практике приведем любопытный отрывок из воспоминаний известного астрофизика И.С. Шкловского, опубликованный им под названием «Государственная тайна».

Однажды (дело было в советское время) он беседовал с журналисткой О.Г. Чайковской, известной своими статьями на криминально-судебные темы.

«Ольга Георгиевна, сколько народу у нас сидит в тюрьмах и лагерях, осужденных по всякого рода уголовным делам?»

«Увы, не знаю. Единственное, что я могу Вам предложить — это мои личные наблюдения в Ростове, где я ряд лет заведовала корпунктом "Известий". Так вот, оказывается, что суды этого города ежегодно выносят приблизительно 10 000 приговоров».

«Прекрасно, — воскликнул я. — Будем, довольно произвольно, считать, что эти суды в среднем дают каждому обвиняемому по пять лет. Таким образом, мы можем утверждать, что в советских тюрьмах и лагерях сидит, и притом постоянно сидит, около 50 000 человек, осужденных только ростовскими судами. Остается оценить вклад города

Ростова в баланс союзной преступности. Самое простое — положить его равным доле населения Ростова в населении нашей страны. Эта доля около 1/300. Приняв эту оценку, мы получили бы неправдоподобно большое число заключенных в нашей стране. Так нельзя считать. Ростов — классический бандитский город, о котором даже сложены знаменитые блатные песни. Но, с другой стороны, по абсолютному количеству выносимых приговоров Ростов, конечно, уступает нашим городам-гигантам Москве и Ленинграду. Ясно, однако, что приписывать Ростову 10 % всей союзной преступности — это много. С другой стороны, считать эту долю равной 1 % — явно мало. Ошибка в оценке будет минимизирована, если взять среднее логарифмическое между этими крайними значениями. А это — корень из десяти, т. е. примерно 3 %. Отсюда вывод: одновременно в лагерях и тюрьмах Советского Союза находится в заключении примерно 1,5 миллиона человек. Думаю, что вероятная ошибка этой оценки — несколько десятых процента, что не так уж плохо».

Присутствовавший при этом Евгений Богат воскликнул: «Откуда Вы это узнали? Ведь это же государственная тайна!»

1.3.3. Среднее гармоническое

Средним гармоническим *n* чисел $x_1, ..., x_n$ называется величина:

$$\hat{x} = H(x_1, \quad \ldots, \quad x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \quad \ldots \quad + \frac{1}{x_n}}. \qquad (1.11)$$

Таким образом, среднее гармоническое — это число, обратная величина которого является средним арифметическим обратных величин данных чисел. По этой причине его называют еще *обратным средним арифметическим*.

Для случая двух и трех измерений среднее гармоническое определяется формулами:

$$\hat{x} = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2},$$

$$\hat{x} = \frac{3}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}} = \frac{3x_1x_2x_3}{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}.$$

Название среднее гармоническое связано с хорошо известным в математике гармоническим рядом:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Каждый член этого ряда, начиная со второго, равен среднему гармоническому его соседних членов, например, $1/n$ — это среднее гармоническое дробей $1/(n-1)$ и $(1/n+1)$. Есть и обратная точка зрения — что название гармонического ряда происходит от среднего гармонического.

С помощью среднего гармонического вычисляется средняя скорость на эстафете, если известны скорости на отдельных этапах и длины всех этапов. Оно используется также при расчете средней продолжительности жизни, средней цены продукции при известных объемах продаж в нескольких торговых точках. К нему прибегают в случаях определения, например, средних затрат труда или материалов на единицу продукции по двум или более предприятиям.

Рассмотрим две задачи на вычисление средней скорости.

Задача 1. Машина ехала первый час со скоростью $v_1 = 20$ км/ч. Спрашивается, с какой скоростью v_2 она должна ехать второй час, чтобы в итоге средняя скорость была 40 км/ч?

Задача 2. Машина доехала от пункта А до пункта Б со скоростью $v_1 = 20$ км/ч. Спрашивается, с какой скоростью v_2 она должна ехать обратно (от Б к А), чтобы в итоге средняя скорость была 40 км/ч?

Задачи отличаются тем, что в одной из них время движения разбито на две равные части, а в другой — путь разбит на два равных участка.

Несложные вычисления показывают, что в первом случае средняя скорость — это среднее арифметическое скоростей на отдельных участках, откуда получаем ответ v_2= 60 км/ч.

Во втором случае средняя скорость — это среднее гармоническое скоростей на отдельных участках:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = 2\frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}.$$

Подстановка сюда данных задачи приводит к равенству $20 + v_2 = v_2$, которое выполняется только при $v_2 \to \infty$.

Таким образом, мы получаем два правила вычисления средней скорости:

1. Если скорости $v_1, \ldots, v_n$ относятся к равным промежуткам времени, то следует использовать формулу среднего арифметического $v_{\text{ср}} = \frac{1}{n}(v_1 + \ldots + v_n)$.

2. Если скорости $v_1, \ldots, v_n$ относятся к равным участкам пути, то следует использовать формулу среднего гармонического

$$v_{\text{ср}} = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \ldots + \frac{1}{v_n}}.$$

Пример 2. Требуется вычислить среднюю скорость двух автомашин, прошедших один и тот же путь, но с разной скоростью: первая — со скоростью 100 км/ч, вторая — 90 км/ч.

Для вычисления применяем формулу среднего гармонического:

$$\hat{x} = \frac{2}{\frac{1}{100} + \frac{1}{90}} = \frac{1800}{19} = 94{,}7 \text{ км/ч}.$$

Пример 3. Ожидание автобуса. На остановке останавливаются автобусы трех маршрутов. Интервалы их движения 5, 9 и 12 минут соответственно. Каково среднее время ожидания автобуса?

Интуитивно ясно, что это время примерно вдвое меньше, чем 5 минут. Точный ответ дает формула:

$$T = \frac{1}{\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}\right)} = 2{,}535 \text{ мин},$$

т. е. ровно одна треть среднего гармонического.

Заметим, что вид, близкий к среднему гармоническому, имеют формула фокусного расстояния линзы, формула параллельного соединения сопротивлений и формула жесткости последовательно соединенных пружин.

Фокусное расстояние линзы

Для вычисления фокусного расстояния f линзы в геометрической оптике используется формула:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где a — расстояние от предмета до линзы, b — расстояние от линзы до изображения.

Отсюда следует, что фокусное расстояние равно половине среднего гармонического чисел a и b.

Существует изящный способ, позволяющий найти любую из трех величин f, a и b (при двух известных) без вычислений, пользуясь номограммой с тремя простыми шкалами, расположенными под углом 60° друг к другу (рис. 1.6).

Если приложить к таким шкалам нить, проходящую через две заданные точки (как показано на рис. 1.6), то по заданным числам a и b (или f) можно сразу определить f (или, соответственно, b). Изменив вдвое масштаб по вертикальной оси, получаем простой способ нахождения среднего гармонического двух чисел.

Параллельное соединение резисторов

Рассмотрим две схемы, представленные на рис. 1.7. Требуется найти величину R, при которой результирующие сопротивления обеих схем одинаковы.

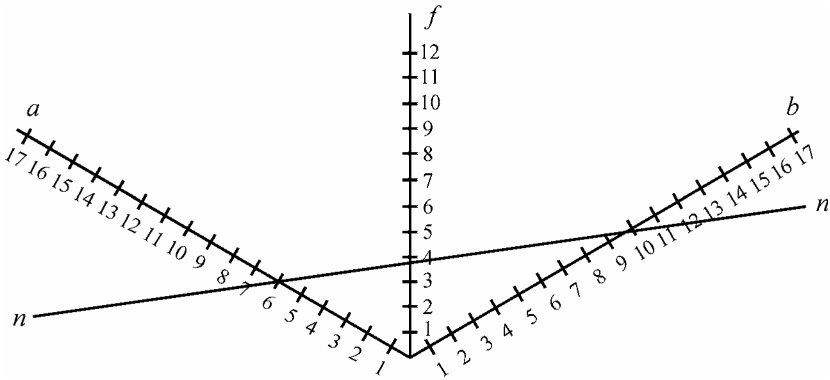


Рис. 1.6. Нахождение среднего гармонического двух чисел

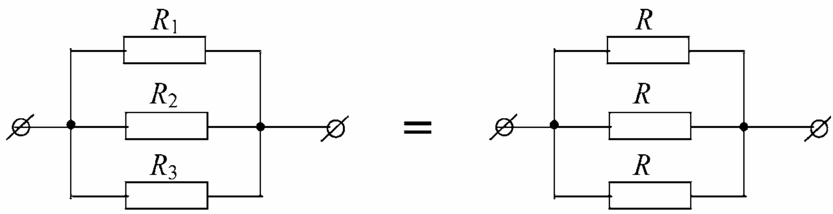


Рис. 1.7. Среднее гармоническое сопротивление

Искомая величина R представляет собой среднее гармоническое сопротивлений R_1, R_2, R_3:

$$R = \frac{3}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}.$$

Последовательное соединение пружин

На рис. 1.8 показано последовательное соединение двух упругих пружин с жесткостями k_1 и k_2.

Жесткость K эквивалентной пружины определяется формулой $\frac{1}{K} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$, которая аналогична формуле параллельного соединения резисторов.

Рассмотрим две системы пружин, представленные на рис. 1.9. Требуется найти величину жесткости пружины k, при которой общие жесткости обеих систем пружин одинаковы.

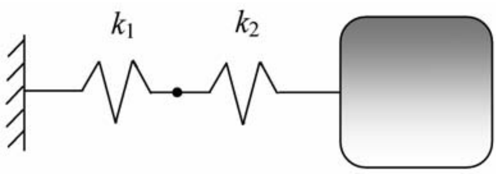


Рис. 1.8. Последовательное соединение пружин

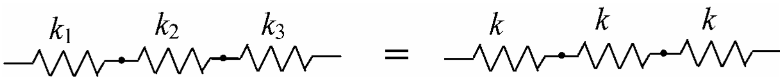


Рис. 1.9. Средняя гармоническая жесткость пружины

Для решения заметим, что общая жесткость K последовательного соединения трех пружин описывается формулой $\frac{1}{K} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$. Отсюда для K получаем формулу среднего гармонического

$$K = \frac{3}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}}.$$

Следующий **пример** относится к *теории автоматического управления*.

При анализе систем управления используется понятие о среднем геометрическом корне ω. Пусть имеется характеристическое уравнение динамической системы

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0$$

и $p_1, \ldots, p_n$ — его корни.

Обозначим через ω среднее геометрическое значение этих корней:

$$\omega = \sqrt[n]{a_0} = \sqrt[n]{p_1 p_2 \ldots p_n}.$$

Приведем характеристическое уравнение к нормированному виду, выполнив подстановку $p = q\sqrt[n]{a_0} = \omega q$:

$$q^n + \frac{a_{n-1}}{a_0}\omega^{n-1}q^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{a_0}\omega q + 1 = 0.$$

Увеличение ω вызовет пропорциональное радиальное смещение корней на комплексной плоскости. При этом вид переходного процесса меняться не будет, а будет изменяться только его временно́й масштаб. Поэтому средний геометрический корень ω может служить мерой быстродействия системы автоматического управления.

1.3.4. Среднее квадратическое

Средним квадратическим *n* чисел x_1, ..., x_n называется величина:

$$\hat{x} = Q(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}. \qquad (1.12)$$

Для случая двух и трех измерений среднее квадратическое определяется формулами

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}, \qquad \hat{x} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}}.$$

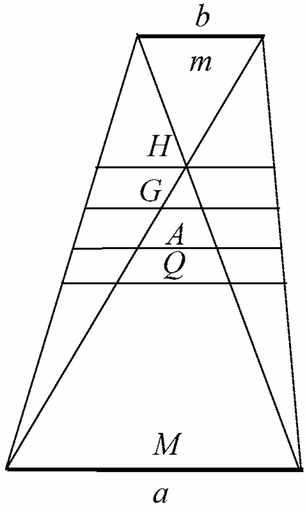
Среднее квадратическое находит применение во многих приложениях. В частности, через него определяются такие понятия теории вероятностей и математической статистики, как дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

1.3.5. Геометрическая интерпретация средних

Для случая двух измерений классические средние допускают красивую геометрическую интерпретацию. Пусть A — среднее арифметическое двух положительных чисел a и b, G — их среднее геометрическое, H — среднее гармоническое, Q — среднее квадратическое, m — минимальное и M — максимальное из чисел a и b.

Геометрическая интерпретация этих средних как некоторых отрезков в трапеции с основаниями a и b приведена на рис. 1.10. Все отрезки H, G, A, Q параллельны основаниям трапеции.

Отрезок H, длина которого равна среднему гармоническому, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции. Отрезок G, соответствующий среднему геометрическому, делит трапецию на две подобные части. Отрезок A — это средняя линия трапеции, ее длина равна полусумме оснований, т. е. их среднему арифметическому. Отрезок Q, длина которого равна среднему квадратическому, делит трапецию на две равновеликие (по площади) части. Наконец, сами основания, равные максимальному и минимальному из чисел a, b, представляют собой крайние случаи средних значений.



$m = \min(a,b)$ (minimal)

$H = \dfrac{2ab}{a+b}$ (Harmonic)

$G = \sqrt{ab}$ (Geometric)

$A = \dfrac{a+b}{2}$ (Arithmetic)

$Q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ (Quadratic)

$M = \max(a,b)$ (Maximal)

Рис. 1.10. Трапеция средних

Другой способ графического представления средних двух чисел показан на рис. 1.11, где приведены графики кривых для всех шести средних. Они построены в предположении, что число b постоянно, а число a принимает различные положительные значения. При $a = b$ все кривые пересекаются. Штриховкой выделены «запрещенные» области, в которых никакое среднее двух чисел не может находиться (по определению среднее должно находиться между числами a и b).

Среднему арифметическому на рис. 1.11 отвечает прямая, среднему геометрическому — парабола, повернутая на 90°, среднему гармоническому — гиперболическая кривая.

Кроме рассмотренных классических средних существует много других. В частности, любая монотонная кривая, лежащая в незаштрихованном секторе рис. 1.11, будет соответствовать некоторому среднему.

Отметим цепочку неравенств, связывающие средние значения:

$$m \le H \le G \le A \le Q \le M, \tag{1.13}$$

справедливую для любого числа измерений.

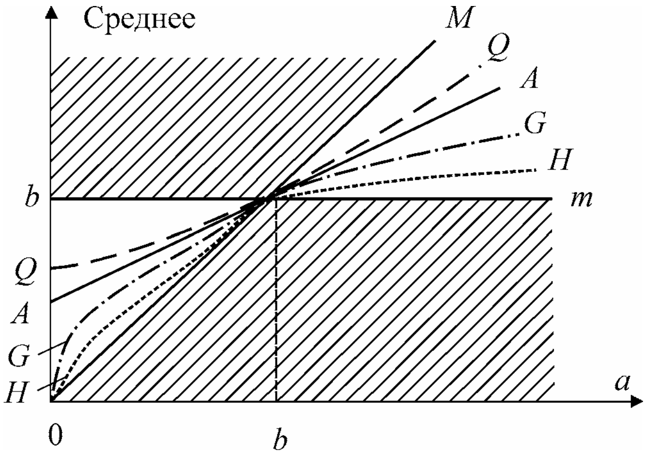


Рис. 1.11. Графики классических средних

Их доказательство для $n = 2$ не вызывает затруднений. Например, рассматривая разность $A_2 - G_2$, получаем

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - x_1 x_2 = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 \geq 0,$$

откуда следует, что $A \geq G$.

Столь же просто доказываются и остальные неравенства.

1.3.6. Взвешенные средние

Все средние оценки, рассмотренные выше, обладают свойством симметрии по отношению к значениям измерений. Перестановка аргументов $x_1, ..., x_n$ в этих средних не меняет итоговой оценки.

На практике такие средние можно применять в случае равноточных измерений. Если же измерения неравноточные, то их следует включать в формулы, домножая на соответствующие весовые коэффициенты, учитывающие значения погрешности отдельных измерений. Получаемые при этом оценки называются взвешенными и уже не обладают свойством симметрии.

Взвешенное среднее арифметическое набора чисел $x_1, ..., x_n$ с положительными весами $a_1, ..., a_n$, сумма которых равна единице, определяется как

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1.$$

Если сумма весов не равна единице, то в приведенной формуле добавляется нормирующий множитель:

$$\hat{x} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i. \tag{1.14}$$

Обычно веса a_i берутся обратно пропорциональными квадратам соответствующих средних квадратических отклонений.

Для случая двух и трех измерений взвешенное среднее арифметическое определяется формулами

$$\hat{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad a_1 + a_2 = 1;$$

$$\hat{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \quad \sum_{i=1}^{3} a_i = 1.$$

Пример 1 (продолжение). Сгруппируем исходные данные табл. 1.1, выделив группы студентов одного возраста. Полученные данные приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Возраст X, лет	18	19	20	21	22	Всего
Число студентов	2	11	5	1	1	20

Теперь средний возраст студентов группы можно рассчитать по формуле (1.14):

$$\hat{X} = \frac{18 \cdot 2 + 19 \cdot 11 + 20 \cdot 5 + 21 \cdot 1 + 22 \cdot 1}{2 + 11 + 5 + 1 + 1} =$$

$$= \frac{36 + 209 + 100 + 21 + 22}{20} = \frac{388}{20} = 19{,}4 \text{ года.}$$

Ответ не изменился, но алгоритм вычислений стал компактнее.

В результате группировки получен новый показатель — частость (частота), указывающая число студентов в возрасте X лет.

Максимальная частость соответствует возрасту 19 лет — это так называемая *мода* данного набора чисел. Рассматривая середину упорядоченной совокупности возрастов, получаем *медиану*, которая также равна 19 годам.

Пример 4. В табл. 1.3 приведены данные о среднемесячных ценах и объеме реализации картофеля на рынке за один квартал.

Таблица 1.3

	Январь	Февраль	Март
Среднемесячная цена за 1 кг (руб.)	25	30	35
Реализовано (кг)	9000	10 000	8500

Требуется определить среднеквартальную цену картофеля P.

Для расчета используем формулу взвешенного среднего арифметического:

$$P = \frac{(25 \cdot 9000 + 30 \cdot 10000 + 35 \cdot 8500)}{9000 + 10000 + 8500} = 29{,}9 \text{ руб.}$$

Взвешенное среднее геометрическое набора положительных чисел $x_1, ..., x_n$ с положительными весами $a_1, ..., a_n$ определяется как

$$\hat{x} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \right)^{1 \big/ \sum_{i=1}^{n} a_i} = \exp\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \sum_{i=1}^{n} a_i \ln x_i \right).$$

Взвешенное среднее гармоническое набора чисел $x_1, ..., x_n$ с положительными весами $a_1, ..., a_n$ определяется формулой

$$\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i}}. \qquad (1.15)$$

Пример 5. Табл. 1.4 содержит данные о продажах картофеля на трех рынках Петербурга за месяц.

Таблица 1.4

Рынок	Стоимость проданного товара, тыс. руб.	Цена за 1 кг в руб.
Сенной	140	25
Кузнечный	200	35
Василеостровский	175	28

Требуется определить среднюю цену 1 кг картофеля.

Для расчета используем формулу взвешенного среднего гармонического (1.15)

$$P = \frac{140+200+175}{\dfrac{140}{25}+\dfrac{200}{35}+\dfrac{175}{28}} = \frac{51,5}{1,755} = 29,3 \text{ руб.}$$

В качестве весовых коэффициентов здесь выступает стоимость проданного товара.

Взвешенное среднее квадратическое набора чисел $x_1, ..., x_n$ с положительными весами $a_1, ..., a_n$ рассчитывается по формуле

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i}}.$$

Пример 6. В России в 1998–2002 гг. профессор И. Кон проводил исследования одного из анатомических размеров у 8267 мужчин старше 18 лет. Полученные им данные в процентном отношении приведены в таблице:

Размер (см)	6	8	10	12	13	14	15	16
Всего мужчин (%)	1	1	1	6	12	15	20	14

Размер (см)	17	18	19	22	24	26	28
Всего мужчин (%)	13	9	4	1	1	1	1

Заметим, что элементы второй строки в сумме дают 100 %. При вычислении взвешенных средних они выступают в качестве весовых коэффициентов.

Найдем четыре взвешенные оценки — арифметическую, геометрическую, гармоническую и квадратическую.

Взвешенное среднее арифметическое находим по формуле

$$\hat{x} = 0,01(6 + 8 + 10 + 6 \cdot 12 + \ldots + 4 \cdot 19 + 24 + 26 + 28) \approx 15,45.$$

Взвешенное среднее геометрическое находим по формуле

$$\hat{x} = (6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12^6 \cdot \ldots \cdot 19^4 \cdot 22 \cdot 24 \cdot 26 \cdot 28)^{\frac{1}{100}} \approx 15,17.$$

Взвешенное среднее гармоническое находим по формуле

$$\hat{x} = \frac{100}{\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{6}{12} + \ldots + \frac{4}{19} + \frac{1}{22} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{28}} \approx 14,86.$$

Взвешенное среднее квадратическое находим по формуле

$$\hat{x} = 0,1\sqrt{6^2 + 8^2 + 10^2 + 6 \cdot 12^2 + \ldots + 4 \cdot 19^2 + 22^2 + 24^2 + 26^2 + 28^2} \approx 15,73.$$

Полученные средние значения удовлетворяют цепочке неравенств (1.13).

Отметим, что в данном случае так называемые *структурные средние* — *медиана* (среднее выборочное значение) и *мода* (наиболее часто получаемое значение) совпадают и равны 15.

Из материалов данного раздела видно, что существует большое число алгоритмов оценивания, которые могут использоваться для осреднения данных или результатов измерений в различных ситуациях. Выше они были приведены без какого бы то ни было научного обоснования. В следующих разделах рассматриваются подходы к обоснованию и получению этих и других методов оценивания в соответствии с классификацией, приведенной на рис. 1.3.

ГЛАВА II. АЛГОРИТМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

2.1. Вероятностный подход

Оценки, оптимальные в смысле вероятностных критериев, являются наиболее обоснованными с теоретической точки зрения. Однако для их применения необходимо знать вероятностные свойства измеряемых сигналов и помех, что, в свою очередь, обычно требует длительного и трудоемкого сбора экспериментального статистического материала.

Наибольшую известность в рамках вероятностного подхода получили оценки *максимального правдоподобия*, а также *байесовские* и *марковские* оценки.

Метод максимального правдоподобия

Этот метод был предложен К.Ф. Гауссом [29], обобщен Р.А. Фишером [157] и получил очень широкое распространение. Идея метода такова. Пусть x_1, x_2, x_3 — измеренные значения некоторой величины x, имеющие плотность распределения вероятностей $g\left(\left(x_1, x_2, x_3\right)\middle|x\right)$. Для независимых измерений совместную плотность можно записать как произведение трех плотностей:

$$g\left(\left(x_1, x_2, x_3\right)\middle|x\right) = f\left(x_1\middle|x\right) f\left(x_2\middle|x\right) f\left(x_3\middle|x\right). \qquad (2.1)$$

Функция $g\left(\left(x_1, x_2, x_3\right)\middle|x\right)$ называется *функцией правдоподобия*. То значение x, для которого функция правдоподобия достигает максимума, называется *оценкой $\hat{x}$ максимального правдоподобия*. Для упрощения вычислительной схемы обычно максимизируют не саму функцию правдоподобия, а ее логарифм

$$L\left(x_1,\ x_2,\ x_3\middle|x\right) = \ln g\left(x_1,\ x_2,\ x_3\middle|x\right). \qquad (2.2)$$

В тех случаях, когда функция правдоподобия достаточно «гладкая», нахождение оценки сводится к решению нелинейного уравнения вида:

$$\left.\frac{\partial L\left(x_1,\ x_2,\ x_3 \middle| x\right)}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}} = 0 \qquad (2.3)$$

относительно неизвестного параметра x.

Пример 7. Пусть $f\left(x_i,\ x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\left(x_i - x\right)^2}{2}\right]$ — нормальная плотность распределения вероятностей со средним значением x и единичной дисперсией. Требуется найти оценку для x по выборке, состоящей из независимых наблюдений x_1, x_2, x_3.

В этом случае функция правдоподобия будет иметь вид

$$L\left(x_1,\ x_2,\ x_3 \middle| x\right) = 3\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - 0,5\sum_{i=1}^{3}\left(x_i - x\right)^2,$$

т. к. для независимых наблюдений $g\left(\left(x_1, x_2, x_3\right) \middle| x\right) = f\left(x_1 \middle| x\right) f\left(x_2 \middle| x\right) \times$ $\times f\left(x_3 \middle| x\right)$. Для оценки параметра x решаем уравнение (2.3):

$$\left.\frac{\partial L\left(x_1,\ x_2,\ x_3 \middle| x\right)}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}} = \left(x_1 - \hat{x}\right) + \left(x_2 - \hat{x}\right) + \left(x_3 - \hat{x}\right) = 0,$$

откуда

$$\hat{x} = \frac{1}{3}\left(x_1 + x_2 + x_3\right).$$

Таким образом, оценка по методу максимального правдоподобия при эвристическом предположении о нормальном законе распределения погрешностей измерений и независимости значений измерений x_1, x_2, x_3 совпадает с оценкой (1.4), полученной по методу наименьших квадратов.

Если функция плотности вероятностей независимых значений измерений описывается законом распределения Лапласа

$$f\left(x_i - x\right) = c_1 \exp[c_0 \left|x_i - x\right|],$$

то максимизация функции правдоподобия

$$L\left(x_1,\ x_2,\ x_3 \middle| x\right) = 3\ln c_1 - c_0\left(\left|x_1 - x\right| + \left|x_2 - x\right| + \left|x_3 - x\right|\right) \tag{2.4}$$

сводится к минимизации критерия (1.8)

$$J_3 = \left|x_1 - \hat{x}\right| + \left|x_2 - \hat{x}\right| + \left|x_3 - \hat{x}\right| \to \min_{\hat{x}},$$

т. е. к поиску *средней модульной* оценки.

В случае, если значения измерений коррелированы между собой и описываются нормальным законом распределения с известной матрицей ковариации N, то максимизация функции правдоподобия приводит к задаче минимизации критерия

$$J = \left[\left(x_1 - \hat{x}\right)\left(x_2 - \hat{x}\right)\left(x_3 - \hat{x}\right)\right] N^{-1} \left[\left(x_1 - \hat{x}\right)\left(x_2 - \hat{x}\right)\left(x_3 - \hat{x}\right)\right]^T \to \min_{\hat{x}}. \tag{2.5}$$

При этом оптимальная оценка, получившая название *марковской*, вычисляется по формуле

$$\hat{x} = \left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} N^{-1} \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}^{-1} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} N^{-1} \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \tag{2.6}$$

и совпадает, как будет показано далее, с оценкой, получаемой по обобщенному методу наименьших квадратов.

Байесовская оценка

Эта оценка получается в результате минимизации критерия среднего риска

$$J = \int c\left(x,\ \hat{x}\right) g\left(x \middle| x_1,\ x_2,\ x_3\right) \mathrm{d}x \to \min_{\hat{x}}. \qquad (2.7)$$

Необходимое условие минимума имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int c\left(x, \hat{x}\right) g\left(x \middle| x_1, x_2, x_3\right) \mathrm{d}x \Big|_{x=\hat{x}} = 0. \qquad (2.8)$$

В приведенных формулах $c\left(x, \hat{x}\right)$ — функция потерь, $g\left(x \middle| x_1,\ x_2,\ x_3\right)$ — апостериорная плотность вероятностей параметра x при заданных результатах измерения x_1, x_2, x_3. Функция $g\left(x \middle| x_1,\ x_2,\ x_3\right)$ связана с плотностью вероятностей в методе максимального правдоподобия $g\left(x_1,\ x_2,\ x_3 \middle| x\right)$ формулой Байеса

$$g\left(x \middle| x_1,\ x_2,\ x_3\right) = \frac{g\left(x_1,\ x_2,\ x_3 \middle| x\right) g(x)}{g\left(x_1,\ x_2,\ x_3\right)}, \qquad (2.9)$$

где $g(x)$ — априорная плотность вероятностей параметра x.

Эвристически задавая функцию потерь и представляя априорную информацию о параметре в виде функции $g(x)$, получаем уравнение (2.8).

Например, задав $c\left(\hat{x},\ x\right) = \left(\hat{x} - x\right)^2$, можно показать, что оптимальная оценка $\hat{x} = \int x g\left(x \middle| x_1,\ x_2,\ x_3\right) \mathrm{d}x$ представляет собой условное математическое ожидание величины x. Если априорная информация о параметре x отсутствует и $c\left(x,\ \hat{x}\right) = \text{const}$, то обычно выбирают значение $\hat{x}$, совпадающее со значением x, максимизирующим $g\left(x \middle| x_1,\ x_2,\ x_3\right)$, т. е. оценку x, являющуюся оценкой максимального правдоподобия.

Таким образом, задавая функцию потерь, можно получить тот или иной вероятностный критерий, минимизация которого по параметру дает оценку неизвестной величины.

2.2. Детерминированный подход

2.2.1. Идея детерминированного подхода

Рассмотрим второй подход, не использующий в явном виде информацию о вероятностных законах распределения погрешностей. Согласно этому подходу проблема оценивания интерпретируется как детерминированная задача аппроксимации. Она состоит в том, что требуется найти точку $\hat{x}$ (оценку), наименее удаленную от трех заданных точек x_1, x_2, x_3 значений измерений (рис. 2.1). Для строгой формулировки задачи необходимо ввести меру удаленности оценки от измеренных значений $J = F(\hat{x}, x_1, x_2, x_3)$, которая и будет служить критерием, подлежащим минимизации. Естественно потребовать, чтобы эта мера была неотрицательной и обращалась в нуль только при совпадении всех точек.

В простейшем случае можно минимизировать суммарное расстояние $|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3|$ от значений x_1, x_2, x_3 до точки $\hat{x}$ (рис. 2.1).

Это приводит к следующей постановке задачи оптимизации. Для полученных значений измерений x_1, x_2, x_3 найти число $\hat{x}$ (оценку), при котором функция $J = F(\hat{x}, x_1, x_2, x_3)$ минимальна.

Если функция F дифференцируема, то решение задачи получаем из условия равенства нулю производной

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}} F(\hat{x},\ x_1,\ x_2,\ x_3) = 0. \qquad (2.10)$$

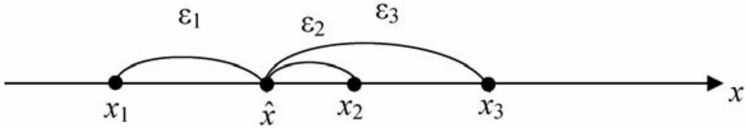


Рис. 2.1. Нахождение оценки, наименее удаленной от трех измеренных значений

Центральным моментом в описанном подходе является выбор вида критерия J, осуществляемый на основе эвристических соображений с учетом характера решаемой физической или технической задачи. К числу наиболее распространенных критериев относятся квадратический, модульный, чебышевский и некоторые другие. Отметим, что возможны ситуации, когда разные критерии приводят к одной и той же оценке. Это объясняется тем, что различные функции F могут иметь экстремум в общей точке.

Перейдем к рассмотрению конкретных критериев.

2.2.2. Использование классических критериев

Квадратический критерий

В соответствии с ним минимизируется сумма квадратов расстояний от точки $\hat{x}$ до точек x_1, x_2, x_3, т. е. критерий (1.5)

$$J = \left(x_1 - \hat{x}\right)^2 + \left(x_2 - \hat{x}\right)^2 + \left(x_3 - \hat{x}\right)^2.$$

Дифференцируя и приравнивая производную нулю, получаем

$$2\left(x_1 - \hat{x}\right) + 2\left(x_2 - \hat{x}\right) + 2\left(x_3 - \hat{x}\right) = 0,$$

откуда

$$\hat{x} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3).$$

Таким образом, средняя арифметическая оценка является оптимальной по квадратическому критерию. Как было показано ранее, она же является наилучшей оценкой по методу максимального правдоподобия при равноточных измерениях с гауссовыми погрешностями. Оба эти факта, в сочетании с вычислительной простотой оценки, обусловили ее широкое практическое распространение.

Взвешенный квадратический критерий

Если измерения неравноточные (например, получаются с помощью разных датчиков) и известны их дисперсии $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$, то можно использовать взвешенный квадратический критерий

$$J = \frac{1}{\sigma_1^2}\left(x_1 - \hat{x}\right)^2 + \frac{1}{\sigma_2^2}\left(x_2 - \hat{x}\right)^2 + \frac{1}{\sigma_3^2}\left(x_3 - \hat{x}\right)^2. \tag{2.11}$$

Дифференцирование и приравнивание производной к нулю приводит к взвешенной средней арифметической оценке

$$\hat{x} = \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2}\right)^{-1} \left(\frac{x_1}{\sigma_1^2} + \frac{x_2}{\sigma_2^2} + \frac{x_3}{\sigma_3^2}\right), \tag{2.12}$$

которая совпадает с предыдущей при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Обобщенный квадратический критерий

Если измерения неравноточные и зависимые, причем известна ковариационная матрица N погрешностей измерений

$$N = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & \sigma_2^2 & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix},$$

элементы которой характеризуют их взаимную корреляцию, то можно использовать критерий *марковской* оценки (2.5), соответствующий обобщенному методу наименьших квадратов

$$J = \left[x_1 - \hat{x},\ \ x_2 - \hat{x},\ \ x_3 - \hat{x}\right] N^{-1} \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x} \\ x_2 - \hat{x} \\ x_3 - \hat{x} \end{bmatrix}.$$

Он приводит к оценке (2.6), обобщающей обе предыдущие:

$$\hat{x} = \left(\begin{bmatrix}1\,1\,1\end{bmatrix} N^{-1} \begin{bmatrix}1 \\ 1 \\ 1\end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix}1\,1\,1\end{bmatrix} N^{-1} \begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{bmatrix} = \frac{1}{d}\left(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3\right).$$

Нормирующий коэффициент d в последней формуле равен сумме элементов обратной матрицы N. Второй сомножитель представляет собой линейную комбинацию измерений, а ее коэффициенты образованы суммированием строк этой матрицы.

Пример 8. Рассмотрим случай, когда первое значение измерений независимо $k_{12} = k_{13} = 0$, а два другие имеют одинаковую погрешность $\sigma_2 = \sigma_3$. Тогда получим

$$d = 2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + k_{23}, \quad a_1 = \sigma_2^2 + k_{23}, \quad a_2 = a_3 = \sigma_1^2,$$

т. е. оценка принимает вид:

$$\hat{x} = \frac{\left(\sigma_2^2 + k_{23}\right)x_1 + \sigma_1^2\left(x_2 + x_3\right)}{2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + k_{23}}.$$

Если дополнительно принять, что все три измерения равноточные $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, то формула еще более упростится:

$$\hat{x} = \frac{k_{23}x_1 + \sigma^2\left(x_1 + x_2 + x_3\right)}{3\sigma^2 + k_{23}}.$$

При $k_{23} = 0$ эта оценка переходит в обычное среднее арифметическое.

Модульный критерий

Этот критерий имеет вид (1.8)

$$J = \left|x_1 - \hat{x}\right| + \left|x_2 - \hat{x}\right| + \left|x_3 - \hat{x}\right|,$$

т. е. равен сумме модулей расстояний ε_1, ε_2, ε_3 от значений измерений до оценки (рис. 2.1). Функция F в данном случае недифференцируема, поэтому минимум ее надо искать иными способами, нежели ранее.

Быстрее всего к цели приводит следующее рассуждение. Функция (1.8) неотрицательна; более того, ясно, что $J \geq l$, где l — длина минимального отрезка, содержащего точки — значения измерений (рис. 1.2). График на рис. 1.2 показывает зависимость критерия (1.8) от $\hat{x}$. Величина $J = l$ достигается, если совместить $\hat{x}$ со средней из трех значений измерения, т. е. если взять $\hat{x} = \mathrm{med}(x_1, x_2, x_3)$. Такая оценка называется *выборочной медианой* (используются также названия «мажоритарная функция» или «функция голосования») и обладает многими любопытными свойствами.

В частности, она мало чувствительна к возможным вариациям законов распределения помех, т. е. является робастной.

Ранее была показана ее оптимальность для погрешностей, распределенных по закону Лапласа. Робастность означает, что такая оценка будет давать значения, близкие к оптимальным, и при других законах распределения. Важно, что эту оценку можно использовать и при погрешностях (промахах, ошибках высокого уровня, например при однократных отказах датчиков), когда одно из измеренных значений сильно отличается от двух других. Подобное свойство называют надежностью или устойчивостью оценки. Отметим, что ранее приведенные оценки таким свойством не обладают.

Взвешенный модульный критерий

Этот критерий строится по аналогии со взвешенным средним квадратическим и имеет вид:

$$J = \frac{1}{\sigma_1}|x_1 - \hat{x}| + \frac{1}{\sigma_2}|x_2 - \hat{x}| + \frac{1}{\sigma_3}|x_3 - \hat{x}|. \qquad (2.13)$$

Его минимизация приводит к оценке, совпадающей с одним из значений измерений (либо с медианным, либо с наиболее точным).

Минимаксный (чебышевский) критерий

При использовании чебышевского критерия (1.7)

$$J = \max\left(|x_1 - \hat{x}|,\ \ |x_2 - \hat{x}|,\ |x_3 - \hat{x}|\right)$$

минимизируется максимальное из уклонений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Минимум этого критерия представляется оценкой, расположенной ровно посредине отрезка l (рис. 2.2):

$$\hat{x} = \frac{1}{2}\left[\max\left(x_1, x_2, x_3\right) + \min\left(x_1, x_2, x_3\right)\right].$$

Средняя точка при этом игнорируется («отбрасывается») подобно тому, как в предыдущей оценке отбрасывались крайние точки.

Далее приводится ряд менее распространенных оценок и указываются критерии, которые ими минимизируются.

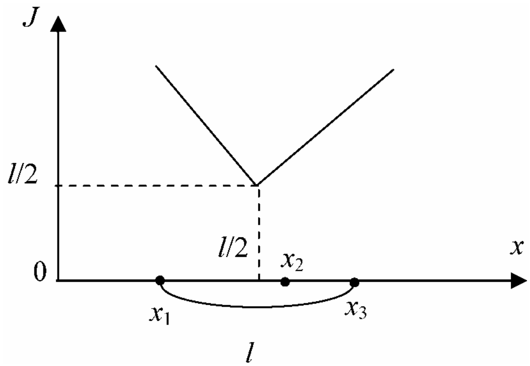


Рис. 2.2. Минимизация уклонений по чебышевскому критерию

Средняя квадратическая оценка описывается формулой:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}}. \tag{2.14}$$

Она минимизирует критерий

$$J_4 = \left(x_1^2 - \hat{x}^2\right)^2 + \left(x_2^2 - \hat{x}^2\right)^2 + \left(x_3^2 - \hat{x}^2\right)^2. \tag{2.15}$$

В этом можно убедиться, выполняя дифференцирование и приравнивая производную нулю.

Средняя геометрическая оценка трех положительных значений измерений имеет вид:

$$\hat{x} = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}. \tag{2.16}$$

Она минимизирует сумму квадратов логарифмических уклонений

$$J_5 = \left(\ln x_1 - \ln \hat{x}\right)^2 + \left(\ln x_2 - \ln \hat{x}\right)^2 + \left(\ln x_3 - \ln \hat{x}\right)^2. \tag{2.17}$$

Средняя гармоническая оценка получается из среднего арифметического соотношения для обратных величин:

$$\frac{1}{\hat{x}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right).$$

Это приводит к формуле

$$\hat{x} = \frac{3}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}}, \tag{2.18}$$

которая минимизирует сумму квадратов уклонений обратных величин

$$J_6 = \left(x_1^{-1} - \hat{x}^{-1}\right)^2 + \left(x_2^{-1} - \hat{x}^{-1}\right)^2 + \left(x_3^{-1} - \hat{x}^{-1}\right)^2 \tag{2.19}$$

или эквивалентный ему критерий

$$J_6' = \left(1 - \frac{\hat{x}}{x_1}\right)^2 + \left(1 - \frac{\hat{x}}{x_2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\hat{x}}{x_3}\right)^2. \tag{2.20}$$

Средняя степенная оценка

Отдельный класс оценок задается формулой:

$$\hat{x} = \sqrt[k]{\frac{1}{3}\left(x_1^k + x_2^k + x_3^k\right)}, \tag{2.21}$$

где k — любое число, $x_i \geq 0$. Они получаются при минимизации критерия

$$J = \left(x_1^k - \hat{x}^k\right)^2 + \left(x_2^k - \hat{x}^k\right)^2 + \left(x_3^k - \hat{x}^k\right)^2. \tag{2.22}$$

К этому классу принадлежат и некоторые из приведенных выше оценок; в частности, при $k = 2$ получаем среднюю квадратическую оценку (2.14), при $k = 1$ получаем среднюю арифметическую оценку (1.4), при $k = -1$ — среднюю гармоническую оценку (2.18). При $k = -\infty$ и $k = \infty$ получим две новые формулы:

$$\hat{x} = \min\left(x_1,\quad x_2,\quad x_3\right) \tag{2.23}$$

и

$$\hat{x} = \max\left(x_1,\quad x_2,\quad x_3\right), \tag{2.24}$$

при которых в качестве оценки берется наименьшее или наибольшее из трех значений измерений.

Взвешенные степенные оценки

Еще более широкий класс оценок можно получить, переходя к взвешенному критерию вида:

$$J = \frac{1}{\sigma_1^2}\left(x_1^k - \hat{x}^k\right)^2 + \frac{1}{\sigma_2^2}\left(x_2^k - \hat{x}^k\right)^2 + \frac{1}{\sigma_3^2}\left(x_3^k - \hat{x}^k\right)^2, \tag{2.25}$$

который строится по аналогии с критерием (2.22).

Он приводит к взвешенной средней степенной оценке

$$\hat{x} = \sqrt[k]{\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2}\right)^{-1}\left(\frac{x_1^k}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^k}{\sigma_2^2} + \frac{x_3^k}{\sigma_3^2}\right)}, \tag{2.26}$$

которая обобщает полученные ранее оценки (1.4), (2.12), (2.14), (2.21), (2.23), (2.24).

Возможны дальнейшие обобщения и этого критерия.

2.2.3. Использование составных критериев

Обширную группу оценок можно получить, используя так называемые составные критерии, являющиеся определенными комбинациями простых критериев, рассмотренных выше. Это позволяет получать оценки с заданными свойствами по точности и надежности.

В качестве примера рассмотрим комбинации квадратического $J_к = J_1$ (1.5) и модульного $J_м = J_3$ (1.8) критериев. Они относятся к классу критериев, симметрично зависящих от разностей $x_1 - \hat{x}$, $x_2 - \hat{x}$, $x_3 - \hat{x}$:

$$J = \rho\left(x_1 - \hat{x}\right) + \rho\left(x_2 - \hat{x}\right) + \rho\left(x_3 - \hat{x}\right), \tag{2.27}$$

где ρ — так называемая функция потерь (она же функция контраста, веса или штрафа).

Вид функции потерь для квадратического критерия показан на рис. 2.3, *а*, для модульного — на рис. 2.3, *б*.

На рис. 2.3, *в* показана функция составного (квадратично-модульного) критерия $J_{км}$, нижняя часть графика которого (при $|x| < 1$) образована параболой, а верхняя — отрезками прямых:

$$\rho\left(x_i - \hat{x}\right) = \begin{cases} 0{,}5\left(x_i - \hat{x}\right)^2 & \text{при} \quad \left|x_i - \hat{x}\right| \le a \\ a\left|x_i - \hat{x}\right| - 0{,}5a^2 & \text{при} \quad \left|x_i - \hat{x}\right| > a \end{cases}. \tag{2.28}$$

При такой функции потерь малым отклонениям, не превышающим величины *а*, придается тот же вес, что и при квадратическом критерии, а большие по величине отклонения учитываются с меньшим весом. Это приводит к оценке, равной среднему арифметическому значений измерений при их малом разбросе и выборочной медиане — при большом разбросе.

На рис. 2.4 показаны графики функций чувствительности трех рассмотренных критериев, получаемые дифференцированием функции потерь $u = \dfrac{\partial\rho}{\partial\left(x_i - \hat{x}\right)}$.

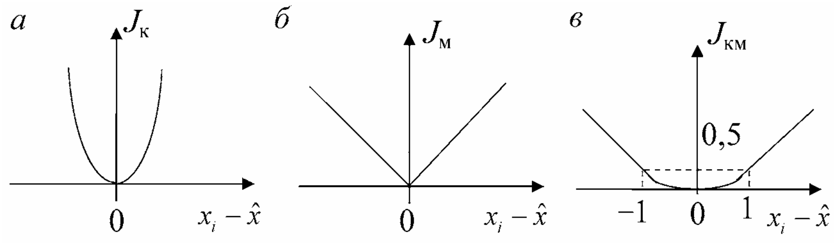


Рис. 2.3. Примеры функций составных критериев

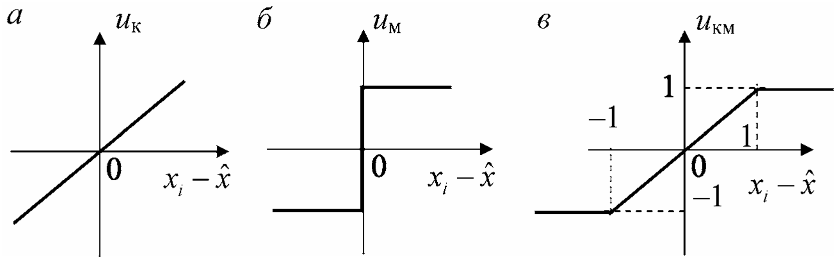


Рис. 2.4. Функции чувствительности для составного критерия

Заметим, что известен аналитический критерий, близкий по своему характеру к составному критерию, описанному выше. Он использован в гибридной вычислительной машине типа «Экстрема» [36] и имеет вид (2.27) с функцией потерь

$$\rho\left(x_i - \hat{x}\right) = \sqrt{\left(x_i - \hat{x}\right)^2 + a^2} - a, \tag{2.29}$$

где a — некоторая константа.

При малых по сравнению с a значениях разности $\left|x_i - \hat{x}\right|$ функция ρ (2.29) так же, как и функция (2.28), близка к параболе

$$\rho = a\left(\sqrt{1 + \left(\frac{x_i - \hat{x}}{a}\right)^2} - a\right) \approx \frac{1}{2a}\left(x_i - \hat{x}\right)^2. \tag{2.30}$$

При больших значениях той же разности $\left|x_i-\hat{x}\right| \quad a$ функция ρ (2.29), подобно функции (2.28), имеет линейный характер

$$\rho \approx \left|x_i-\hat{x}\right|-a.$$

Соответственно, производная функции потерь почти линейна при $\left|x_i-\hat{x}\right| \quad a$ и близка по модулю к единице при $\left|x_i-\hat{x}\right| \quad a$.

Графики функции (2.29) и функции чувствительности

$$u=\frac{\partial\rho}{\partial\hat{x}}=\frac{x_i-\hat{x}}{\sqrt{\left(x_i-\hat{x}\right)^2+a^2}},$$

показанные на рис. 2.5, близки по форме к аналогичным графикам для составного критерия $J_{\text{км}}$.

Приведем дополнительно еще один составной критерий с функцией потерь

$$\rho\left(x_i-\hat{x}\right)=\begin{cases}0{,}5\left(x_i-\hat{x}\right)^2 & \text{при} \quad \left|x_i-\hat{x}\right|\le a\\ 0{,}5a^2 & \text{при} \quad \left|x_i-\hat{x}\right|>a\end{cases}. \qquad (2.31)$$

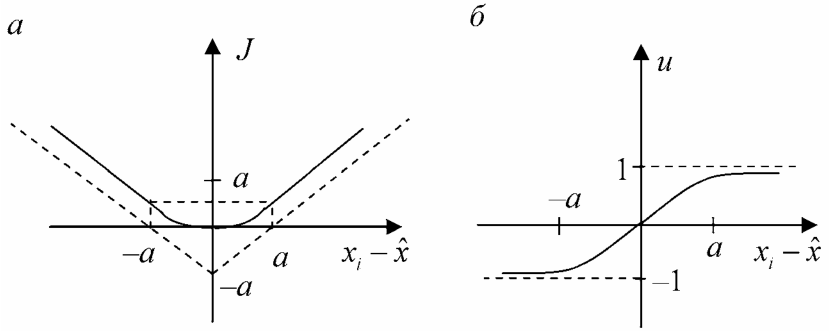


Рис. 2.5. Вид критерия (2.27) с функцией потерь (2.29) (*а*)
и его чувствительность (*б*)

Ему отвечает осреднение с одинаковыми весами результатов измерений, удовлетворяющих условию $\left|x_i - \hat{x}\right| \le a.$ Вид графиков функции потерь и ее производной для этого случая изображен на рис. 2.6.

Выше приведены примеры построения составных критериев. Ясно, что количество подобных примеров ничем не ограничено, поскольку число возможных вариантов построения составных критериев бесконечно.

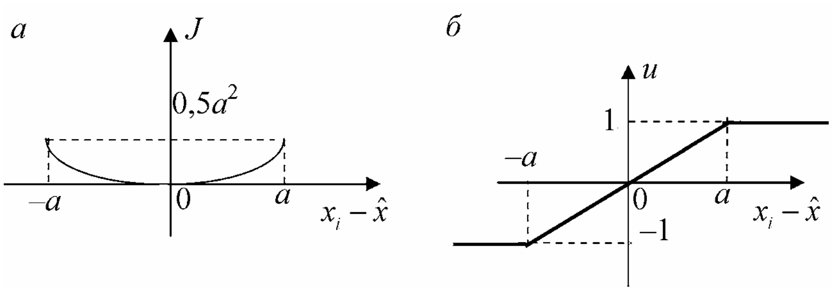


Рис. 2.6. Функция потерь (*а*) и ее производная (*б*) для критерия (2.31)

2.2.4. Использование комбинированных и других критериев

Комбинированные критерии отличаются от составных использованием разных функций потерь по разным переменным. Примерами могут служить следующие три критерия:

$$J = \left(x_1 - \hat{x}\right)^2 + \left(x_2 - \hat{x}\right)^2 + \left|x_3 - \hat{x}\right|, \qquad (2.32)$$

$$J = \left|x_1 - \hat{x}\right| + \left(x_2^2 - \hat{x}^2\right)^2 + \left(x_3 - \hat{x}\right)^2, \qquad (2.33)$$

$$J = \left|x_1 - \hat{x}\right| + \left|x_2 - \hat{x}\right| + \left|x_3 - \hat{x}\right| + \left(x_1 - \hat{x}\right)^2 + \left(x_2 - \hat{x}\right)^2 + \left(x_3 - \hat{x}\right)^2, \qquad (2.34)$$

а также многие другие.

Каждый такой критерий однозначно определяет некоторую оптимальную оценку, причем для нее может не существовать явного аналитического выражения. В подобных случаях для получения оценки привлекают численные методы поиска экстремума минимизируемого критерия.

Другие виды критериев

В начале данного раздела была приведена наиболее общая форма записи критерия:

$$J = F\left(\hat{x}, x_1, x_2, x_3\right), \tag{2.35}$$

а затем на примерах рассмотрены ее частные случаи. Классифицируя их, можно выделить несколько типичных ситуаций (для простоты ограничимся симметричными критериями).

Во-первых, отметим критерии вида (2.27), зависящие от разностей $\left(x_i - \hat{x}\right)$:

$$J = \rho\left(x_1 - \hat{x}\right) + \rho\left(x_2 - \hat{x}\right) + \rho\left(x_3 - \hat{x}\right).$$

Примеры функций потерь ρ были приведены ранее (рис. 2.3–2.6). Более общий случай получим, используя в качестве аргумента функции потерь не разности $\left(x_i - \hat{x}\right)$, а выражения вида $g(x_i) - g\left(\hat{x}\right)$:

$$J = \rho\left[g\left(x_1\right) - g\left(\hat{x}\right)\right] + \rho\left[g\left(x_2\right) - g\left(\hat{x}\right)\right] + \rho\left[g\left(x_3\right) - g\left(\hat{x}\right)\right], \tag{2.36}$$

где ρ — любая монотонная функция.

Например, выбирая $g(x) = x^k$ и квадратическую функцию потерь, получаем критерий (2.22).

Полагая при тех же условиях $g(x) = e^x$, получаем

$$J = \left(e^{x_1} - e^{\hat{x}}\right)^2 + \left(e^{x_2} - e^{\hat{x}}\right)^2 + \left(e^{x_3} - e^{\hat{x}}\right)^2. \tag{2.37}$$

Минимизация этого критерия приводит к оценке

$$\hat{x} = \ln\frac{e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3}}{3}. \tag{2.38}$$

Еще более общий вид критерия таков:

$$J = \rho\left(x_1, \hat{x}\right) + \rho\left(x_2, \hat{x}\right) + \rho\left(x_3, \hat{x}\right). \tag{2.39}$$

Здесь неотрицательная функция ρ характеризует меру близости двух точек, а ее минимум должен достигаться при совпадении аргументов.

Примером может служить критерий

$$J = \ln^2 \frac{\hat{x} + a}{x_1 + a} + \ln^2 \frac{\hat{x} + a}{x_2 + a} + \ln^2 \frac{\hat{x} + a}{x_3 + a}, \tag{2.40}$$

которому соответствует оценка

$$\hat{x} = \sqrt[3]{\left(x_1 + a\right) + \left(x_2 + a\right) + \left(x_3 + a\right)} - a. \tag{2.41}$$

Перечень алгоритмов, получаемых оптимизацией детерминированных критериев, можно было бы продолжить. Очевидно, что общее число таких алгоритмов неограниченно велико, поскольку количество возможных критериев практически бесконечно, и каждый из них порождает свою оптимальную оценку.

ГЛАВА III. ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ОЦЕНОК

3.1. Принципы эвристического оценивания

Большинство из описанных выше методов получения оптимальных оценок сложны в реализации, а многие из них требуют наличия априорной информации статистического характера.

Вместе с тем оптимальность получаемых оценок весьма условна, т. к. выбор того или иного критерия (вероятностного или детерминированного) в значительной степени произволен. Оценки, оптимальные по одному из критериев, могут быть далеки от оптимума в смысле другого критерия. Поэтому на практике часто используется эвристический подход, при котором сначала из тех или иных соображений конструируется алгоритм оценивания, а затем исследуются его свойства и производится проверка работоспособности.

Несмотря на известный прагматизм такого подхода, ему нельзя отказать в определенной логике. Дело в том, что элементы эвристики неизбежно присутствуют в любых методах оценивания. В частности, при детерминированном подходе они проявляются в выборе критерия оптимизации, а при вероятностном — в выборе конкретного закона распределения погрешностей измерений и принципа оптимизации (отношение правдоподобия, средний риск и др.). С этой точки зрения эвристический выбор конкретного алгоритма оценивания означает просто перенос эвристики с вышележащих логических уровней на более низкий уровень.

В обоснование такого подхода можно добавить, что для практики убедительность и приемлемость, например, алгоритма выборочной медианы (крайние измерения отбрасываются, среднее принимается за оценку) вряд ли существенно возрастает от наличия дополнительной информации о том, что при этом минимизируется средний модульный критерий, а получаемая оценка оптимальна, если измерения равноточные, измеренные значения независимы и их плотность распределения вероятностей подчинена закону Лапласа. Решающими аргументами, скорее, будут простота алгоритма и его способность сохранять работоспособность при наличии, по крайней мере, однократных ошибок (отказов, сбоев).

Кроме того, существующий уровень развития математики позволяет для любого эвристического алгоритма указать детерминированный или даже вероятностный критерий, который им оптимизируется, т. е. перенести эвристику «этажом» или двумя выше. Прежде чем перейти к изложению конкретных эвристических алгоритмов получения оценок, остановимся на ограничениях общего характера, которым они должны удовлетворять.

3.1.1. Ограничения на эвристические оценки

Пусть по-прежнему x_1, x_2, x_3 — экспериментальные значения измерений, по которым необходимо построить оценку $\hat{x}$ неизвестной скалярной величины x. Будем полагать, что априорная информация отсутствует. Тогда, обозначая функцию оценивания через f, можно записать

$$\hat{x} = f\left(x_1, x_2, x_3\right).$$

При этом функция оценивания должна удовлетворять некоторым ограничениям общего характера. Например, логично потребовать, чтобы оценка $\hat{x}$ принадлежала тому же отрезку l оси x, что и значения измерений x_1, x_2, x_3:

$$\min\left(x_1, x_2, x_3\right) \le \hat{x} \le \max\left(x_1, x_2, x_3\right). \qquad (3.1)$$

Отсюда, как следствие, получаем, что, если все три значения измерений одинаковы $x_1 = x_2 = x_3$, то оценка должна совпадать с ними:

$$f\left(x_1,\ x_2,\ x_3\right) = x \qquad \text{при} \quad x_1 = x_2 = x_3. \qquad (3.2)$$

Геометрически неравенство (3.1) можно проиллюстрировать с помощью рис. 3.1, на котором по оси абсцисс откладываются значения измерений, а по оси ординат — оценка $\hat{x} = f(x_1, x_2, x_3)$.

При построении графиков на этом и следующих рисунках предполагается, что измерения x_1, x_2, помеченные на оси абсцисс вертикальными черточками, фиксированы, причем $0 < x_1 < x_2$, а измерение x_3 пробегает все возможные значения из диапазона $0 \le x_3 < \infty$. Штриховкой на рисунке выделена область, не удовлетворяющая неравенству (3.1). Границы ее определяются функциями

$$\begin{aligned} f_1: \quad & \hat{x} = \max(x_1, x_2, x_3), \\ f_2: \quad & \hat{x} = \min(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

представляющими два предельных случая оценок.

Графики всех возможных функций оценивания должны лежать в незаштрихованной области. В качестве примера на рис. 3.1 показан график, отвечающий средней арифметической оценке

$$f_3: \quad \hat{x} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3).$$

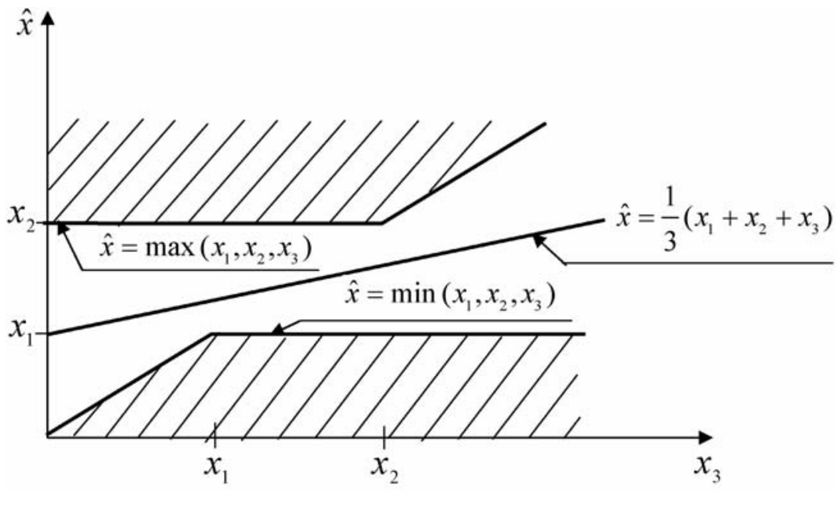


Рис. 3.1. График среднего арифметического трех измерений

Графики функций f шести классических средних для трех значений измерений приведены на рис. 3.2 (см. цв. вклейку). Аналогичные графики для случая двух измерений были приведены ранее (см. рис. 1.11).

3.1.2. Средние величины по Коши и Колмогорову

Впервые условие (3.1) было введено французским математиком первой половины XIX в. академиком О.Л. Коши [155]. Он дал следующее определение средней величины, известное также как «*слабое*» определение.

Определение 1. Средней величиной действительных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ является любая функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ такая, что при всех возможных значениях аргументов значение этой функции не меньше, чем минимальное из чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, и не больше, чем максимальное из этих чисел:

$$\min\left(x_1, ..., x_n\right) \le f(x_1, ..., x_n) \le \max\left(x_1, ..., x_n\right). \tag{3.3}$$

Функция f такого вида называется средней по Коши. Заметим, что среднее от одинаковых чисел равно их общему значению.

Все рассмотренные выше виды средних величин являются средними по Коши.

Гораздо более жесткие требования к функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ предъявляются при «*сильном*» определении средних, принадлежащем советскому математику академику А.Н. Колмогорову.

Определение 2. Непрерывная действительная функция $f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ от n неотрицательных переменных называется средним, если для любых $x_1, \ldots, x_n, \lambda \ge 0$ выполняются условия:

1) $\min\{x_1, ..., x_n\} \le f(x_1, ..., x_n) \le \max\{x_1, ..., x_n\}$, т. е. функция f «усредняет» любой набор из n неотрицательных чисел (**свойство усреднения Коши**);
2) $x_1 \le y_1, ..., x_n \le y_n \Rightarrow f(x_1, ..., x_n) \le f(y_1, ..., y_n)$, т. е. «большему» набору аргументов соответствует большее значение функции f (**свойство возрастания**);

3) при любой перестановке чисел $x_1, ..., x_n$ значение функции f не меняется (**свойство симметричности**);
4) $f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda f(x_1, \ldots, x_n)$ (**свойство однородности**).

В 1930 г. А.Н. Колмогоров доказал [153], что функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющая этим условиям, имеет вид

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_n)}{n}\right), \tag{3.4}$$

где φ — непрерывная строго монотонная функция, а φ^{-1} — функция, обратная к φ.

Функция f такого вида называется *средней по Колмогорову*. Она непрерывна и монотонна по каждому аргументу x_i.

Укажем два свойства средних по Колмогорову:

• как и ранее, среднее от одинаковых чисел равно их общему значению;

• некоторую группу значений можно заменить их собственным средним, не меняя общего среднего.

Отметим также несколько важных частных случаев функции φ. При $\varphi(x) = x$ получаем среднее арифметическое; при $\varphi(x) = \ln x$ — среднее геометрическое; при $\varphi(x) = x^{-1}$ — среднее гармоническое; при $\varphi(x) = x^2$ — среднее квадратическое; при $\varphi(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$ — среднее степенное.

Очевидно, что среднее по Колмогорову — частный случай среднего по Коши, от которого требовалось обладать только свойством усреднения. В частности, любые взвешенные средние нельзя представить в виде средних по Колмогорову, поскольку они не обладают свойством симметричности.

Отказавшись от требований симметричности и однородности, получаем следующее обобщение функции Колмогорова (3.4).

Определение 3 [147, 154]. Квазисреднее неотрицательных чисел x_1, ..., x_n есть величина вида:

$$M(x_1, ..., x_n) = f^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)\right], \text{ где } p_i > 0, \ i = 1, ..., n, \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

при условии, что функция f непрерывна и монотонна на промежутке, содержащем x_i.

В частности, при $f(x) = x$ получаем взвешенное среднее арифметическое, при $f(x) = \ln x$ — взвешенное среднее геометрическое, при $f = x^r$ — взвешенное среднее степенное.

Очевидно, что квазисредние включают и обычные средние (невзвешенные), если взять $p_i = 1/n$ для всех номеров i и те же функции: $f = \ln x$, $f = x^r$. Эти частные случаи квазисредних удовлетворяют всем условиям *сильного* определения средней величины.

Обозначим через F класс функций f_i, удовлетворяющих определению Коши. Он чрезвычайно широк и включает в себя как частные случаи средние по Колмогорову и квазисредние. Соображения, приводящие к выбору той или иной функции f_i, т. е. того или иного алгоритма оценивания, часто формулируются в виде некоторых эвристических принципов, таких как принцип голосования, принцип исключенного среднего, гипотеза компактности, принцип доверия большинству, принципы диагностики и коррекции, способ избыточных переменных и др.

В зависимости от вида функций f_i различают линейные, квазилинейные и нелинейные оценки. Ниже приводится несколько десятков функций $f_i \in F$ и соответствующих им алгоритмов оценивания, часть из которых совпадает со средними оценками, рассмотренными ранее.

3.2. Линейные и квазилинейные оценки

Линейные оценки

Линейные алгоритмы оценивания получаются при использовании функций f вида

$$\hat{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3. \tag{3.5}$$

Из условий (3.1) и (3.2) вытекает, что константы a_1, a_2, a_3 должны быть положительными и удовлетворять соотношению:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1. \tag{3.6}$$

Типичные представители оценок этого класса — среднее арифметическое (см. функцию f_3), а также взвешенное среднее арифметическое

$$f_4: \quad \hat{x} = \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2} \right)^{-1} \left(\frac{x_1}{\sigma_1^2} + \frac{x_2}{\sigma_2^2} + \frac{x_3}{\sigma_3^2} \right). \tag{3.7}$$

Полагая один или два из коэффициентов a_1, a_2, a_3 в формуле (3.5) равными нулю (или устремляя соответствующие дисперсии погрешностей в формуле (3.7) к бесконечности), получаем линейные оценки, не учитывающие отдельные измерения, например:

$$f_5: \quad \hat{x} = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 \right),$$

$$f_6: \quad \hat{x} = x_1,$$

$$f_7: \quad \hat{x} = \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_3^2} \right)^{-1} \left(\frac{x_1}{\sigma_1^2} + \frac{x_3}{\sigma_3^2} \right)$$

и другие.

Квазилинейные оценки

Если коэффициенты a_i в формуле (3.5) не постоянны, а зависят от значений измерения, то получаемые оценки (и функцию f_i) называют квазилинейными. Они имеют вид

$$\hat{x} = a_1\left(x_1, x_2, x_3\right) \cdot x_1 + a_2\left(x_1, x_2, x_3\right) \cdot x_2 + a_3\left(x_1, x_2, x_3\right) \cdot x_3, \tag{3.8}$$

причем по-прежнему при любых x_1, x_2, x_3 должно выполняться условие нормировки (3.6).

В частности, полагая $a_1 = \gamma x_1$, $a_2 = \gamma x_2$, $a_3 = \gamma x_3$, где γ — общий нормирующий множитель $\gamma = (x_1 + x_2 + x_3)^{-1}$, получаем квазилинейную квадратическую оценку

$$f_8: \qquad \hat{x} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1 + x_2 + x_3},$$

смещенную от среднего арифметического в сторону максимального измерения. Чтобы доказать последнее утверждение, вычтем из нее среднее арифметическое и убедимся в неотрицательности полученной разности

$$f_8 - f_3 = \frac{3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3)^2}{3(x_1 + x_2 + x_3)} =$$

$$= \frac{2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1 x_2 - 2x_1 x_3 - 2x_2 x_3}{3(x_1 + x_2 + x_3)} =$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2}{3(x_1 + x_2 + x_3)} \geq 0.$$

Другим примером может служить функция оценивания f_9, получаемая при $a_1 = \gamma x_2$, $a_2 = \gamma x_3$, $a_3 = \gamma x_1$

$$f_9: \qquad \hat{x} = \frac{x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3}{x_1 + x_2 + x_3}.$$

При неограниченном возрастании x_3 эта оценка, в отличие от предыдущей, остается конечной, никогда не превышая уровня $x_1 + x_2$. Покажем, что она всегда меньше среднего арифметического, для чего рассмотрим разность $(f_9 - f_3)$:

$$f_9 - f_3 = \frac{3(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3) - (x_1 + x_2 + x_3)^2}{3(x_1 + x_2 + x_3)} =$$

$$= -\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3}{3(x_1 + x_2 + x_3)} = -\frac{1}{2}\left(f_8 - f_3\right) \le 0.$$

Графики функций оценивания f_8 и f_9 показаны на рис. 3.3. Они лежат по разные стороны от пунктирной линии, соответствующей средней арифметической оценке.

Из них наглядно видно, что оценка f_8 предпочтительнее при грубых ошибках (промахах, сбоях), уменьшающих одно из значений измерения (типа пропадания сигнала), а оценка f_9 — при возрастании одного из значений измерений (ошибки высокого уровня).

Следующий важный пример квазилинейной оценки получаем, полагая

$$a_1 = \gamma \frac{1}{x_1},\ a_2 = \gamma \frac{1}{x_2},\ a_3 = \gamma \frac{1}{x_3},$$

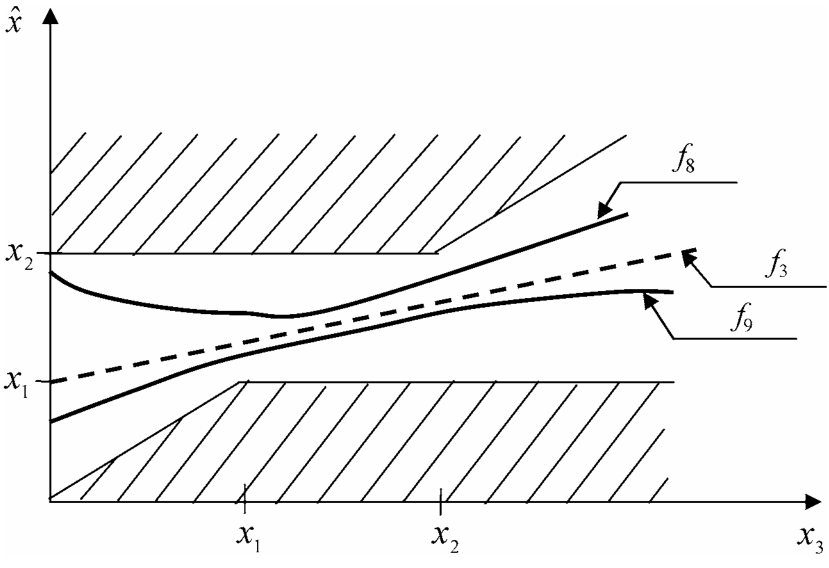


Рис. 3.3. Графики функций оценивания f_8 и f_9 относительно среднего арифметического f_3

где множитель γ по-прежнему выбирается из условия нормировки (3.6):

$$f_{10}: \qquad \hat{x} = \frac{3}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}} = \frac{3x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}.$$

Это — среднее гармоническое трех значений измерений. Оно мало чувствительно к ошибкам высокого уровня, поскольку наибольшее значение измерений входит в оценку с наименьшим весом, а вес наименьшего измерения максимален. Если одно из значений измерений равно нулю, оценка также равна нулю.

График этой оценки приведен на рис. 3.4. Он лежит ниже пунктирной линии, соответствующей среднему арифметическому, поскольку при положительных значениях измерений разность

$$f_3 - f_{10} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) - 9x_1 x_2 x_3}{3(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)} =$$

$$= -\frac{x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2 - x_2 x_3^2 - 6x_1 x_2 x_3}{3(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)} =$$

$$= \frac{x_1(x_2 - x_3)^2 + x_2(x_1 - x_3)^2 + x_3(x_1 - x_2)^2}{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}$$

неотрицательна.

Оценки f_8 и f_{10} относятся к семейству оценок вида

$$f_{11}: \qquad \hat{x} = \frac{x_1^{k+1} + x_2^{k+1} + x_3^{k+1}}{x_1^k + x_2^k + x_3^k},$$

где k — любое действительное число.

Случаю $k = -1$ соответствует среднее гармоническое, при $k = 0$ получаем среднее арифметическое, при $k = 1$ — квазилинейную квадратическую оценку f_8. На рис. 3.4 показан также график оценочной функции, получаемой при $k = 3$:

$$f_{12}: \qquad \hat{x} = \frac{x_1^4 + x_2^4 + x_3^4}{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}.$$

Он лежит выше среднего арифметического и заключен между функцией f_8 и верхней границей допустимой области.

При увеличении k до бесконечности график функции f_{11} неограниченно приближается к верхней границе, а сама оценка f_{11} переходит в оценку $f_1 = \max(x_1, x_2, x_3)$. При $k \to -\infty$ график стремится к нижней границе допустимой области, а оценка f_{11} переходит в $f_2 = \min(x_1, x_2, x_3)$. Таким образом, оценки f_1 и f_2 могут рассматриваться как предельные случаи квазилинейных.

Выше рассмотрены квазилинейные оценки, коэффициенты a_i которых берутся пропорциональными различным степеням значений измерений.

Более общий характер имеют оценки вида:

$$\hat{x} = \frac{x_1\psi(x_1) + x_2\psi(x_2) + x_3\psi(x_3)}{\psi(x_1) + \psi(x_2) + \psi(x_3)},$$

где $\psi(x)$ — некоторая монотонная функция.

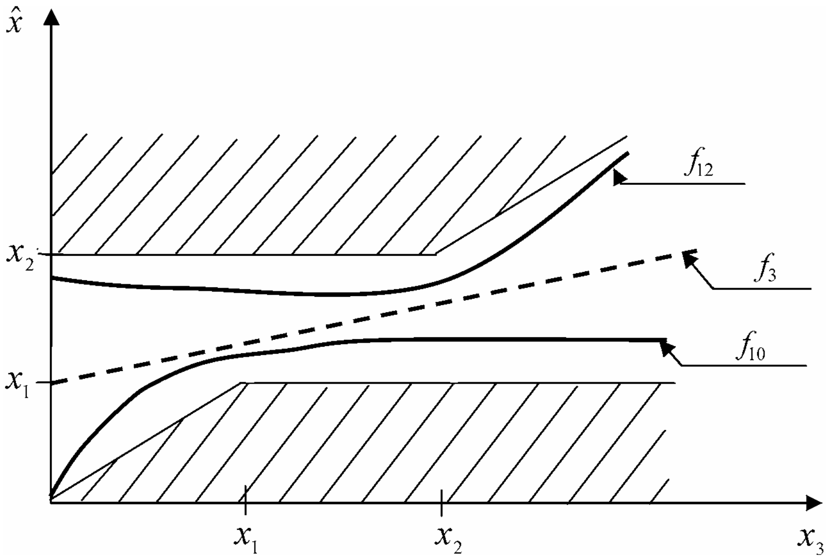


Рис. 3.4. Графики функций оценивания f_{10} и f_{12} относительно среднего арифметического f_3

Полагая, например, $\psi(x) = e^{ax}$, получаем оценку

$$f: \quad \hat{x} = \frac{x_1 \cdot e^{ax_1} + x_2 \cdot e^{ax_2} + x_3 \cdot e^{ax_3}}{e^{ax_1} + e^{ax_2} + e^{ax_3}},$$

графики которой для $a = 1$ и $a = -1$ приведены на рис. 3.5.

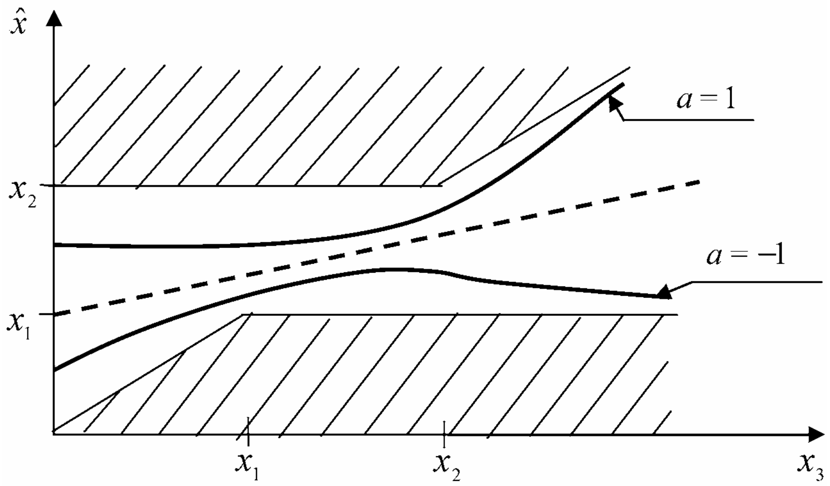


Рис. 3.5. Графики оценок для функций $\psi(x) = e^{ax}$ при $a = 1$ и $a = -1$

3.3. Разностные квазилинейные оценки

Отдельную группу образуют оценки, у которых коэффициенты a_i зависят от разностей $(x_i - x_j)$. Как отмечалось, алгоритмы с таким формированием весовых коэффициентов в основном носят эвристический характер. Среди них можно выделить оценки, предусматривающие отбраковку (отбрасывание) сомнительных результатов измерений (или учет их с малыми весами), а также оценки, строящиеся на основе осреднения ближайших друг к другу значений измерений. Рассмотрим два алгоритма такого рода.

Алгоритм осреднения двух ближайших значений измерений состоит в том, что из трех разностей $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3$, $x_2 - x_3$ выбирается наименьшая по модулю и в качестве оценки принимается среднее арифметическое измерений, входящих в нее:

$$f_{13}: \quad \hat{x} = \frac{x_i + x_j}{2}, \quad \text{если} \quad \left| x_i - x_j \right| = \min\left(\left| x_1 - x_2 \right|, \left| x_1 - x_3 \right|, \left| x_2 - x_3 \right| \right).$$

Такая оценка является квазилинейной и удовлетворяет условию (3.6), причем два из коэффициентов a_1, a_2, a_3 равны 1/2, а третий равен нулю (его индекс заранее неизвестен и зависит от разностей значений измерений). График этой оценки, показанный на рис. 3.6, имеет «релейный» характер (содержит разрывы первого рода).

Горизонтальные участки на рис. 3.6, *а* в его начальной и конечной частях говорят о нечувствительности алгоритма к однократным ошибкам высокого уровня. Еще отчетливей это видно из графика для функции чувствительности (производной от оценки), приведенного на рис. 3.6, *б*. Заметим, что аналогичные графики для функций чувствительности можно построить для каждой из приведенных оценок.

Близкий по идее принцип доверия двум ближайшим значениям измерений реализуется квазилинейной оценкой, коэффициенты которой следующим образом зависят от разности значений измерений:

$$a_1 = \gamma (x_2 - x_3)^2; \quad a_2 = \gamma (x_1 - x_3)^2; \quad a_3 = \gamma (x_1 - x_2)^2.$$

Такой выбор весовых коэффициентов усиливает влияние среднего значения измерений и ослабляет остальные пропорционально удалению от него. Находя нормирующий множитель γ из условия (3.6) и подставляя коэффициенты a_1, a_2, a_3 в выражение (3.8), получаем

$$f_{14}: \quad \hat{x} = \frac{x_1 (x_2 - x_3)^2 + x_2 (x_1 - x_3)^2 + x_3 (x_1 - x_2)^2}{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2}.$$

Особенностью этой оценки является ее нечувствительность к однократным ошибкам (сбоям) высокого уровня при аналитическом характере функции оценивания. Ее график, представленный на рис. 3.7, *а*, напоминает график предыдущей оценки, но не имеет разрывов.

Особенностью этой оценки является ее нечувствительность к однократным ошибкам (сбоям) высокого уровня при аналитическом характере функции оценивания. Ее график, представленный на рис. 3.7, *а*, напоминает график предыдущей оценки, но не имеет разрывов.

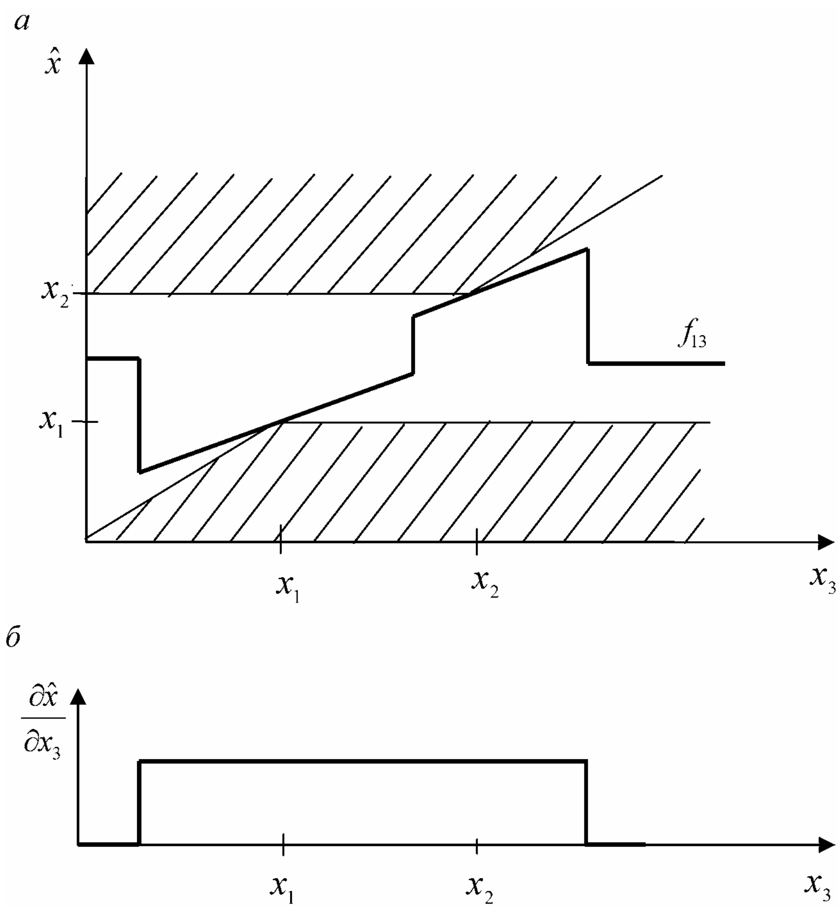


Рис. 3.6. Графики оценки f_{13}

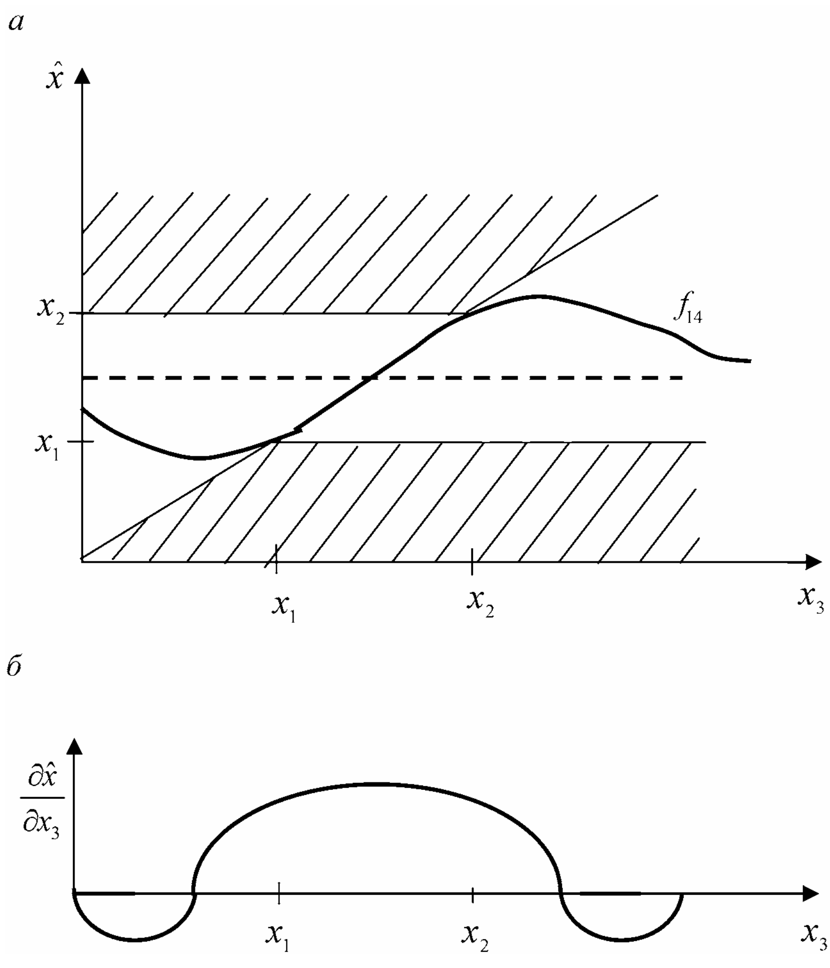


Рис. 3.7. Графики оценки f_{14}

Отметим, что оба графика касаются заштрихованной зоны в угловых точках и имеют горизонтальную асимптоту $\hat{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Первый из этих фактов означает, что при равенстве двух значений измерений оценка совпадает с ними (т. к. весовой коэффициент a_i при третьем измерении оказывается нулевым). Второй факт говорит о том, что при неограниченном возрастании одного из значений измерений оценка становится равной среднему арифметическому двух других.

Участок графика между точками касания с заштрихованной областью близок к прямой с наклоном 45°. Отсюда вытекает близость оценки на этом интервале к выборочной медиане, график которой для f_{16} приводится на рис. 3.8 (см. ниже).

График функции чувствительности (рис. 3.7, *б*) также имеет определенное сходство с графиком на рис. 3.6, *б*. Однако, в отличие от последнего, он не содержит разрывов и плавно стремится к нулю при возрастании одного из значений измерений.

Сопоставление квазилинейного алгоритма f_{14} с линейными оценками позволяет установить его определенное сходство с оценкой взвешенного среднего арифметического f_4. Оно становится особенно заметным, если переписать выражение для f_{14} в виде

$$\hat{x} = \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_1^2} + \frac{1}{\hat{\sigma}_2^2} + \frac{1}{\hat{\sigma}_3^2} \right)^{-1} \left(\frac{x_1}{\hat{\sigma}_1^2} + \frac{x_2}{\hat{\sigma}_2^2} + \frac{x_3}{\hat{\sigma}_3^2} \right), \tag{3.9}$$

где

$$\hat{\sigma}_1 = |x_1 - x_2||x_1 - x_3|; \ \hat{\sigma}_2 = |x_2 - x_1||x_2 - x_3|; \ \hat{\sigma}_3 = |x_3 - x_1||x_3 - x_2|. \tag{3.10}$$

Каждая из величин $\hat{\sigma}_i^2$ характеризует удаление i-го значения измерений от двух других и может рассматриваться как эмпирическая оценка его дисперсии. Такое представление f_{14} позволяет, во-первых, установить вид критерия, минимизируемого данным алгоритмом, и, во-вторых, указать путь его обобщения на случай большего числа измерений.

Искомый критерий получаем, подставляя выражение (3.9) в формулу взвешенного среднего квадратического критерия (2.11) вместо величин σ_i:

$$J = \frac{1}{\hat{\sigma}_1^2}(x_1 - \hat{x})^2 + \frac{1}{\hat{\sigma}_2^2}(x_2 - \hat{x})^2 + \frac{1}{\hat{\sigma}_3^2}(x_3 - \hat{x})^2.$$

Для нахождения экстремума этого критерия приравняем нулю его производную по $\hat{x}$:

$$\frac{2}{\hat{\sigma}_1^2}\left(x_1 - \hat{x}\right) + \frac{2}{\hat{\sigma}_2^2}\left(x_2 - \hat{x}\right) + \frac{2}{\hat{\sigma}_3^2}\left(x_3 - \hat{x}\right) = 0,$$

откуда

$$\hat{x}\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_1^2} + \frac{1}{\hat{\sigma}_2^2} + \frac{1}{\hat{\sigma}_3^2}\right) = \frac{x_1}{\hat{\sigma}_1^2} + \frac{x_2}{\hat{\sigma}_2^2} + \frac{x_3}{\hat{\sigma}_3^2},$$

что непосредственно приводит к формуле (3.9).

Для распространения оценки f_{14} на произвольное число измерений $n > 3$ воспользуемся формулой (3.9), переписав ее в форме

$$\hat{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\hat{\sigma}_i^2}\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\hat{\sigma}_i^2},$$

где выражения для эмпирических оценок дисперсий $\hat{\sigma}_i^2$ запишем по аналогии с (3.10):

$$\hat{\sigma}_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|x_i - x_j\right|, \qquad i = \overline{1,\, n}.$$

Обобщением функции f_{14} на произвольные степени разностей является оценка

$$f_{15}: \qquad \hat{x} = \frac{x_1\left|x_2 - x_3\right|^k + x_2\left|x_1 - x_3\right|^k + x_3\left|x_1 - x_2\right|^k}{\left|x_1 - x_2\right|^k + \left|x_1 - x_3\right|^k + \left|x_2 - x_3\right|^k},$$

где k — любое вещественное число.

Интересно, что оценка, получаемая при $k = 1$ (предложенная М.И. Бимом):

$$f_{16}: \qquad \hat{x} = \frac{x_1\left|x_2 - x_3\right| + x_2\left|x_1 - x_3\right| + x_3\left|x_1 - x_2\right|}{\left|x_1 - x_2\right| + \left|x_1 - x_3\right| + \left|x_2 - x_3\right|},$$

совпадает с функцией выборочной медианы. Действительно, при любых значениях измерений знаменатель данного выражения равен $2l$ — удвоенной длине отрезка оси x, содержащего значения измерений x_1, x_2, x_3. Чтобы оценить числитель, обозначим через x_1', x_2', x_3' минимальное, среднее и максимальное из измерений x_1, x_2, x_3.

Раскрывая скобки, получаем

$$x_1'(x_3' - x_2') + x_2'(x_3' - x_1') + x_3'(x_2' - x_1') = 2x_2'(x_3' - x_1') = 2x_2'l.$$

Отсюда вытекает иное выражение для той же оценки:

$$f_{16}': \qquad \hat{x} = \frac{2x_2'l}{2l} = x_2' = \mathrm{med}(x_1,\ x_2, x_3).$$

Графики этой оценки и ее функции чувствительности показаны на рис. 3.8. Они имеют несомненное сходство с аналогичными кривыми на рис. 3.7, особенно в средней его части.

а

б

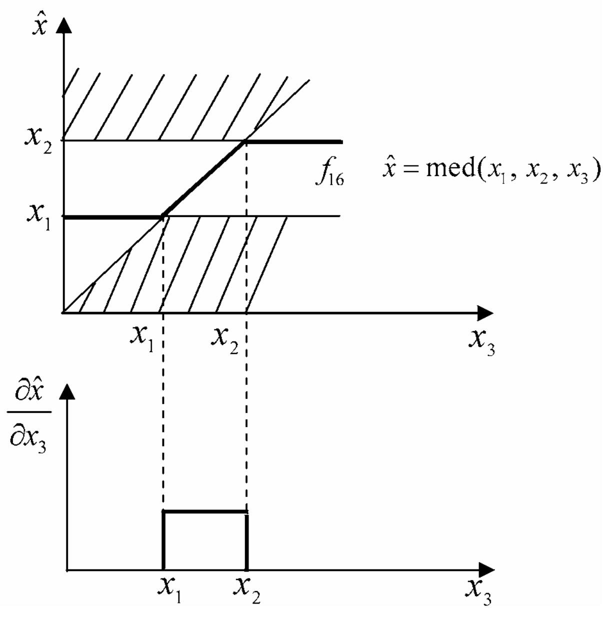


Рис. 3.8. Графики оценки f_{16}

Сопоставление рис. 3.6, 3.7 и 3.8 позволяет сделать вывод о том, что оценка f_{14} (принцип доверия большинству) занимает промежуточное положение между оценками f_{13} (принцип осреднения двух ближайших) и f_{16} (принцип отбрасывания крайних).

Отметим, что возможность записи функции выборочной медианы f'_{16} в виде f_{16} любопытна, по крайней мере, с двух точек зрения. Во-первых, этим устанавливается принадлежность выборочной медианы к классу квазилинейных оценок с коэффициентами, зависящими от разности значений измерений. Во-вторых, из записи уравнения для f_{16} вытекает новый алгоритм вычисления медианы, не использующий операции сравнения.

Дальнейший анализ оценки f_{15} показывает, что при увеличении параметра k ($k = 3, 4, ...$) абсциссы экстремальных точек характеристики (рис. 3.7) удаляются от точек x_1, x_2, а ординаты этих точек приближаются к уровням x_1 и x_2 соответственно. При $k \to \infty$ характеристика принимает вид, показанный на рис. 3.8, т. е. оценка f_{15} вновь переходит в оценку выборочной медианы:

$$\lim_{k\to\infty} f_{15}(k) = f_{15}(\infty) = \mathrm{med}(x_1,\ x_2,\ x_3).$$

При отрицательных значениях параметра k оценочная функция f_{15} начинает осуществлять принцип «недоверия большинству» (принцип «нонконформизма»), который при $k \to -\infty$ переходит в принцип отбрасывания двух ближайших значений измерений. В частности, при $k = -1$ оценка имеет вид

$$f_{17}: \quad \hat{x} = \left(\frac{1}{|x_3 - x_1|} + \frac{1}{|x_3 - x_2|} + \frac{1}{|x_2 - x_1|} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\frac{x_1}{|x_3 - x_1|} + \frac{x_2}{|x_3 - x_2|} + \frac{x_3}{|x_2 - x_1|} \right).$$

Заметим, что в соответствии с этой формулой при совпадении двух значений измерений они отбрасываются, и в качестве оценки принимается третье измерение.

При $k \to \infty$ получаем следующую оценку:

$$f_{18}: \quad \hat{x} = L''(x_1, x_2, x_3),$$

где оператор L'' осуществляет отбрасывание двух ближайших значений измерений:

$$L''(x_1, x_2, x_3) = x_k, \quad \text{если} \quad \left|x_i - x_j\right| = \min\left(\left|x_1 - x_2\right|, \left|x_1 - x_3\right|, \left|x_2 - x_3\right|\right),$$

т. е. из трех индексов i, j, k выбирается не принадлежащий ближайшей паре значений измерений.

Графики функций f_{17} и f_{18} изображены на рис. 3.9, причем второй из них целиком лежит на границах допустимой области.

В приведенных квазилинейных оценках коэффициенты a_i брались пропорциональными различным степеням от разностей $(x_i - x_j)$.

Более широкий класс образуют оценки вида

$$\hat{x} = \frac{x_1\psi(x_2 - x_3) + x_2\psi(x_1 - x_3) + x_3\psi(x_1 - x_2)}{\psi(x_2 - x_3) + \psi(x_1 - x_3) + \psi(x_1 - x_2)},$$

где $\psi(x)$ — некоторая функция. Полагая, например, $\psi(x) = e^{|x|}$, получаем разностную квазилинейную оценку

$$f: \quad \hat{x} = \frac{x_1 e^{|x_2 - x_3|} + x_2 e^{|x_1 - x_3|} + x_3 e^{|x_1 - x_2|}}{e^{|x_2 - x_3|} + e^{|x_1 - x_3|} + e^{|x_1 - x_2|}},$$

которая реализует один из вариантов принципа доверия большинству. В вычислительном плане она несколько сложнее оценки f_{14}, однако в ней не возникает проблемы деления на нуль при совпадении значений измерений.

Возможен и другой выбор функции $\psi(x)$, например $\psi(x) = e^{\frac{1}{|x|}}$, $\psi(x) = e^{ax}$ и т. д.

Таким образом, эвристический подход позволяет конструировать неограниченное число различных оценок, удовлетворяющих дополнительным требованиям и обладающим умеренной вычислительной сложностью. Теоретический анализ получаемых алгоритмов оценивания позволяет исследовать их особенности и выяснить условия их применимости.

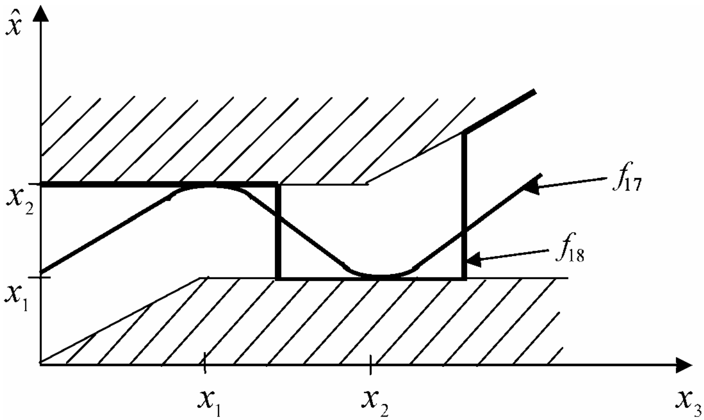


Рис. 3.9. Графики функций оценки f_{17} и f_{18}

ГЛАВА IV. ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ОЦЕНОК

Ряд алгоритмов оценивания можно получить, используя принципы и методы технической диагностики, в первую очередь — идеи функционального диагностирования в системах с алгебраическими инвариантами и метод избыточных переменных (МИП).

Напомним, что согласно [76] системами с алгебраическими инвариантами называются системы, выходные сигналы x_1, ..., x_n которых удовлетворяют хотя бы одному алгебраическому соотношению вида

$$\Delta = M(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

причем при отсутствии ошибок это соотношение должно выполняться для любых входных сигналов и в любой момент времени.

В рассматриваемом случае исследуемая система описывается уравнениями (1.1):

$$\begin{aligned} x_1 &= x + e_1, \\ x_2 &= x + e_2, \\ x_3 &= x + e_3, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где роль входного сигнала играет неизвестная измеряемая величина x, а роль выходных сигналов — значения измерений x_1, x_2, x_3. При отсутствии погрешностей (промахов, ошибок, сбоев) e_i выходные сигналы этой системы удовлетворяют двум независимым линейным алгебраическим соотношениям (алгебраическим инвариантам)

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= x_1 - x_2 = 0, \\ \Delta_2 &= x_1 - x_3 = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Последние уравнения удобно записать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad (4.3)$$

или короче:

$$\Delta = MX = 0.$$

В реальных условиях погрешности (ошибки) $e_i \neq 0$, поэтому вектор рассогласований $\Delta = Me$, где $e = \left[e_1, e_2, e_3\right]^T$, будет также отличен от нуля. Для повышения точности и достоверности результата измерений естественно попытаться использовать информацию о неизвестных погрешностях e_1, e_2, e_3, содержащуюся в векторе Δ. В рамках МИП исследованы два подхода к использованию такой информации:

– коррекция значений измерений, содержащих малые погрешности (ошибки);

– обнаружение, локализация и отбраковка (исключение, «отбрасывание») недостоверных значений измерений, содержащих погрешности (ошибки) высокого уровня.

Изложение соответствующих результатов для динамических систем с произвольными алгебраическими инвариантами имеется в работах [76, 77, 113 и др.]. Ниже дается конкретизация их для системы, описываемой уравнениями (4.1) и (4.2).

4.1. Использование метода избыточных переменных для повышения точности оценивания

Предположим, что погрешности (ошибки) e_i имеют малые значения (лежат в «допуске») и вероятностью появления недостоверных измерений (отказов датчиков) можно пренебречь. Тогда для повышения точности оценивания можно использовать принцип коррекции ошибок, применяемый в МИП. В данном случае он сводится к следующему.

Подставив в соотношение (4.2) реальные значения сигналов x_i из (4.1), получаем

$$\Delta_1 = e_1 - e_2, \qquad \Delta_2 = e_1 - e_3$$

или

$$\Delta = Me. \tag{4.4}$$

Таким образом, сигнал Δ несет информацию о векторе погрешностей (ошибок) e, содержащихся в значениях измерений. Идея коррекции состоит в том, чтобы вычесть из вектора значений измерений X оценку $\hat{e}$ (корректирующую поправку). Простейшая оценка $\hat{e}$ получается псевдообращением системы (4.4):

$$\hat{e} = \mathrm{M}^{+}\Delta = \mathrm{M}^{T}(\mathrm{M}\mathrm{M}^{T})^{-1}\Delta. \tag{4.5}$$

Выполняя вычисления для $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, находим псевдообратную матрицу

$$\mathrm{M}^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, скорректированный вектор значений измерений определяется выражением

$$\hat{X} = X - \hat{e} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}$$

или в скалярной записи

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= x_1 - \frac{1}{3}(\Delta_1 + \Delta_2), \\ \hat{x}_2 &= x_2 + \frac{1}{3}(2\Delta_1 - \Delta_2), \\ \hat{x}_3 &= x_3 - \frac{1}{3}(\Delta_1 - 2\Delta_2). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Подставляя сюда x_i из (4.1) и Δ_i из (4.2), получим

$$\hat{x}_1 = x + \frac{1}{3}\left(e_1 + e_2 + e_3\right),$$
$$\hat{x}_2 = x + \frac{1}{3}\left(e_1 + e_2 + e_3\right),$$
$$\hat{x}_3 = x + \frac{1}{3}\left(e_1 + e_2 + e_3\right).$$

Таким образом, перераспределение погрешностей (ошибок) в результате коррекции привело к тому, что значения $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ стали одинаковыми. Поэтому любое из них может быть взято за искомую оценку, т. е. результирующий алгоритм оценивания можно записать в виде

$$f_{19}: \quad \hat{x} = x_1 - \frac{1}{3}\left(\Delta_1 + \Delta_2\right), \qquad \Delta_1 = x_1 - x_2, \quad \Delta_2 = x_1 - x_3.$$

Оценка, получаемая по этому алгоритму, совпадает со средним арифметическим, в чем можно убедиться подстановкой в оценочную функцию двух последних уравнений. Это объясняется тем, что коррекция на основе псевдообращения эквивалентна применению метода наименьших квадратов, который, как известно, приводит к средней арифметической оценке.

Если погрешности (ошибки) e_i независимы и имеют одинаковые дисперсии, то такая коррекция является оптимальной, обеспечивая уменьшение дисперсии ошибок в 3 раза. Если измерения неравноточные и известна корреляционная матрица погрешностей (ошибок) $R = M\{e \cdot e^T\}$, то минимальной дисперсией обладает оценка, получаемая в соответствии с алгоритмом:

$$f_{20}: \quad \hat{x} = x_1 - RM^T (MRM^T)^{-1} \Delta,$$

где вектор Δ определяется соотношением (4.3).

Можно показать, что эта оценка совпадает с описанной ранее *марковской* оценкой.

Возможны и другие варианты линейных, а также нелинейных алгоритмов коррекции. Линейный алгоритм коррекции имеет вид

$$\hat{X} = X - K\Delta, \qquad \Delta = MX, \tag{4.7}$$

где K — прямоугольная матрица размерностью (3×2). Она выбирается таким образом, чтобы скорректированный вектор измерения $\hat{X}$ обращал в нуль алгебраические инварианты (4.3):

$$M\hat{X} = M(X - K\Delta) = (M - MKM)X = 0.$$

Отсюда получаем, что матрица K должна удовлетворять матричному уравнению

$$MK = E \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \\ k_{31} & k_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Оно означает, что 2 из 6 элементов k_{ij} могут выбираться произвольно. Обозначая $k_{11} = a$, $k_{12} = b$, можно представить матрицу K в виде

$$K = \begin{bmatrix} a & b \\ a-1 & b \\ a & b-1 \end{bmatrix},$$

где элементы a, b — любые постоянные или переменные коэффициенты. Например, полагая $a = b = 1/3$, получаем уравнение (1.4), которому соответствует оценка по критерию f_{19}. Подстановка этой матрицы в формулу (4.7) дает

$$\hat{X} = \left(E - KM\right)X = \begin{bmatrix} 1-a-b & a & b \\ 1-a-b & a & b \\ 1-a-b & a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, при любой матрице K, удовлетворяющей условию (4.8), алгоритм коррекции (4.7) приводит к получению вектора $\hat{X}$ с равными компонентами $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}_3$. Отсюда оценочная функция на основе алгоритма коррекции (4.7) имеет вид

$$f_{21}: \quad \hat{x} = \left(1 - a - b\right) x_1 + a x_2 + b x_3.$$

Эта оценочная функция задает совокупность оценок, которые получаются при различных значениях a и b. Полагая, например, $a = b = 1$, получаем оценку

$$f_{22}: \quad \hat{x} = -x_1 + x_2 + x_3.$$

Такая и подобные ей оценки могут использоваться лишь при близких значениях измерений, что, впрочем, соответствует допущению, принятому в начале данного подраздела. Они удовлетворяют условию (3.1), но при больших разбросах измерений могут не удовлетворять условию (3.4).

4.2. Применение алгоритмов диагностики для отбраковки части измерений

Обратимся теперь к ситуации, когда наряду с малыми погрешностями возможны однократные ошибки высокого уровня, к которым могут приводить, например, отказы или сбои датчиков. С точки зрения технической диагностики, в такой ситуации целесообразно определить номер недостоверного значения измерения и «отбросить» его, сформировав оценку по двум оставшимся значениям.

Такой подход позволяет построить целую группу оценок, отличающихся алгоритмом диагностики, используемым для определения индекса значения недостоверного измерения, а также способом формирования оценки по оставшимся значениям. Дадим описание некоторых оценок, разработанных в рамках метода избыточных переменных и систем с алгебраическими инвариантами.

4.2.1. Отбраковка одного измерения по минимальному рассогласованию

В теории систем с алгебраическими инвариантами доказано, что для диагностики однократных ошибок необходимо иметь два независимых алгебраических инварианта, которые в линейном случае можно записать в виде:

$$\Delta = MX = 0,$$

где M — прямоугольная матрица, имеющая две строки.

От исходных алгебраических инвариантов путем их линейного комбинирования перейдем к системе зависимых инвариантов

$$\bar{\Delta} = \bar{M}X = 0, \tag{4.9}$$

где $\bar{M}$ — квадратная матрица с нулевой диагональю.

Для системы (4.1) и алгебраических инвариантов (4.3) уравнение (4.9) будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Подставляя $x_i = x + e_i, \quad i = \overline{1,3},$ получаем

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}.$$

Если одна из погрешностей e_i будет значительно больше других, это приведет к существенному отклонению всех компонент вектора рассогласований, кроме одной, в которую она входит с нулевым коэффициентом. Это обстоятельство позволяет определить индекс недостоверного значения измерений и отбраковать его.

Таким образом, алгоритм диагностики состоит в том, что из трех значений измерений x_1, x_2, x_3 отбрасывается только одно, индекс которого совпадает с индексом минимальной из величин $|\Delta_1|$, $|\Delta_2|$, $|\Delta_3|$. Оценка формируется по двум оставшимся значениям измерений (назовем их x_1', x_2'), например, путем вычисления их среднего арифметического, среднего геометрического и т. п.

Описанный переход от значений измерений x_1, x_2, x_3 к значениям x_1', x_2' можно формально представить в виде

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = L_m' \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

где оператор отбраковки по минимальному рассогласованию L'_m задается (2×3) матрицей, в каждой строке которой один элемент равен единице, а остальные — нулю. Например, матрица отбраковки первого измерения имеет вид

$$L'_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Используя разные способы оценивания оставшихся значений измерений, можно получить следующие оценки:

$$\left.\begin{aligned}
f_{23}:&\quad \hat{x} = \frac{1}{2}\left(x'_1 + x'_2\right)\\
f_{24}:&\quad \hat{x} = \sqrt{x'_1 \cdot x'_2}\\
f_{25}:&\quad \hat{x} = 2\left(\frac{1}{x'_1} + \frac{1}{x'_2}\right)^{-1}\\
f_{26}:&\quad \hat{x} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(x_1'^2 + x_2'^2\right)}\\
f_{27}:&\quad \hat{x} = \frac{x_1'^2 + x_2'^2}{x'_1 + x'_2}
\end{aligned}\right\}, \qquad \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = L'_m \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

4.2.2. Отбраковка одного измерения по максимальному рассогласованию

Идея этого алгоритма состоит в получении оценки вектора погрешностей (ошибок) на основе анализа рассогласований алгебраических инвариантов и отбраковки значения измерений, обладающего максимальной оценкой погрешности.

Оптимальная в смысле метода наименьших квадратов оценка вектора погрешностей (ошибок) дается формулой (4.5)

$$\hat{e} = M^{+}\Delta = M^{T}(MM^{T})^{-1}MX,$$

откуда для матрицы M^{+} получаем

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

Из трех значений измерений x_1, x_2, x_3 будем отбрасывать то, индекс которого совпадает с индексом максимальной из величин $|\hat{e}_1|, |\hat{e}_2|, |\hat{e}_3|$. Обозначая, как и прежде, оставшиеся значения измерений через x_1', x_2', можно записать

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = L_M' \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

где L_M' — оператор отбраковки по максимальной оценке погрешности (ошибки), подобный оператору L_m'.

Так же, как и выше, в зависимости от способа оценивания оставшихся значений измерений можно получить различные оценки:

$$\left.\begin{aligned} f_{28}: &\quad \hat{x} = \frac{1}{2}\left(x_1' + x_2'\right) \\ f_{29}: &\quad \hat{x} = \sqrt{x_1' \cdot x_2'} \\ f_{30}: &\quad \hat{x} = 2\left(\frac{1}{x_1'} + \frac{1}{x_2'}\right)^{-1} \\ f_{31}: &\quad \hat{x} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(x_1'^2 + x_2'^2\right)} \\ f_{32}: &\quad \hat{x} = \left(x_1' + x_2'\right)^{-1}\left(x_1'^2 + x_2'^2\right) \end{aligned}\right\}, \qquad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = L_M' \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Кроме обработки измерений с помощью операторов L_M' и L_m', известно много других способов отбраковки. Можно, например, считать недостоверным и отбрасывать значение измерений, наиболее удаленное от среднего арифметического трех значений, от их среднего геометрического или от любой другой оценки из числа приведенных ранее. После этого два оставшихся значения измерений оцениваются одним из известных способов.

4.2.3. Оценки с отбраковкой двух значений измерений

Отдельный класс образуют алгоритмы оценивания, использующие отбрасывание (исключение, отбраковку) двух значений измерений из трех. Они позволяют «парировать» не только однократные, но и некоторые двукратные отказы. Согласно этим алгоритмам в качестве оценки берется одно из значений измерений, а два других в оценке в явном виде не присутствуют. Это, конечно, не означает, что они не влияют на формирование оценки, поскольку ее выбор зависит от соотношения всех трех значений измерений.

Классическими примерами алгоритмов с отбраковкой двух значений измерений являются алгоритмы

$$\hat{x} = \max(x_1, x_2, x_3),$$
$$\hat{x} = \min(x_1, x_2, x_3),$$
$$\hat{x} = \operatorname{med}(x_1, x_2, x_3),$$

использующие в качестве оценки максимальное, минимальное или среднее по значению измерение. Возможны и другие варианты, когда, например, за оценку берется значение измерений, ближайшее к среднему арифметическому, среднему геометрическому или к любой другой средней оценке.

Опишем два алгоритма оценивания такого рода, опирающиеся на приведенные выше диагностические процедуры.

Первый из них состоит в том, что вычисляется вектор рассогласований (4.10) и из трех значений измерений x_1, x_2, x_3 отбрасываются два, индексы которых совпадают с индексами рассогласований, имеющих меньшую абсолютную величину. Тем самым, в качестве оценки берется измерение, которому соответствует наибольшее из рассогласований $|\Delta_1|$, $|\Delta_2|$, $|\Delta_3|$. Обозначая оператор отбраковки, определенный таким образом, через L''_m (число штрихов указывает на число отбрасываемых измерений), можем записать

$$f_{33}: \qquad \hat{x} = L''_m(x_1, x_2, x_3).$$

Согласно второму алгоритму отбраковываются два значения измерений, для которых оценка погрешностей (ошибок), полученных по формуле (4.11), имеет наибольшую абсолютную величину. Тем самым в качестве оценки берется измерение с минимальной оценкой погрешности (ошибки). Обозначая соответствующий оператор также через L''_M, можем записать

$$f_{34}: \qquad \hat{x} = L''_M(x_1, x_2, x_3).$$

4.3. Систематизация и анализ алгоритмов оценивания

4.3.1. Систематизация алгоритмов оценивания

Выше приведено описание большого числа алгоритмов оценивания скалярной величины x по значениям трех ее измерений x_1, x_2, x_3. С целью систематизации этих алгоритмов, полученных на основе четырех подходов — вероятностного, детерминированного, эвристического и диагностического — большая часть из них сведены в табл. 4.1. Таблица содержит более 70 алгоритмов, разбитых на отдельные группы.

При составлении таблицы предпочтение отдавалось беспороговым алгоритмам, симметричным по отношению к значениям измерений и не требующим априорной информации вероятностного или статистического характера, хотя в некоторых случаях и допущены отступления от этого.

Табл. 4.1 может служить исходным материалом для анализа алгоритмов и сопоставления их по различным признакам. К числу последних относятся: характер алгоритма и способ его задания, удобство технической реализации, точность и надежность получаемой оценки и др. Остановимся вкратце на каждом из перечисленных признаков.

4.3.2. Анализ алгоритмов оценивания

Характер алгоритма

По виду оценок алгоритмы, включенные в таблицу, разбиты на 9 групп — классические средние, линейные и квазилинейные оценки, разностные и нелинейные оценки, алгоритмы, задаваемые критериями, оценки с отбраковкой одного или двух значений измерений, суперпозиции или комбинации оценок. В последней группе приведена лишь одна из неограниченно большого числа возможных суперпозиций. Другими примерами могут служить средние арифметические всех оценок, входящих в табл. 4.1, их средние геометрические, выборочные медианы и т. д.

При классификации алгоритмов часто используют и другие их характеристики. В частности, различают пороговые и беспороговые алгоритмы, инерционные и безынерционные, симметричные и несимметричные и т. п.

Таблица 4.1

Алгоритмы оценивания скалярной величины по трем измерениям

№ п.п.	Оценка или критерий	Примечания
	Классические средние	
1	$1/3(x_1 + x_2 + x_3)$	Среднее арифметическое
2	$\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$	Среднее геометрическое
3	$3\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)^{-1}$	Среднее гармоническое
4	$\sqrt{\frac{1}{3}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)}$	Среднее квадратическое
	Линейные оценки $\hat{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$; $\sum_{i=1}^{3} a_i = 1$	
5	$\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2}\right)^{-1} \left(\frac{x_1}{\sigma_1^2} + \frac{x_2}{\sigma_2^2} + \frac{x_3}{\sigma_3^2}\right)$	Взвешенное среднее арифметическое
6	$\left([1\ 1\ 1] N^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} [1\ 1\ 1] N^{-1} [x_1\ x_2\ x_3]^T$	Марковская оценка

Продолжение табл. 4.1

№ п.п.	Оценка или критерий	Примечания
7	$-x_1 + x_2 + x_3$	Варианты коррекции по МИП: $\Delta = MX,\ M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
8	$(1-a-b)x_1 + a\,x_2 + b\,x_3$	
9	$x_1 - RM^T(MRM^T)^{-1}M\Delta$	
Квазилинейные оценки		
10	$\dfrac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3}{x_1 + x_2 + x_3}$	
11	$\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1 + x_2 + x_3}$	
12	$\dfrac{x_1^4 + x_2^4 + x_3^4}{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}$	
13	$\dfrac{x_1^{k+1} + x_2^{k+1} + x_3^{k+1}}{x_1^k + x_2^k + x_3^k}$	Значениям $k = 0$ и $k = 1$ соответствуют средние арифметические и средние гармонические оценки
14	$\dfrac{x_1e^{x_1} + x_2e^{x_2} + x_3e^{x_3}}{e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3}}$	

Продолжение табл. 4.1

№ п.п.	Оценка или критерий	Примечания
	Разностные квазилинейные оценки $a_i = a_i(x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_1 - x_3)$	
15	$\dfrac{\dfrac{x_1}{\lvert x_3 - x_2\rvert} + \dfrac{x_2}{\lvert x_3 - x_1\rvert} + \dfrac{x_3}{\lvert x_2 - x_1\rvert}}{\dfrac{1}{\lvert x_3 - x_2\rvert} + \dfrac{1}{\lvert x_3 - x_1\rvert} + \dfrac{1}{\lvert x_2 - x_1\rvert}}$	Принцип недоверия двум ближайшим значениям измерений
16	$\dfrac{x_1\lvert x_2 - x_3\rvert + x_2\lvert x_1 - x_3\rvert + x_3\lvert x_1 - x_2\rvert}{\lvert x_2 - x_3\rvert + \lvert x_1 - x_3\rvert + \lvert x_1 - x_2\rvert}$	Совпадает с выборочной медианой
17	$\dfrac{x_1(x_2 - x_3)^2 + x_2(x_1 - x_3)^2 + x_3(x_1 - x_2)^2}{(x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_2)^2}$	Принцип доверия двум ближайшим значениям измерений
18	$\dfrac{x_1\lvert x_2 - x_3\rvert^k + x_2\lvert x_1 - x_3\rvert^k + x_3\lvert x_1 - x_2\rvert^k}{\lvert x_2 - x_3\rvert^k + \lvert x_1 - x_3\rvert^k + \lvert x_1 - x_2\rvert^k}$	
19	$\dfrac{x_1 e^{\lvert x_2 - x_3\rvert} + x_2 e^{\lvert x_1 - x_3\rvert} + x_3 e^{\lvert x_1 - x_2\rvert}}{e^{\lvert x_2 - x_3\rvert} + e^{\lvert x_1 - x_3\rvert} + e^{\lvert x_1 - x_2\rvert}}$	

Продолжение табл. 4.1

№ п.п.	Оценка или критерий	Примечания
	Нелинейные оценки	
20	$\sqrt[k]{\frac{1}{3}\left(x_1^k + x_2^k + x_3^k\right)}$	Среднее степенное
21	$\sqrt[k]{\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}+\frac{1}{\sigma_3^2}\right)^{-1}\left(\frac{x_1^k}{\sigma_1^2}+\frac{x_2^k}{\sigma_2^2}+\frac{x_3^k}{\sigma_3^2}\right)}$	$\sigma_i = \prod_{i \neq j}(x_i - x_j),\ i, j = \overline{1,3}$
22	$\sqrt[3]{(x_1 - a)(x_2 + a)(x_3 + a)} - a$	Обобщение среднего геометрического
23	$\ln \frac{1}{3}\left(e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3}\right)$	
	Оценки, минимизирующие критерии вида $J = \rho(x_1 - \hat{x}) + \rho(x_2 - \hat{x}) + \rho(x_3 - \hat{x})$	
24	$\rho(x_i - \hat{x}) = \sqrt{\left(x_i - \hat{x}\right)^2 + a^2} - a$	
25	$\rho(x_i - \hat{x}) = \lvert x_i - \hat{x}\rvert + \left(x_i - \hat{x}\right)^2$	Комбинированный критерий
26	$\rho(x_i - \hat{x}) = \begin{cases} 0,5\left(x_i - \hat{x}\right)^2 & \text{при} \quad \lvert x_i - \hat{x}\rvert < a \\ a\lvert x_i - \hat{x}\rvert - 0,5a^2 & \text{при} \quad \lvert x_i - \hat{x}\rvert \geq a \end{cases}$	Составные критерии

Продолжение табл. 4.1

№ п.п.	Оценка или критерий	Примечания
Оценки, минимизирующие критерии вида $J = \rho(x_1 - \hat{x}) + \rho(x_2 - \hat{x}) + \rho(x_3 - \hat{x})$		
27	$\rho\ (\hat{x} - x_i) = \begin{cases} 0,5\left(x_i - \hat{x}\right)^2 & \text{при} \quad \lvert x_i - \hat{x}\rvert < a \\ 0,5a & \text{при} \quad \lvert x_i - \hat{x}\rvert \geq a \end{cases}$	Составные критерии
Оценки с отбраковкой двух значений измерений		
28	$\max(x_1, x_2, x_3)$	Выбор наибольшего
29	$\min(x_1, x_2, x_3)$	Выбор наименьшего
30	$\mathrm{med}(x_1, x_2, x_3)$	Выбор медианы
31	$L''\ (x_1, x_2, x_3)$	Отбрасывание двух ближайших
32	$L''_m\ (x_1, x_2, x_3)$	Отбраковка на основе алгоритмов диагностики МИП
33	$L''_M\ (x_1, x_2, x_3)$	
Оценки с отбраковкой одного значения измерений и осреднением остальных		
34–38	Отбрасывание $\max(x_1, x_2, x_3)$	Оставшиеся значения измерений x_1' и x_2' оцениваются по одной из формул: 1) $0,5(x_1' + x_2')$
39–43	Отбрасывание $\min(x_1, x_2, x_3)$	
44–48	Отбрасывание $\mathrm{med}(x_1, x_2, x_3)$	
49–53	Отбрасывание $L''\ (x_1, x_2, x_3)$	

Окончание табл. 4.1

№ п.п.	Оценка или критерий	Примечания
54–58	Отбрасывание $L''_m\ (x_1, x_2, x_3)$	2) $\sqrt{x'_1 x'_2}$
59–63	Отбрасывание $L''_M\ (x_1, x_2, x_3)$	3) $2\left(\frac{1}{x'_1}+\frac{1}{x'_2}\right)^{-1}$
64–68	$L'_m\ (x_1, x_2, x_3)$	4) $\sqrt{\frac{1}{2}(x'^2_1 + x'^2_2)}$
69–73	$L'_M\ (x_1, x_2, x_3)$	5) $\left(x'_1 + x'_2\right)^{-1}\left(x'^2_1 + x'^2_2\right)$
Суперпозиции или комбинации оценок		
74	$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\left(x_1+x_2+x_3\right)+\sqrt[3]{x_1x_2x_3}+ +3\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^{-1}+\sqrt{\frac{1}{3}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)}\right]$	Среднее арифметическое от четырех классических средних

Способ задания алгоритма

Для задания алгоритма оценивания можно указать функцию оценки *f*, ее производную f', минимизируемый критерий *J* либо его производную J'. Их, в свою очередь, можно задавать аналитически, графически, таблично или алгоритмически.

Таким образом, получаем около полутора десятков методов задания оценки. С точки зрения технической реализации, а также при анализе свойств оценок, может оказаться удобным любой из них.

К заданию алгоритма с помощью критерия приходится прибегать, когда аналитическое описание функции оценивания слишком сложно или вообще не существует. Однако и в тех случаях, когда оно известно, бывает полезно установить вид критерия для анализа таких свойств получаемой оценки, как ее чувствительность, точность и надежность.

Для геометрической интерпретации критериев используют четыре вида графиков. Два из них — это графики зависимостей критерия и его производной от варьируемой переменной *x*. Искомой оценкой является точка $x = \hat{x}$, в которой график $J(x)$ имеет минимум, а график $J'(x)$ пересекает ось абсцисс. Пример графика $J(x)$ для среднего модульного критерия показан на рис. 2.3.

Два других вида графиков — это графики функции потерь ρ и ее производной. Они используются для критериев вида $J = \rho\left(x_1 - x\right) + \rho\left(x_2 - x\right) + \rho\left(x_3 - x\right)$. Примеры зависимостей $\rho\left(x_i - x\right)$ и $\rho'\left(x_i - x\right)$ для среднего квадратического и среднего модульного критериев приводятся на рис. 3.3 и 3.4. В точке $x = x_i$ функция потерь минимальна, а функция чувствительности $u = \rho'\left(x_i - x\right) = 0$.

Более распространенным является задание оценки с помощью функции оценивания, которая в случае трех измерений представляет собой функцию трех аргументов:

$$\hat{x} = f(x_1, x_2, x_3). \tag{4.12}$$

Уравнение (4.12) описывает поверхность в четырехмерном пространстве, характер которой зависит от вида функции *f*. Определенное представление об этой поверхности можно получить, если зафиксировать два аргумента и графически изображать зависимость оценки $\hat{x}$ от третьего аргумента. Именно так были получены графики на рис. 3.2–3.9, построенные при условии x_1 = const, x_2 = const. Заметим, что подобный прием часто используется в электронике и радиотехнике, когда задание функций нескольких аргументов (например характеристик транзисторов) производится с помощью семейств плоских кривых.

Более полное геометрическое представление о поверхности оценивания (4.12) можно получить, если фиксировать только один аргумент (например x_3) и рассматривать $\hat{x}$ как функцию двух остальных аргументов. Геометрически этому будут соответствовать поверхности в трехмерном пространстве с координатными осями $\hat{x}$, x_1, x_2. Для иллюстрации на рис. 4.1 и 4.2 (см. цв. вклейку) показаны поверхности для функций

$$\hat{x} = \min(x_1, x_2, x_3), \quad \hat{x} = \max(x_1, x_2, x_3), \tag{4.13}$$

построенные при условии $x_3 = 1$.

Совмещая на одном графике поверхности (4.13), приходим к рис. 4.3 (буквой *а* на этом рисунке обозначена единственная общая точка обеих поверхностей). Она лежит на биссектрисе первого октанта и имеет координаты (1, 1, 1). В соответствии с условием (3.1) рис. 4.3 наглядно задает область, которой могут принадлежать функции оценивания. Поверхность, отвечающая любой такой функции, должна проходить через точку *а* и лежать между поверхностями (4.13), изображенными на рис. 4.1, 4.2. Области ниже уровня $\hat{x} = \min(x_1, x_2, x_3)$ и выше уровня $\hat{x} = \max(x_1, x_2, x_3)$ являются запрещенными.

На рис. 4.4 приведена поверхность для выборочной медианы

$$\hat{x} = \mathrm{med}(x_1, x_2, x_3), \tag{4.14}$$

построенная для $x_3 = 1$.

Приведенные ранее на рис. 3.2 и 3.8 двумерные графики для функций (4.13), (4.14) будут получаться при сечении поверхностей на рис. 4.1 – 4.4 вертикальной плоскостью, задаваемой уравнением $x_2 = 2$. Например, график для выборочной медианы на рис. 3.8, *а* совпадает с пересечением поверхности, изображенной на рис. 4.4, и плоскости, перпендикулярной оси x_2.

Заметим, что и в случае двух измерений $\hat{x} = y = f(x_1,\ x_2)$ трехмерное изображение дает полезное представление о функции оценивания. Область допустимых поверхностей для этого случая задается условием

$$\min(x_1,\ x_2) \le \hat{x} \le \max(x_1,\ x_2),$$

геометрический смысл которого иллюстрируют рис. 4.5, 4.6 (см. цв. вклейку).

На них отдельно изображены поверхности, соответствующие верхней и нижней границам неравенства. Совмещая их на одном чертеже, можно увидеть допустимую и запрещенную области для поверхностей оценивания.

В частности, любая поверхность оценивания в случае двух измерений обязана содержать биссектрису первого октанта, поскольку она является линией соприкосновения обеих ограничивающих поверхностей.

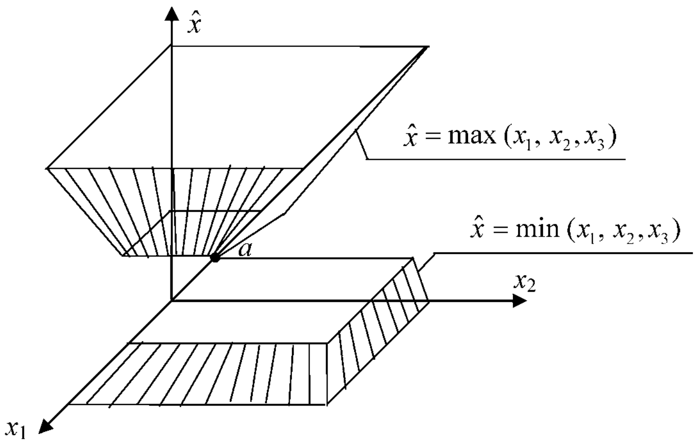


Рис. 4.3. Область существования поверхностей оценивания

На рис. 4.7, *а* и 4.7, *б* (см. цв. вклейку) изображены поверхности для оценки среднего геометрического $\hat{x} = \sqrt{x_1 x_2}$ и среднего гармонического $\hat{x} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}} = \dfrac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2}$.

Если же иметь в виду случай произвольного числа измерений, предпочтение следует отдать двумерным графикам, т. к. они, с одной стороны, не слишком сложны в построении и, с другой стороны, дают достаточное представление о характере функции оценивания. При необходимости их легко дополнить графиками чувствительности, несущими дополнительную информацию о свойствах оценок.

Для иллюстрации этого на рис. 4.8, *а* и 4.8, *б* приведены двумерные графики функций оценивания для выборочной медианы и осреднения трех центральных значений измерений (при отбрасывании двух крайних) для n = 5, а на рис. 4.9, *а* и 4.9, *б* — графики их функций чувствительности $\frac{\partial \hat{x}}{\partial x_5}$.

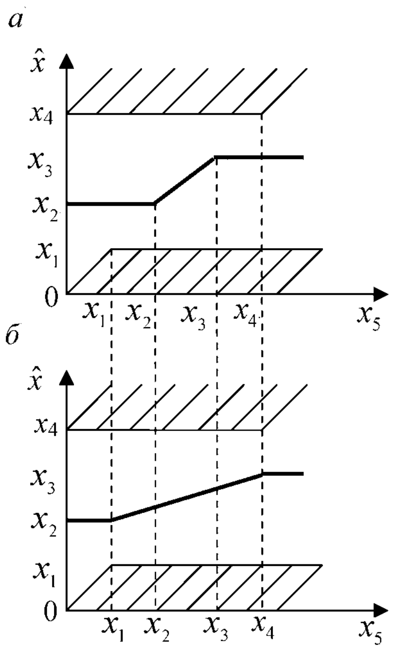


Рис. 4.8. Графики функций оценивания для n = 5

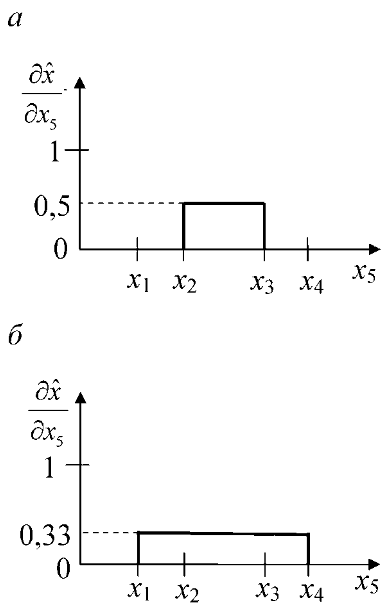


Рис. 4.9. Графики функций чувствительности для n = 5

Удобство технической реализации

Технически всякая оценка реализуется либо программно, либо некоторым устройством, обрабатывающим входные сигналы x_1, x_2, x_3 и формирующим выходной сигнал $\hat{x}$. К этому устройству предъявляются обычные технические требования, такие как простота, надежность, быстродействие, работоспособность в широком диапазоне входных сигналов и другие. С их учетом производится выбор одного из возможных вариантов реализации принятой оценки.

Исходным пунктом для получения оценки может служить либо сама функция оценивания f, либо критериальная функция F, либо ее производная, причем во всех случаях возможна аппаратурная или программная реализация.

Блок-схемы получения оценки каждым из перечисленных способов показаны на рис. 4.10, *а*, *б*, *в*.

Согласно первому из них оценка вычисляется непосредственно по функции оценивания. Например, для алгоритма среднего арифметического блок f (рис. 4.10, *а*) будет представлять собой просто сумматор.

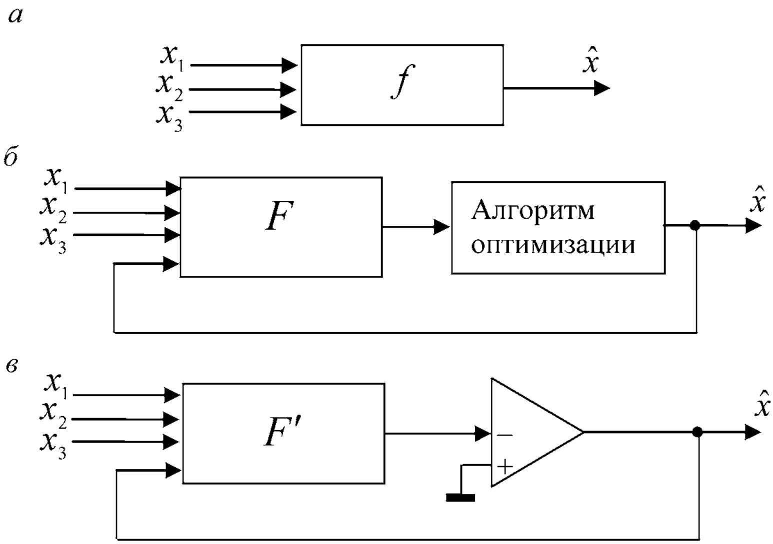


Рис. 4.10. Блок-схемы получения оценки по функциям: оценивания (*а*); критериальной (*б*) и ее производной (*в*)

При вычислении оценки по критериальной функции (рис. 4.10, *б*) сначала формируется значение минимизируемого критерия $J = F(x,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$, а затем осуществляется автоматический поиск величины $x = \hat{x}$, обеспечивающей его минимум. При этом может использоваться любой из численных методов поиска экстремума, например градиентные методы, метод Гаусса — Зейделя и другие.

Согласно третьему способу вычисление оценки происходит путем решения уравнения, которое получается дифференцированием критерия и приравниванием полученного результата нулю:

$$J' = F'(x,\ x_1,\ x_2,\ x_3) = 0. \tag{4.15}$$

Структура аналоговой схемы для его решения (схема кворум-элемента) показана на рис. 4.10, *в*. Она построена по методу неявных функций, широко используемому в аналоговой вычислительной технике для обращения функций и уравнений, заданных в неявной форме.

В соответствии с этим методом блок формирования производной $J' = F'$ (4.15) включается в обратную связь операционного усилителя. Благодаря достаточно большому коэффициенту усиления последнего на его входе автоматически (за счет отрицательной обратной связи) поддерживается напряжение, близкое к нулю. Следовательно, выходной сигнал усилителя будет приближенно совпадать с решением уравнения (4.15).

Поясним описанные варианты на примере реализации алгоритма выборочной медианы, начав с получения оценки непосредственно по функции оценивания.

Используя операции выбора максимального и минимального из нескольких сигналов, функцию $\hat{x} = \mathrm{med}(x_1,\ \ x_2,\ \ x_3)$ можно записать в форме

$$\hat{x} = \max\left[\min\left(x_1,\ \ x_2\right),\ \min\left(x_1,\ \ x_3\right),\ \min\left(x_2,\ \ x_3\right)\right] \tag{4.16}$$

или в равносильной форме

$$\hat{x} = \min\left[\max\left(x_1,\ x_2\right),\ \max\left(x_1,\ x_3\right),\ \max\left(x_2,\ x_3\right)\right]. \tag{4.17}$$

Этим формулам соответствуют блок-схемы получения оценки, показанные на рис. 4.11 [20, 21].

Каждая из операций выбора максимума или минимума может быть выполнена с помощью сравнительно простых диодных схем, что позволяет построить аналоговое устройство оценивания на базе операционного усилителя, диодов и резисторов.

Программная реализация формул (4.16) и (4.17) на компьютере также весьма проста и требует всего пяти операций сравнения.

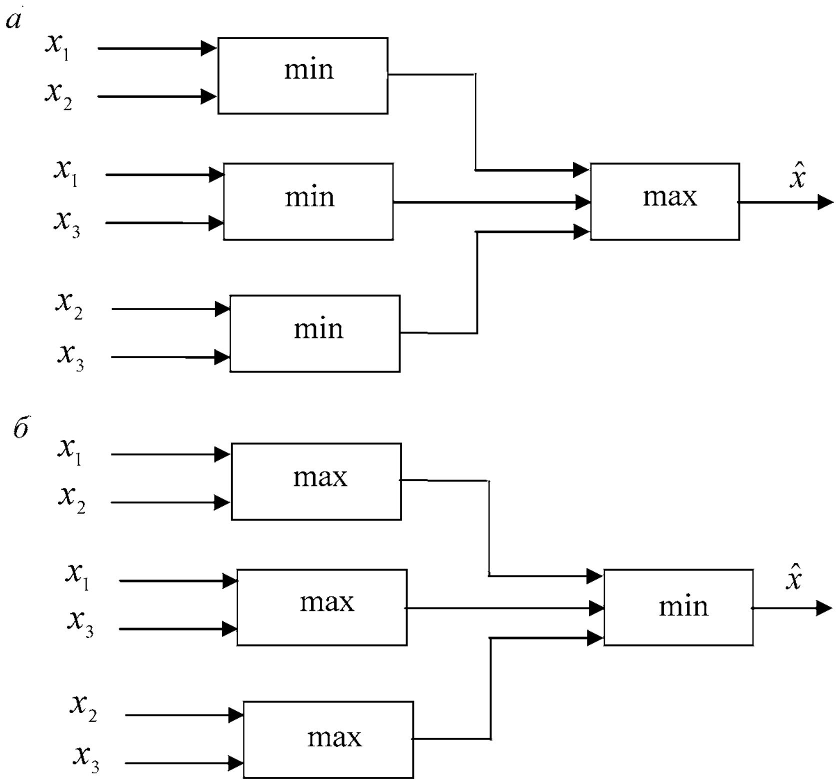


Рис. 4.11. Блок-схемы получения оценок по формулам (4.16) и (4.17)

Получение медианной оценки по критериальной функции связано с минимизацией значения критерия J:

$$J = |x_1 - x| + |x_2 - x| + |x_3 - x|. \tag{4.18}$$

За оценку принимается значение $x = \hat{x}$, обеспечивающее минимум этому критерию. По сути дела, это способ вычисления выборочной медианы, основанный на использовании численных методов оптимизации. Соответствующая блок-схема вычислений показана на рис. 4.12 [21].

Она содержит блок формирования критерия БФК и блок оптимизации. Ясно, что реализация данной блок-схемы может быть как аппаратурной, так и программной.

Получение той же оценки по производной от критериальной функции, использующее блок формирования производной БФП, опирается на уравнение

$$J' = \operatorname{sign}(x_1 - x) + \operatorname{sign}(x_2 - x) + \operatorname{sign}(x_3 - x) = 0, \qquad (4.19)$$

которое получается дифференцированием критерия (4.18) и приравниванием полученного результата нулю. Здесь через $\operatorname{sign} z$ обозначена сигнатурная функция, равная 1 при $z > 0$; 0 при $z = 0$ и –1 при отрицательных z.

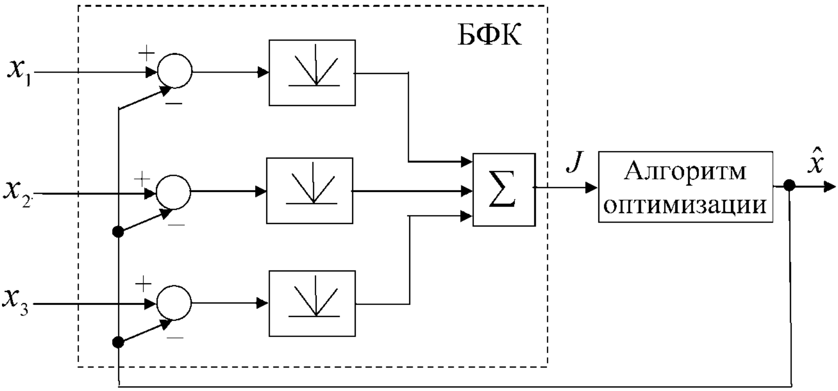


Рис. 4.12. Блок-схема вычислений при минимизации критерия (4.18)

Аналоговая схема для решения уравнения (4.19) относительно x, построенная по методу неявных функций, приведена на рис. 4.13. Эта и подобные ей схемы получения оценок получили название кворум-элементов [21]. Их общей чертой является применение метода неявных функций для решения уравнений $J' = 0$. Отметим, что, если в схеме на рис. 4.13 нелинейные блоки с релейной характеристикой заменить на линейные, то на выходе усилителя будет формироваться средняя арифметическая оценка; если использовать линейную характеристику с ограничением, то получим оценку 26 из табл. 4.1 и т. д.

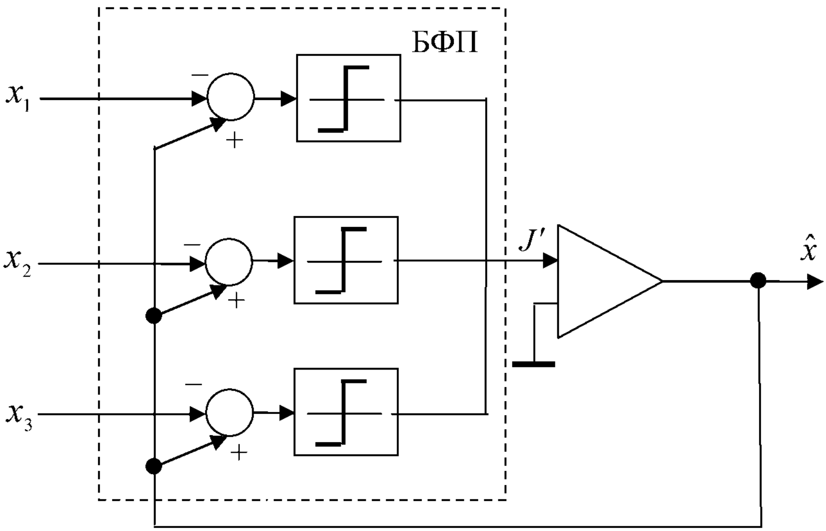


Рис. 4.13. Блок-схема, реализующая решение уравнения (4.19)

В заключение упомянем о некоторых средних, не вошедших в табл. 4.1. К ним относятся среднее хронологическое, среднее прогрессивное, среднее факториальное и ряд других.

ГЛАВА V. ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДНИХ ДЛЯ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ

5.1. Цифровые фильтры с конечной памятью

Классический способ борьбы с погрешностями, помехами и ошибками в измерительных системах состоит в применении различных алгоритмов фильтрации, учитывающих известные свойства сигналов и помех. Если данные измерений в силу своей физической природы представляют собой гладкие непрерывные функции, заданные массивом отсчетов, то для их обработки можно использовать фильтры, основанные на осреднении нескольких соседних отсчетов. Такой подход применим, в частности, в бортовых навигационных устройствах, где гладкость сигналов обусловливается тем, что местоположение летательного аппарата и его навигационные параметры изменяются плавно.

В бортовом вычислителе любой сигнал представляется в виде массива отсчетов x_1, x_2, ..., относящихся к равноотстоящим моментам времени. Поэтому условие гладкости можно записать в виде неравенства

$$\left| x_{i+1} - x_i \right| \le \varepsilon, \tag{5.1}$$

которое означает, что соседние отсчеты в массиве отличаются друг от друга на небольшую величину, не превышающую некоторого порога ε.

Близость соседних отсчетов измерительных сигналов может быть использована для устранения тех отсчетов, которые искажены в результате воздействия погрешностей (сбоев, ошибок). Эта идея лежит в основе большинства методов фильтрации и оценивания. Обработка сигнала производится в соответствии со структурной схемой, показанной на рис. 5.1.

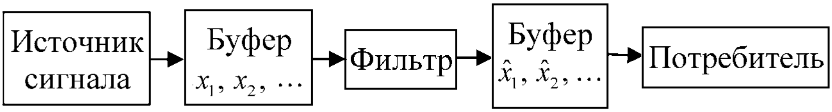


Рис. 5.1. Структурная схема обработки сигнала

На вход фильтра последовательно поступают отсчеты сигнала x_1, x_2, ... Они обрабатываются в соответствии с выбранным алгоритмом фильтрации и преобразуются в выходную последовательность $\hat{x}_1,\ \hat{x}_2, \ldots$

Одним из простых алгоритмов фильтрации является алгоритм скользящего среднего:

$$\hat{x}_i = \frac{x_i + x_{i-1} + \ldots + x_{i-k+1}}{k}, \tag{5.2}$$

где k — протяженность «окна», скользящего по отсчетам сигнала. Это пример фильтра с конечной памятью или с конечной импульсной характеристикой.

Произвольный фильтр с конечной памятью описывается выражением

$$\hat{x}_i = f(x_i,\ x_{i-1},\ \ldots,\ x_{i-k+1}). \tag{5.3}$$

Поэтому задача синтеза фильтра, удовлетворяющего заданным требованиям, сводится к выбору функции f. С математической точки зрения она близка к задаче выбора функции оценивания, рассмотренной в предыдущих разделах. Например, функция скользящего среднего (5.2) при $k = 3$ соответствует функции среднего арифметического (1.4). Аналогично любой из функций оценивания, приведенной в табл. 4.1, можно сопоставить алгоритм фильтрации, определяемый формулой (5.3). В частности, применяя формулу среднего гармонического, получим фильтр, описываемый формулой

$$\hat{x}_i = 3\left(\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i-2}}\right)^{-1}.$$

Такой алгоритм фильтрации можно назвать алгоритмом скользящего среднего гармонического.

Простейший алгоритм гарантированной фильтрации опирается на формулу п. 44 в табл. 4.1. Он состоит в том, что выходной отсчет фильтра строится как полусумма максимального и минимального из трех входных отсчетов.

Таким образом, табл. 4.1 автоматически порождает несколько десятков алгоритмов фильтрации, обеспечивающих обработку гладких сигналов. Остановимся подробнее на двух видах этих алгоритмов — медианном и диагностическом, обеспечивающих устранение однократных сбоев (ошибок, промахов) в сигнале.

5.2. Медианные фильтры

Алгоритм медианной обработки трех значений измерений описан в Главе 1, см. формулу (1.8) и рис. 2.10. Применительно к фильтрации сигналов он превращается в алгоритм скользящей медианы, который для $k = 3$ описывается формулой

$$\hat{x}_i = \operatorname{med}\left(x_i,\ x_{i-1},\ x_{i-2}\right), \qquad i = \overline{1,\ N}.$$

Из соображений симметрии эту формулу удобнее переписать в виде

$$\hat{x}_i = \operatorname{med}\left(x_{i+1},\ x_i,\ x_{i-1}\right). \tag{5.4}$$

Это означает, что в исходном массиве данных последовательно просматриваются тройки соседних отсчетов (скользящее «окно» протяженностью в 3 точки), и в качестве оценки $\hat{x}_i$ принимается отсчет, средний по величине (рис. 5.2).

Важным свойством алгоритма скользящей медианы является то, что он отбраковывает отсчеты, искаженные одиночными сбоями (промахами, ошибками). Такие отсчеты заменяются соседним отсчетом (тем из них, который ближе по своему значению). Тем самым алгоритм обеспечивает нечувствительность к одиночным сбоям (ошибкам, промахам), т. е. обладает свойством робастности.

Медианные фильтры легко реализуются технически и могут быть успешно использованы для борьбы со сбоями (ошибками, промахами) любой кратности. Например, выбирая протяженность «окна» $k = 5$, получаем оценку, нечувствительную к двойным сбоям, и т. д.

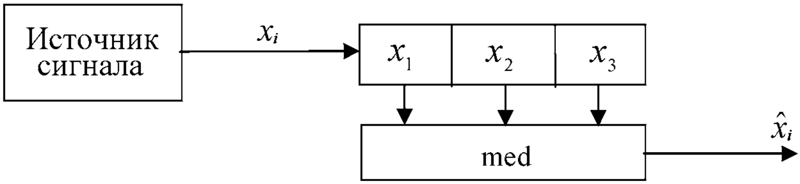


Рис. 5.2. Трехточечный медианный фильтр

Медианный фильтр обладает рядом других интересных свойств [67, 69–71, 81, 82, 85, 93, 94, 100, 103, 105, 107, 112, 115–118, 126–132, 141–143 и др.]. Остановимся на некоторых из них.

а) Критерий оптимальности фильтра

Так же, как и при обычной оценке значений измерений, медианный фильтр формирует оценку, удовлетворяющую модульному критерию оптимальности. При протяженности «окна» $k = 3$ критерий имеет вид

$$J = \left|x_{i+1} - \hat{x}_i\right| + \left|x_i - \hat{x}_i\right| + \left|x_{i-1} - \hat{x}_i\right|. \tag{5.5}$$

Как следует из рис. 5.2, оценка $\hat{x}_i$, , вычисленная по формуле (5.4), обеспечивает этому критерию минимальное значение.

При произвольной протяженности «окна» $k = 2n + 1$ формула (5.5) будет содержать k слагаемых

$$J = \sum_{j=-n}^{n} \left|x_{i+j} - \hat{x}\right|. \tag{5.6}$$

Минимум такого критерия достигается при $\hat{x}_i = \mathrm{med}\left(x_{i-n}, \ ..., \ x_{i+n}\right)$.

б) Статистические свойства фильтра

Анализ статистических свойств фильтра можно проводить путем подачи на его вход различных случайных входных сигналов и исследования вероятностных характеристик выходного сигнала. Один из наглядных и простых результатов такого анализа иллюстрируется на рис. 5.3. На нем показан график плотности распределения

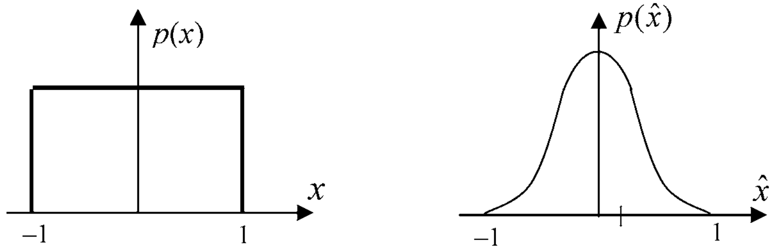


Рис. 5.3. Преобразование плотности распределения вероятностей медианным фильтром

вероятностей выходного сигнала $p(\hat{x})$ медианного фильтра при подаче на его вход сигнала, равномерно распределенного на интервале [–1, 1].

График $p(\hat{x})$ имеет колоколообразный вид, близкий по форме к гауссовой кривой. На содержательном уровне данный результат объясняется тем, что медианный фильтр отбрасывает значения с большой амплитудой, пропуская на выход значения с малой и средней амплитудами.

в) Нелинейный характер фильтра

Медианный фильтр не разрушает и не искажает фронты импульсов в отличие от любого линейного фильтра. В этом проявляется нелинейный характер этого фильтра. Алгоритмически его нелинейность отражается в использовании для реализации функции med нелинейной операции сортировки значений сигнала, находящихся в «окне» фильтра. Вычислительная сложность такой операции растет при увеличении протяженности «окна», что говорит о большей экономичности алгоритмической реализации фильтра.

г) Корневые сигналы фильтра

Важной характеристикой фильтра является его поведение в отсутствие помех. С этой точки зрения все фильтры можно разделить на два класса. Первый из них образуют фильтры, которые не вносят искажений во входной сигнал. Ко второму классу относятся фильтры, вносящие некоторые искажения во входной сигнал.

Например, любой линейный фильтр неизбежно изменяет форму входного сигнала.

Медианный фильтр относится ко второму классу, т. е. в общем случае он изменяет вид входного сигнала. В первую очередь это касается экстремальных точек сигнала, а также близко лежащих к ним. Так, в случае прохождения синусоидального сигнала через трехточечный медианный фильтр у сигнала «срезаются» все экстремальные точки. В случае пятиточечного медианного фильтра срезаются не только экстремальные, но и соседние с ними точки сигнала. В результате вершины «волн» синусоиды становятся более плоскими.

В то же время существуют сигналы, которые не изменяются при прохождении через медианный фильтр. Они называются корневыми, поскольку являются корнями уравнения

$$\mathrm{med}(x) - x = 0,$$

где через x обозначен входной, а через $\mathrm{med}(x)$ — выходной сигналы фильтра.

Примерами корневых сигналов могут служить единичный «скачок» (ступенька), линейно возрастающий сигнал, любой монотонный сигнал (рис. 5.4, *а*, 5.4, *б* и 5.4, *в*). Прямоугольный импульс (рис. 5.4, *г*) будет корневым сигналом медианного фильтра, если длительность импульса превосходит половину протяженности «окна» фильтра. Эти сигналы, а также их комбинации, проходят через медианный фильтр без изменений.

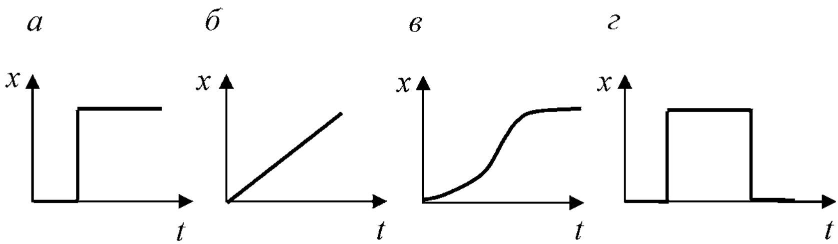


Рис. 5.4. Корневые сигналы медианного фильтра

д) Обобщенные медианные фильтры

Классический медианный фильтр оптимизирует критерий, определяемый формулой (5.6). Этот критерий допускает обобщение, по крайней мере, в двух направлениях. Во-первых, его можно записать в виде

$$J = \sum_{j=-n}^{n} \left| a_j x_{i+j} - \hat{x}_i \right|,$$

где a_j — некоторые весовые коэффициенты. С их помощью можно учитывать «важность» тех или иных отсчетов. Этой формуле будет отвечать класс взвешенных скользящих медианных фильтров.

Во-вторых, каждое слагаемое в формуле (5.6) можно возвести в некоторую положительную степень γ. Это приводит к критерию

$$J = \sum_{j=-n}^{n} \left| x_{i+j} - \hat{x}_i \right|^{\gamma}. \tag{5.7}$$

Отметим наиболее важные случаи значений γ. При $\gamma = 1$ получаем классический медианный фильтр. При $\gamma = 2$ получаем квадратический критерий, для которого оптимальной оценкой является скользящее среднее арифметическое (5.2). При $\gamma \to \infty$ критерий (5.7) превращается в чебышевский критерий с оптимальной оценкой в виде полусуммы минимального и максимального отсчетов, находящихся в «окне». Такая оценка является гарантирующей и минимизирует максимально допускаемую погрешность.

Интересным является случай $\gamma < 1$. При этом функция J становится многоэкстремальной, причем все ее минимумы находятся в точках, совпадающих с отсчетами входного сигнала. При $\gamma \to 0$ оптимальное решение достигается в точке x_j, минимизирующей произведение

$$J = \prod_{\substack{i \neq j \\ j=-n}}^{n} \left| x_{i+j} - \hat{x}_i \right|.$$

На рис. 5.5 показан характер графиков критерия (5.7) при разных значениях γ для пятиточечного фильтра. На оси абсцисс отложены значения отсчетов входного сигнала, попавшие в «окно», по оси ординат — значения критерия при разных γ.

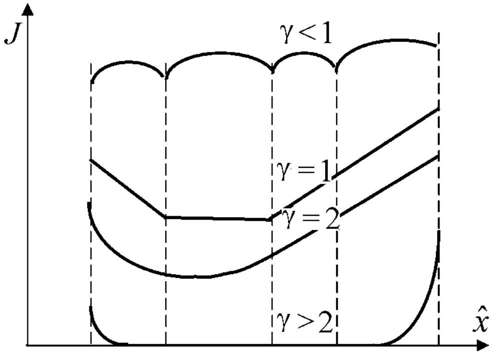


Рис. 5.5. Характер графиков критерия пятиточечного фильтра для разных значений γ

Выбор того или иного значения γ и, как следствие, типа фильтра определяется физической сущностью задачи, в частности, характером сигнала и помех.

5.3. Диагностические фильтры

Под диагностическим фильтром будем понимать фильтр для обработки сигналов, алгоритм работы которого соответствует оценкам, соответствующим пп. 32, 33 в табл. 4.1.

Простейший диагностический фильтр получаем, рассматривая соседние пары отсчетов (т. е. используя «окно» протяженностью 2 отсчета) и проверяя выполнение условия

$$\Delta = \left| x_i - x_{i-1} \right| \le \varepsilon, \tag{5.8}$$

где ε — фиксированный порог, определяемый степенью «гладкости» входного сигнала.

Если условие (5.8) выполняется, то текущий входной отсчет пропускается на выход фильтра: $\hat{x}_i = x_i$. В противном случае выход фильтра блокируется. Блокировка действует до тех пор, пока вновь не станет выполняться условие (5.8).

На интервале блокировки выходной сигнал фильтра может доопределяться различными способами. Например, в качестве оценки на этом интервале можно взять последнее верное значение: $\hat{x}_i = x_{i-1}$ — т. е. использовать экстраполяцию нулевого порядка.

Соответствующий алгоритм имеет вид:

$$\begin{array}{l} \Delta := \operatorname{abs}\big(x(i) - x(i-1)\big) \\ \mathit{if}\ \ \Delta \le \text{eps then} \\ \hat{x}(i) := x(i) \\ \text{else} \\ \hat{x}(i) := \hat{x}(i-1). \end{array}$$

Можно также применить экстраполяцию первого или второго порядка, но для этого потребуется увеличение протяженности окна фильтра. Алгоритм, использующий экстраполяцию первого порядка, имеет вид:

$$\begin{array}{l} \Delta := \operatorname{abs}\big(x(i) - x(i-1)\big) \\ \mathit{if}\ \ \Delta \le \text{eps then} \\ \hat{x}(i) := x(i) \\ \text{else} \\ \hat{x}(i) := 2\hat{x}(i-1) - \hat{x}(i-2). \end{array}$$

Таким образом, диагностический фильтр при минимальной протяженности окна ($k = 2$) позволяет бороться со сбоями (ошибками, промахами) произвольной кратности, что выгодно отличает его от медианного фильтра. Правда, при возрастании кратности сбоев его корректирующая способность ухудшается.

Другое достоинство диагностического фильтра заключается в том, что он не вносит искажений в сигнал, свободный от сбоев. Тем самым он относится к первому из двух упомянутых ранее классов фильтров. Сигнал любой формы, удовлетворяющий условию гладкости (5.8), является корневым для диагностического фильтра.

Оба указанных достоинства достигаются ценой использования дополнительной информации о пороге ε, которой не требуется в случае медианного фильтра.

Этого недостатка диагностического фильтра можно избежать за счет перехода к *беспороговому* диагностическому фильтру.

Опишем идею беспорогового диагностического фильтра для окна протяженностью $k = 3$. Обозначим текущие отсчеты входного сигнала x_i, x_{i-1}, x_{i-2} через y_1, y_2, y_3 и сформируем три контрольных сигнала

$$\Delta_1 = |y_2 - y_3|,$$

$$\Delta_2 = |y_1 - y_3|,$$

$$\Delta_3 = |y_1 - y_2|,$$

В отсутствие сбоев все они будут иметь малую величину. Появление однократного сбоя исказит один из отсчетов и приведет к увеличению значений двух из трех контрольных сигналов. Индекс контрольного сигнала, оставшегося малым, совпадает с номером искаженного отсчета. Этот отсчет отбрасывается, а оценка формируется на основе двух оставшихся отсчетов, например как их среднее арифметическое, среднее гармоническое и т. д.

Таким образом, беспороговый диагностический фильтр с протяженностью окна $k = 3$, как и медианный фильтр, позволяет бороться с однократными сбоями. Алгоритм такого фильтра имеет вид

$y_1 := x(i);$
$y_2 := x(i - 1);$
$y_3 := x(i - 2);$
$\Delta_1 := \mathrm{abs}(y_2 - y_3);$
$\Delta_2 := \mathrm{abs}(y_1 - y_3);$
$\Delta_3 := \mathrm{abs}(y_1 - y_2);$
if $\Delta_1 = \min(\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3)$ then
$\hat{x}(i) := (y_2 + y_3)/2$
else if $\Delta_2 = \min\ (\Delta_1\ \ \Delta_2\ \ \Delta_3)$ then
$\hat{x}(\mathrm{i}) := (y_1 + y_3)/2$
else if $\Delta_3 = \min(\Delta_1\ \ \Delta_2\ \ \Delta_3)$ then
$\hat{x}(i) := (y_1 + y_2)/2.$

К сожалению, при отсутствии сбоев этот фильтр, как и медианный, вносит некоторые искажения в исходный сигнал, т. е. относится к фильтрам второго класса.

5.4. Пример фильтрации навигационной информации

Проиллюстрируем применение медианной фильтрации на примере процедуры обработки данных, получаемой от бортовой навигационной системы летательного аппарата. Блок-схема обработки бортовой навигационной информации представлена на рис. 5.6.

Источником первичной информации является инерциальная навигационная система, на выходе которой формируются оценки текущих значений семи навигационных параметров самолета — долготы λ, широты φ, высоты h, горизонтальных компонент скорости v_1, v_2, вертикальной скорости $\dot{h}$ и курсового угла ε.

Они содержат помехи двух типов — высокого уровня (выбросы, пропадание сигнала) и низкого уровня (инструментальные и другие погрешности).

Для борьбы с ними применяется двухэтапная процедура обработки. На первом этапе осуществляется устранение ошибок высокого уровня, для чего используется набор медианных фильтров МФ.

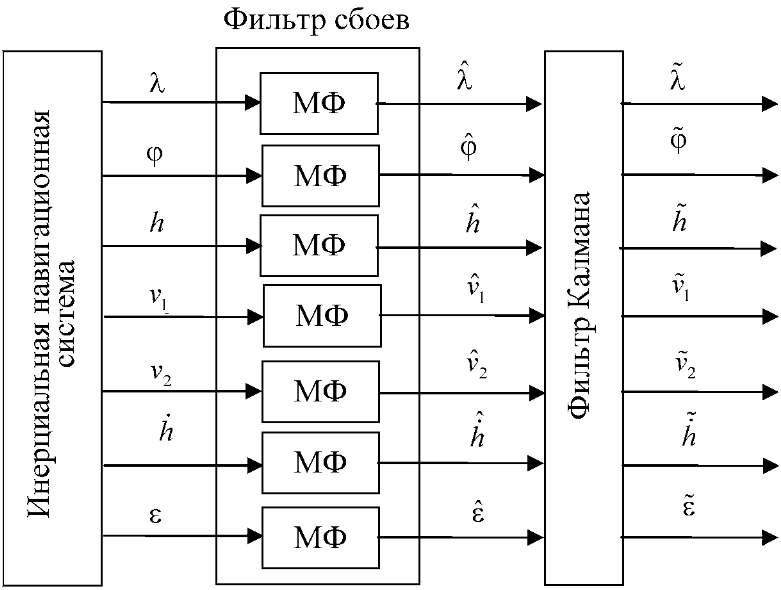


Рис.5.6. Обработка сигналов инерциальной навигационной системы

На втором этапе для борьбы с ошибками малого уровня применяется фильтр Калмана. На его выходе получаются оценки навигационных параметров, «очищенные» от помех.

В качестве примера на рис. 5.7 и 5.8 показаны результаты медианной фильтрации сигналов h (высота) и $\dot{h}$ (вертикальная скорость). При их построении использованы реальные записи сигналов инерциальной навигационной системы, полученные во время летных испытаний. Видно, что верхние графики на этих рисунках содержат большое число ошибок высокого уровня, вызванных регулярным пропаданием сигналов из-за вибрации и недостаточно надежных контактов.

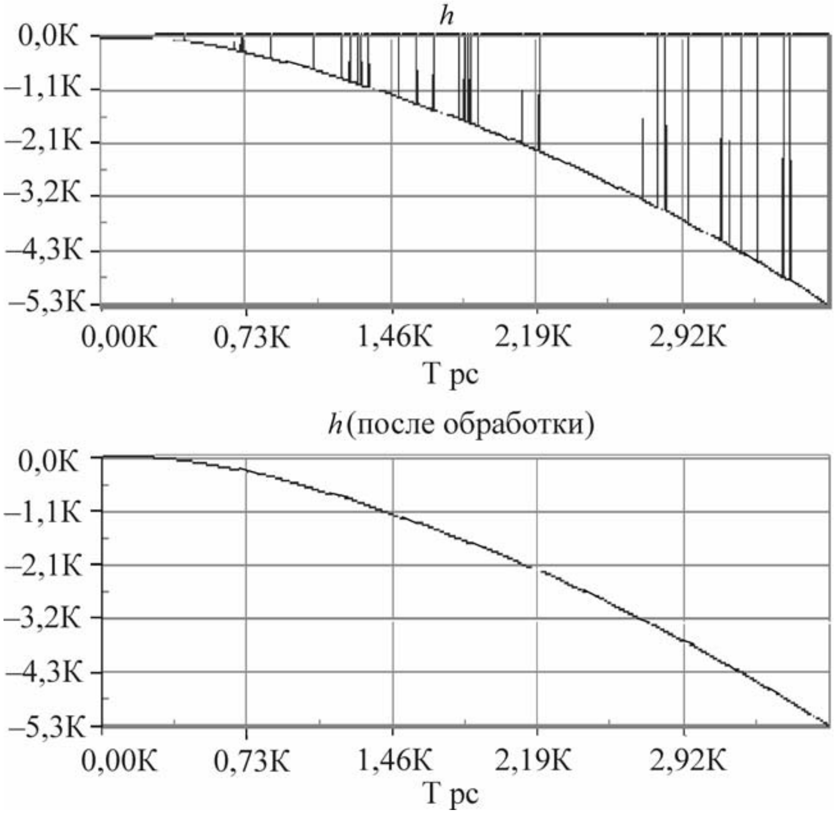


Рис.5.7. Медианная фильтрация сигнала по каналу высоты

Нижние графики на рис. 5.7, 5.8 представляют собой результаты медианной фильтрации. Медианный фильтр использует окно с протяженностью, равной трем отсчетам, и устраняет одиночные сбои.

В результате сигнал по каналу высоты оказался полностью «очищенным» от ошибок высокого уровня, а в сигнале по каналу вертикальной скорости устранены все ошибки, кроме двух. Для их удаления необходимо использовать дополнительную фильтрацию либо применить пятиточечный медианный фильтр.

Приведенный пример показывает достаточную эффективность медианной фильтрации для предварительной обработки сигналов, поступающих от измерительных датчиков.

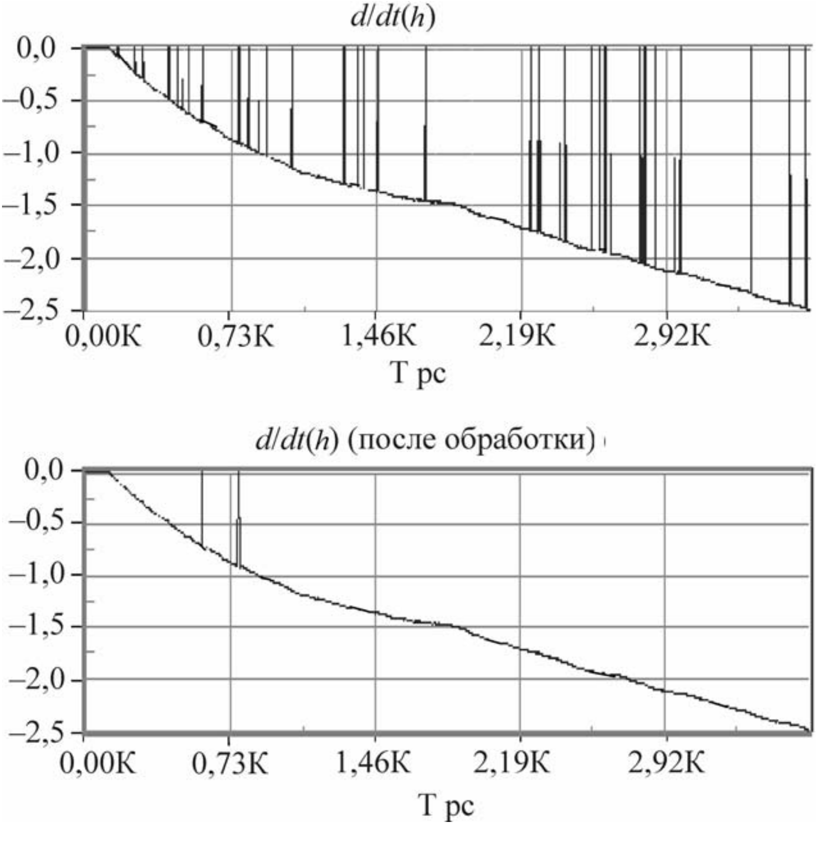


Рис. 5.8. Медианная фильтрация сигнала по каналу вертикальной скорости

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для многих практических задач типична ситуация, когда требуется получить оценку неизвестной величины на основе небольшого числа измерений. В книге собраны, систематизированы и проанализированы алгоритмы оценивания, касающиеся классической задачи о трех измерениях. Наряду с этим рассмотрены случаи большего числа измерений.

Приведена классификация погрешностей измерений, среди которых выделены:

– личные (субъективные), т. е. погрешности оператора;

– инструментальные, т. е. погрешности используемых средств измерений;

– внешние, обусловленные влиянием физических величин, не являющихся объектами измерений;

– методические, т. е. погрешности, вызванные несовершенством выбранного метода измерений;

– погрешности из-за неадекватности используемой модели измерений;

– погрешности за счет ошибок классификации.

Особое внимание уделено грубым погрешностям различного происхождения, которые вызываются промахами, ошибками, сбоями, помехами или пропаданиями сигнала. Приведены сведения о сравнительно недавно получивших международное признание неопределенностях результатов измерений, а также о сопоставлении неопределенностей измерений с традиционными характеристиками точности, а именно — погрешностями.

Дана классификация методов оценивания результатов многократных измерений, которые подразделяются на вероятностные, детерминированные, эвристические и диагностические. Приведены алгоритмы оптимального оценивания для перечисленных групп методов. В частности, охарактеризован *вероятностный* подход, включающий в себя метод максимального правдоподобия, а также марковские и байесовские оценки.

Алгоритмы, реализующие *детерминированный* подход, используют различные критерии оптимизации, в частности квадратический, модульный, минимаксный, степенной, а также составные, комбинированные и другие виды критериев.

Показано, что принципы *эвристического* оценивания на основе определений средних значений по Коши и Колмогорову приводят к классическим средним оценкам для случая двух, трех и большего числа измерений, таким как среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое и др. Охарактеризованы линейные, квазилинейные и нелинейные оценки. К ним относятся, в частности, взвешенные средняя арифметическая и средняя квадратическая оценки, выборочная медиана и некоторые другие.

При рассмотрении *диагностических* методов получения оценок описано использование *метода избыточных переменных* для повышения точности оценивания, а также применение *алгебраических инвариантов*. Использование метода избыточных переменных приводит к получению *марковских* оценок, а применение алгебраических инвариантов позволяет отбраковывать недостоверные значения измерений.

Более детально рассмотрены оценки с отбраковкой одного или двух значений измерений по минимальному либо по максимальному рассогласованию. Проведено сопоставление различных оценок по характеру алгоритма оценивания, способу его задания и удобству технической реализации.

Описан принцип использования средних оценок для помехоустойчивой фильтрации сигналов, применение которого приводит к фильтрам с конечной памятью.

Большое внимание уделено медианным фильтрам и их характеристикам, включая критерии оптимизации, статистические свойства и корневые сигналы фильтров. Рассмотрены пороговый и беспороговый варианты диагностического фильтра.

Алгоритмы оценивания скалярной величины по трем измерениям сведены в таблицу, в которой отражено более семидесяти различных оценок. Следует отметить, что этот список может быть продолжен, поскольку количество возможных оценок неограниченно и выбор одной из них должен осуществляться с учетом особенностей конкретной практической измерительной ситуации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Статистика и классификация

1. *Аведьян Э.Д., Цыпкин Я.З.* Оптимальные методы обработки текущих и накопленных данных // Техническая кибернетика, 1987. № 1. С. 140–150.

2. *Агекян Т.А.* Основы теории ошибок для астрономов и физиков (2-е изд.). М.: Наука, 1972.

3. *Айвазян С.А.* Классификация многомерных наблюдений. М.: Статистика, 1974. 240 с.

4. *Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Классификация и снижение размерности / Под ред. С.А. Айвазяна. М.: Финансы и статистика, 1989. 607 с.

5. *Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Исследование зависимостей. М.: Финансы и статистика, 1985. 487 с.

6. *Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Основы моделирования и первичная обработка данных. М.: Финансы и статистика, 1983. 472 с.

7. *Алимов*. О принципах статистики // УФН. 1992. № 7.

8. *Андерсен Т.* Введение в многомерный статистический анализ. М.: Физматгиз, 1963. 500 с.

9. *Аптон Г.* Анализ таблиц сопряженности. М.: Финансы и статистика, 1982. 144 с.

10. *Афифи А., Эйзен С.* Статистический анализ. Подход с использованием ЭВМ. М.: Мир, 1982. 488 с.

11. *Бабич О.А.* Обработка информации в навигационных комплексах. М.: Машиностроение, 1991.

12. *Бард Й.* Нелинейное оценивание параметров. М.: Финансы и статистика, 1979. 349 с.

13. *Бендат Дж., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989. 540 с.

14. *Бендат Дж., Пирсол А.* Применение корреляционного и спектрального анализа. М.: Мир, 1979. 311 с.

15. *Бернулли Я.* О законе больших чисел / Под общей ред. Ю.В. Прохорова. М.: Наука, 1986. 176 с.

16. *Бикел П., Доксум К.* Математическая статистика. М.: Финансы и статистика, 1983. Вып. 1. 280 с.; Вып. 2. 254 с.

17. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М.: Мир, 1974. Вып. 1. 288 с.; Вып. 2. 197 с.

18. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983. 416 с.

19. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986. 431 с.

20. *Бородачев Н.А.* Основные вопросы теории точности производства. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 412 с.

21. *Браславский Д.А.* Кворум-элементы для устройств с функциональной избыточностью // Системы с переменной структурой и их применение в задачах автоматизации полета. М.: Наука, 1968.

22. *Браславский Д.А., Якубович А.М.* Оптимальное преобразование нескольких приборов с учетом погрешностей и отказов // Автоматика и телемеханика. 1968. № 10. С. 128–135.

23. *Бриллинждер Д.* Временные ряды. М.: Мир, 1980. 536 с.

24. *Вавилов Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А., Трубников С.А.* Математические модели и алгоритмы обработки измерений спутниковой навигационной системы GPS. М.: МГУ, 2009. 128 с.

25. *Векслер Л.С.* Статистический анализ на персональном компьютере // МИР ПК. 1992. № 2. С. 89–97.

26. *Вучков И., Бояджиева Л., Солаков Е.* Прикладной линейный регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика, 1987. 239 с.

27. *Гаек Я., Шидак З.* Теория ранговых критериев. М.: Наука, 1971. 376 с.

28. *Гаскаров Д.В., Шаповалов В.И.* Малая выборка. М.: 1978. 248 с.

29. *Гаусс К.Ф.* Избранные геодезические сочинения, т. 1. Способ наименьших квадратов. М.: Геодезиздат, 1957.

30. *Геурков В.Л.* Параметрическая диагностика сбоев методом невязок в линейных статических системах с неизвестным входом // Автоматика и телемеханика. 1990. № 6. С. 135–138.

31. *Гильбо Е.П., Челпанов И.Б.* Обработка сигналов на основе упорядоченного выбора (мажоритарное и близкие к нему преобразования). М.: Советское радио, 1975. 344 с.

32. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Физматгиз, 1988. 406 с.

33. *Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы навигационных систем. Ч. II. Приложения методов оптимального оценивания к задачам навигации. М.: МГУ, 2008. 128 с.

34. *ГОСТ* 16263–70. ГСИ. Метрология. Термины и определения. М.: 1972. 55 с.

35. *Грановский В.А., Сирая Т.Н.* Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. Л.: Энергоатомиздат, 1990. 288 с.

36. *Грездов Г.И.* Теория и применение гибридных моделей. Киев: Наукова думка, 1975. 280 с.

37. *Гренандер У.* Лекции по теории образов. Т. 1, 2, 3; 384 с., 446 с., 430 с., годы: 1979, 1981, 1983. М.: Мир, 1979.

38. *Григорьев С.Г., Левандовский В.В., Перфилов А.М., Юнкеров В.И.* Пакет прикладных программ STATGRAPHICS на персональном компьютере. СПб.: 1992. 104 с.

39. *Губанов В.С.* Обобщенный метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрономии. СПб.: Наука, 1997. 318 с.

40. *Гусев М.И.* Планирование эксперимента в задачах гарантированной идентификации // Автоматика и телемеханика. 2007. № 11. С. 61–75.

41. *Демиденко Е.З.* Линейная и нелинейная регрессия. М.: Финансы и статистика, 1981. 302 с.

42. *Джонсон Н., Лион Ф.* Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. М.: Мир. Т. 1, 1980. 610 с.; Т. 2, 1981. 520 с.

43. *Дмитриев С.П., Колесов Н.В., Осипов А.В.* Информационная надежность, контроль и диагностика навигационных систем: Изд. 2-е. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2004. 206 с.

44. *Дмитриев С.П., Степанов О.А.* Нелинейные алгоритмы комплексной обработки избыточных измерений. Теория и системы управления // Известия РАН. 2000. № 4. С. 52–61.

45. *Долинский Е.Ф.* Обработка результатов измерений. М.: Изд-во стандартов, 1973. 192 с.

46. *Егорова Н.Ю., Фарбер В.Е.* Анализ точностных характеристик и устойчивости нелинейных алгоритмов оценивания параметров движения космических аппаратов при наличии аномальных

измерений // Космические исследования. Т. 32, Вып. 4–5, 1994. С. 3–12.

47. *Земельман М.А.* Метрологические основы технических измерений. М.: Изд-во стандартов, 1991. 228 с.

48. *Земельман М.А., Миф Н.П.* Планирование технических измерений. М.: Изд-во стандартов, 1978.

49. *Зимовнов В.Н.* Вопросы оценки точности результатов измерений. М.: Геодезиздат, 1954.

50. *Золотова Т.М., Кербников Ф.И., Розенблат М.А.* Резервирование аналоговых устройств автоматики. М.: Энергоатомиздат, 1986. 128 с.

51. *Золотова Т.М., Розенблат М.А.* Безынерционное преобразование сигналов нескольких приборов, оптимальное по критерию надежности // Автоматика и телемеханика. 1972. № 11.

52. *Иванов Ю.П., Синяков А.Н., Филатов И.В.* Комплексирование информационно-измерительных устройств летательных аппаратов. Л.: Машиностроение, 1984.

53. *Идельсон Н.И.* Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений. М.: Геодезиздат, 1947.

54. *Казанцев В.С.* Задачи классификации и их программное обеспечение. М.: Наука, 1990. 135 с.

55. *Калашников Н.А.* Точность в машиностроении и ее законы. М.: Машгиз. 1950. 148 с.

56. *Кемниц Ю.В.* Теория ошибок измерений. М.: Недра, 1967.

57. *Ким Дж.-О., Мьюллер Ч.У., Клекка У.Р., Олдендерфер М.С., Боешфилд Р.К.* Факторный, дискриминантный и кластерский анализ / Пер. с англ. под ред. И.С. Инюкова. М.: Финансы и статистика, 1989.

58. *Крамер Г.* Методы математической статистики. М.: Мир, 1975.

59. *Куллдорф Г.* Введение в теорию оценивания по группированным и частично группированным выборкам. М.: Наука, 1966. 178 с.

60. *Кунце Х.-И.* Методы физических измерений. М.: Мир, 1989. 216 с.

61. *Кэмпион П.Дж., Барнс Д.Е., Вильямс А.* Практическое руководство по представлению результатов измерений. М.: Энергия, 1979.

62. *Лакин Г.Ф.* Биометрия. М.: Высшая школа, 1990.

63. *Ли Р.* Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. М.: Наука, 1966. 176 с.

64. *Лидов М.Л., Бахшиян Б.Ц., Матасов А.И.* Об одном направлении в проблеме гарантированного оценивания (обзор работ) // Космические исследования. Т. 29, № 5. С. 659–684.

65. *Лидов М.Л., Матасов А.И.* Об одном обобщении задачи о «наихудшей корреляции» // Космические исследования. 1989. Т. 27, № 3. С. 454–456.

66. *Линник Ю.В.* Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1958. 334 с.

67. *Макшанов А.В., Мусаев А.А.* Робастные методы обработки результатов измерений: Учеб. пособие. М.: Оборонгиз, 1980.

68. *Маликов М.Ф.* Основы метрологии. Ч. 1: Учение об измерении / Комитет по делам мер и измерительных приборов при Совете министров СССР. М.: 1949. 480 с.

69. *Матасов А.И.* Введение в теорию гарантирующего оценивания. М.: Изд-во МАИ, 1999.

70. *Матасов А.И.* Метод гарантирующего оценивания. М.: МГУ, 2009. 100 с.

71. *Матасов А.И.* О гарантирующем оценивании параметров при сбоях в измерениях // Космические исследования. 1991. Т. 28, № 3. С. 323–327.

72. *Математическая*, статистическая и компьютерная поддержка качества измерений / Тез. докладов Международного научно-технического семинара. СПб.: ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, 2009. 150 с.

73. *Медич Дж.* Статистически оптимальные линейные оценки и управление. М.: Энергия, 1973. 440 с.

74. *Международный* словарь по метрологии. Основные и общие понятия и соответствующие термины. ИСО, 2007. Исходный текст документа: ISO/IEC Guide 99 : 2007 International vocabulary of metrology — Basic and general concepts and associated terms (VIM).

75. *Методы* электрических измерений: Учеб. пособие / Под ред. Э.И. Цветкова. Л.: Энергоатомиздат, 1990.

76. *Мироновский Л.А.* Функциональное диагностирование динамических систем. М.; СПб.: МГУ-ГРИФ, 1998. 256 с.

77. *Мироновский Л.А., Слаев В.А.* Инварианты в метрологии и технической диагностике // Измерительная техника. 1996. № 6. С. 3–14.

78. *Мироновский Л.А., Слаев В.А.* Оптимальное чебышевское предыскажение и фильтрация // Измерительная техника. 2002. № 2. С. 12–18.

79. *Миф Н.П.* Модели и оценка погрешности технических измерений. М.: Изд-во стандартов, 1976. 144 с.

80. *Михлин С.Г.* Некоторые вопросы теории погрешностей. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988.

81. *Мудров В.И., Кушко В.Л.* Метод наименьших модулей. М.: Знание, 1971.

82. *Мудров В.И., Кушко В.Л.* Методы обработки измерений (квазиправдоподобные оценки). М.: Советское радио, 1976.

83. *Новицкий П.В.* Оценка погрешности результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат, 1990.

84. *Панков А.Р., Семенихин К.В.* О минимаксном оценивании по вероятностному критерию // Автоматика и телемеханика. 2007. № 3. С. 66–82.

85. *Папазов М.Г., Могильный С.Г.* Теория ошибок и способ наименьших квадратов. М.: Недра, 1968. 302 с.

86. *Рабинович С.Г.* Погрешности измерений. Л.: Энергия, 1978. 262 с.

87. *Рао С.Р.* Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968. 548 с.

88. *Рекомендация* МИ 2174–91. Государственная система обеспечения единства измерений. Аттестация алгоритмов и программ обработки данных при измерениях. Основные положения. СПб: Госстандарт России, НПО «ВНИИМ им. Д.И. Менделеева», 1993. 27 с.

См. также: ГОСТ Р 8.654–2009. Государственная система обеспечения единства измерений. Требования к программному обеспечению средств измерений. Основные положения. М.: 2009. 23 с.

89. *Рекомендация* по межгосударственной стандартизации РМГ 29–99 «Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Основные термины и определения».

90. *Рекомендация* по межгосударственной стандартизации РМГ 43–2001 Государственная система обеспечения единства измерений. Применение «Руководства по выражению неопределенности измерений».

91. *Розенберг В.Я.* Введение в теорию точности измерительных систем. М.: Сов. радио, 1975. 378 с.

92. *Романов В.А.* Теория ошибок и способ наименьших квадратов. М.: Углетехзиздат, 1952.

93. *Романов В.Н.* Теория измерений. Точность средств измерений: Учеб. пособие. СПб.: СЗТУ, 2003. 154 с.

94. *Романов В.Н., Комаров В.В.* Анализ и обработка экспериментальных данных: Учеб. пособие. СПб.: СЗТУ, 2002.

95. *Романовский В.И.* Основные задачи теории ошибок. М.: Гостехиздат, 1947. 116 с.

96. *Руководство* по выражению неопределенности измерения / Пер. с англ. под ред. проф. В.А. Слаева: СПб.: ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, 1999. 134 с. Исходный текст документа: Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, ISO, Switzerland, 1993.

97. *Румшисский Л.З.* Математическая обработка результатов эксперимента. М.: Наука, 1971. 192 с.

98. *Русско-англо-французско-немецко-испанский* словарь основных и общих терминов в метрологии // Л.К. Исаев, В.В. Мардин / Пер. с англ.-фр. М.: Изд-во стандартов, 1998.

99. *Саати Т., Кернс К.* Аналитическое планирование. Организация систем. М.: Радио и связь, 1991. 224 с.

100. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993. 316 с.

101. *Савчук В.П.* Обработка результатов измерений. Физическая лаборатория. Ч. 1: Учеб. пособие для студентов вузов — Одесса. ОНПУ, 2002.

102. *Сейдж Э.Э., Мелса Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976. 496 с.

103. *Сизиков В.С.* Устойчивые методы обработки результатов измерений. 1999. 239 с.

104. *Слаев В.А., Чуновкина А.Г.* Аттестация программного обеспечения, используемого в метрологии: Справ. книга. СПб.: Профессионал, 2009. 320 с.

105. *Смоляк С.А., Титаренко Б.П.* Устойчивые методы оценивания. М.: Статистика, 1980.

106. *Соловьев В.Н.* Двойственные экстремальные задачи и их применения к задачам минимаксного оценивания // Успехи математических наук, 1997. Т. 52, № 4. С. 49–86.

107. *Степанов О.А.* Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2009. 496 с.

108. *Тойберт П.* Основы точности результатов измерений / Пер. с нем. М.: Энергоатомиздат, 1988. 88 с.

109. *Ту Дж., Гонсалес Р.* Принципы распознавания образов. М.: Мир, 1978. 412 с.

110. *Тюрин Ю.Н., Макаров А.А.* Анализ данных на компьютере. М.: Финансы и статистика, 1995. 381 с.

111. *Уиттекер Э.И., Робинсон Г.* Математическая обработка результатов измерений / Пер. с англ. М.: ОНТИ, 1933.

112. *Устойчивые* статистические методы оценки данных / Под ред. Л.Р. Лонера, Г.Н. Уилкинсона. М.: Машиностроение, 1984.

113. *Управление* вычислительными процессами / Под ред. М.Б. Игнатьева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1973. 298 с.

114. *Федоров В.В.* Теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1971. 312 с.

115. *Фомин А.Ф., Новоселов О.Н., Плющев А.В.* Отбраковка аномальных результатов измерений. М.: Энергоатомиздат, 1985. 200 с.

116. *Фу К.* Структурные методы в распознавании образов. М.: Мир, 1977. 320 с.

117. *Хампель Ф.* Робастность в статистике. М.: Мир, 1989.

118. *Хьюбер П.* Робастность в статистике. М.: Мир, 1984. 304 с.

119. *Чуновкина А.Г.* Оценивание данных ключевых сличений национальных эталонов. СПб.: Профессионал, 2009. 120 с.

120. *Школин В.П., Фогилов А.Н.* Методы построения космических БЦВМ (обзор). Зарубежная радиоэлектроника. 1978. № 3.

121. *Щиголев Б.М.* Математическая обработка наблюдений. М.: Наука, 1969.

122. *Эльясберг П.Е.* Измерительная информация: сколько ее нужно? Как ее обрабатывать? М.: Наука, 1983.

123. *Яковлев К.П.* Математическая обработка результатов измерений. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 388 с.

124. *Яноши Л.* Теория и практика обработки результатов измерений / Пер. с англ. М,: Мир, 1968. 462 с.

125. *Ярлыков М.С.* Марковская теория оценивания в радиотехнике. М.: Радиотехника, 2004.

Медианная и другие методы фильтрация
(в обработке сигналов и изображений)

126. *Aqaian S., Astola J., Egiazarian K.* Binary Polynomial Transforms and Nonlinear Digital Filters. 1995. 329 p.

127. *Arce G.R., Gallagher N.C.* State Description for the Root Signal Set of Median Filters // IEEE Trans Acoust., Speech and Signal Process. 1982. V. ASSP-30, N 6. P. 894–902.

128. *Astola J., Campbell G.* On Computation of the Running Median // IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Process. April, 1989.

129. *Astola J., Neuvo Y.* An Efficient Tool for Analyzing Weighted Median Filters // IEEE Trans. CAS II: Analog and Digital Processing. 1994. V. 41, N 7. P. 487–489.

130. *Astola J., Neuvo Y.* Optimal Median Type Filters for Exponential Noise Distributions // Signal Process. 1989. V. 17, N 2. P. 95–104.

131. *Dietz P., Carley L.R.* Simple Networks for Pixel Plane Median Filtering // IEEE Trans. CAS, December 1993. V. 40, N 12. P. 799.

132. *Fitch J.P., Coyle E.J., Gallagher N.C.* Root Properties and Convergence Rates of Median Filters // IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Process. 1985. V. ASSP-33, N 1. P. 230–240.

133. *Leroy A.M., Roussecuw P.J.* Robust Regression and Outlier Detection. New York: John Wiley & Sons, 1987. 329 p.

134. *Rabrenovic D., Lutovac M.* Minimum Stopband Attenuation of Cauer Filters without Elliptic Functions and Integrals // IEEE Trans. CAS. September 1993. V. 40, N 9. P. 618.

135. *Айфичер Э., Джервис Б.* Цифровая обработка сигналов. Практический подход. М.: Вильямс. 2004. 992 с.

136. *Апальков И.В., Хрящев В.В.* Удаление шума из изображений на основе нелинейных алгоритмов с использованием ранговой статистики. Ярославский гос. университет, 2007. GraphiCon'2007, Russia, Moscow, June 23–27, 2007.

137. *Мироновский Л.А., Слаев В.А.* Стрип-метод преобразования изображений и сигналов. СПб.: Политехника, 2006. 163 с.

138. *Прэтт У.* Цифровая обработка изображений. М.: Мир, 1982. Кн. 1. 312 с., Кн. 2. 480 с.

139. *Сойфер В.А.* Компьютерная обработка изображений. Ч. 2. Методы и алгоритмы // Соросовский образовательный журнал. 1996. № 3.

140. *Солонина А.И. и др.* Основы цифровой обработки сигналов: Уч. пособие. СПб.: БХВ Петербург, 2005. 768 с. URL:http://lord-n.narod.ru/download/books/walla/dsp/Solonin. Osnovu.DSP.rar.

141. *Хуанг Т.С.* Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений: преобразования и медианные фильтры. М.: Радио и связь, 1984.

142. *Черненко С.А.* Медианный фильтр. http://www.logis-pro.kiev.ua /math_power_medianfilter_ru.html.

143. *Яровой Н.И.* Адаптивная медианная фильтрация. http://www.controlstyle.ru/articles/ science/text/amf.

Оценивание средних

144. *Efron B.* Six Questions Raised by the Bootstrap. In R. LePage and L. Billard, editors, Exploring the Limits of Bootstrap, pages 90–126. Wiley, New York, 1992.

145. *Efron B. and Tibshirani R.J.* An Introduction to the Bootstrap, volume 57 of Monografs of Statistics and Applied Probability. Chapman and Hall, Boca Raton, FL 1993.

146. *Mericoski J.K.* Extending Means of Two Variables to Several Variables // J. Ineq. Pure and Appl. Math. 5(3), 2004, Article 65.

147. *Muliere P.* On Quasi-Means // J. Ineq. Pure and Appl. Math. 3(2), 1991, Article 21.

148. *Васнев С.А.* Статистика: Учеб. пособие. Москва: МГУП, 2001. 170 с.

149. *Джини К.* Средние величины. Москва: Статистика, 1970.

150. *Ефимова М.Р., Петрова Е.В., Румянцев В.Н.* Общая теория статистики: Учеб. М.: ИНФРА-М, 1996.

151. *Измайлова М.О., Рахманкулов И.Ш.* Категория «средняя величина» и ее методологическое значение в научном исследовании. Казань: Изд-во Казанского университета, 1982.

152. *Калинин С.И.* Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана: Учебное пособие по спецкурсу. Киров: Изд-во ВГГУ, 2002.

153. *Колмогоров А.Н.* Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. 470 с. (статья «Об определении среднего». С. 136–138).

154. *Лялин А.В.* Обобщение классических средних величин. Вятский гос. гуманитарный университет. 2005.

155. *Орлов А.И.* Прикладная статистика. М.: Экзамен, 2006. 671 с.

156. *Орлов А.И.* Эконометрика (3-е изд.). М.: Экзамен, 2004. 596 с.

157. *Фишер Р.А.* Статистические методы для исследователей. М.: Госстатиздат, 1958. 257 с.

158. *Чернова Т.В.* Экономическая статистика Учеб. пособ. Таганрог: Изд-во Таганрогского гос. радиотехнического университета, 1999. 140 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ТЕРМИНОЛОГИЯ ПО ХАРАКТЕРИСТИКАМ ТОЧНОСТИ

МЕЖДУНАРОДНЫЙ СЛОВАРЬ ПО МЕТРОЛОГИИ VIM3 [74]

Валидация (аттестация) (VIM3, 2.45) — *верификация*, при которой установленные требования связаны с предполагаемым использованием

Вариация, вызванная влияющей величиной (VIM3, 4.22) — разность показаний для данного значения измеряемой величины или ряда значений величины, полученных с помощью *материальной меры*, обусловленная тем, что *влияющая величина* принимает последовательно два разных значения

Верификация (поверка и/или аттестация *средства измерений*) (VIM3, 2.44) — предоставление объективных свидетельств того, что данный объект полностью удовлетворяет установленным требованиям

Вероятность охвата (VIM3, 2.37) — вероятность того, что совокупность *истинных значений* измеряемой *величины* находится внутри указанного *интервала охвата*

Влияющая величина (VIM3, 2.52) — величина, которая при прямом измерении не влияет на величину, которую фактически измеряют, но влияет на соотношение между показанием и результатом измерения

Воспроизводимость измерений (VIM3, 2.25) — *прецизионность измерений* в *условиях воспроизводимости измерений*

Время отклика (**при скачкообразном воздействии**) (VIM3, 4.23) — промежуток времени от момента, когда значение величины на входе *средства измерений* или *измерительной системы* скачкообразно изменяют до определенного уровня, до момента, когда соответствующее показание достигает установившегося конечного значения и остается в заданных пределах

Диаграмма калибровки (VIM3, 4.30) — графическое выражение соотношения между показанием и соответствующим *результатом измерения*

Зона нечувствительности (мертвая зона) (VIM3, 4.17) — максимальный интервал, в пределах которого значение измеряемой величины может быть изменено в обоих направлениях, не вызывая заметного изменения соответствующего *показания*

Избирательность измерительной системы (VIM3, 4.13) — свойство *измерительной системы*, применяемой согласно установленной *методике измерений*, когда система дает измеренные значения величины для одной или нескольких измеряемых величин такое, что значения каждой измеряемой величины независимы от других измеряемых величин или других величин в явлении, физическом объекте или веществе в процессе исследования

Измерение (VIM3, 2.1) — процесс экспериментального получения одного или более значений величины, которые могут быть обоснованно приписаны величине

Измерительная система (VIM3, 3.2) — набор из одного или более *средств измерений*, а часто и других устройств, включающий при необходимости реактивы или источники питания, собранный и приспособленный для получения информации об измеренных значениях величин в пределах установленных *интервалов* для величин указанного рода

Измерительный преобразователь (VIM3, 3.7) — устройство, используемое при *измерении*, которое обеспечивает на выходе величину, находящуюся в определенном соотношении с входной величиной

Инструментальная неопределенность (VIM3, 4.24) — составляющая *неопределенности измерений*, обусловленная применяемым *средством измерений* или *измерительной системой*

Инструментальное смещение (VIM3, 4.20) — разность между средним повторных показаний и *опорным значением величины*

Инструментальный дрейф (VIM3, 4.21) — непрерывное или ступенчатое изменение показаний во времени, вызванное изменениями метрологических свойств *средства измерений*

Интервал измерений (VIM3, 4.7) — множество значений величин одного рода, которые могут быть измерены данным *средством измерений* или *измерительной системой* с установленной *инструментальной неопределенностью* при определенных условиях

Интервал охвата (VIM3, 2.36) — интервал, основанный на имеющейся информации, который содержит совокупность *истинных значений* измеряемой *величины* с заданной вероятностью

Истинное значение величины (VIM3, 2.11) — значение величины, которое соответствует определению величины

ПРИМЕЧАНИЕ. В концепции *погрешности* при описании *измерения* истинное значение величины рассматривается как единственное и на практике недостижимое. Концепция *неопределенности* признает, что в действительности по причине неполного описания величины существует не единственное истинное значение величины, а, скорее — набор истинных значений, согласующихся с определением. Однако эта совокупность значений, в принципе и на практике, остается неизвестной. Другие подходы вообще избегают понятия истинного значения величины и опираются на понятие *метрологической совместимости результатов измерения* для оценивания их достоверности

Калибровка (градуировка) (VIM3, 2.39) — операция, с помощью которой при заданных условиях на первом этапе устанавливают соотношение между значениями величины с *неопределенностями измерений*, которые обеспечивают эталоны, и соответствующими *показаниями* вместе со связанными с ними *неопределенностями*, а на втором этапе используют эту информацию, чтобы установить соотношение, позволяющее получить *результат измерения*, исходя из *показания*

Калибровочная кривая (градуировочная кривая) (VIM3, 4.31) — выражение соотношения между *показанием* и соответствующим измеренным значением величины

Класс точности (VIM3, 4.25) — классификационная характеристика *средств измерений* или *измерительных систем*, удовлетворяющих установленным метрологическим требованиям, соблюдение которых необходимо для поддержания *погрешностей измерений* или *инструментальных неопределенностей* в установленных пределах при определенных условиях эксплуатации

Коэффициент охвата (VIM3, 2.38) — число больше единицы, на которое умножают *суммарную стандартную неопределенность измерений* для получения *расширенной неопределенности измерений*

Максимальная допускаемая погрешность измерения (VIM3, 4.26) — крайнее значение *погрешности измерения* относительно известного *опорного значения величины*, разрешенное спецификацией или нормативными документами для данного *измерения*, *средства измерений* или *измерительной системы*

Материальная мера (VIM3, 3.6) — *средство измерений*, которое воспроизводит в процессе использования или постоянно хранит приписанные значения величин одного или более родов

Методика измерений (процедура измерений) (VIM3, 2.6) — детальное описание *измерения* в соответствии с одним или более принципами измерений и данным методом измерений, которое основано на *модели измерений* и включает вычисления, необходимые для получения *результата измерения*

Метрологическая прослеживаемость (VIM3, 2.41) — свойство *результата измерения*, в соответствии с которым результат может быть соотнесен с основой для сравнения через документированную непрерывную цепь *калибровок*, каждая из которых вносит вклад в *неопределенность измерений*

Метрологическая совместимость результатов измерения (VIM3, 2.47) — свойство множества *результатов измерений* для определенной измеряемой величины, при котором абсолютное значение разности любой пары измеренных значений величины, полученное из двух различных *результатов измерений*, меньше, чем некоторое выбранное кратное *стандартной неопределенности измерений* этой разности

Метрологическая сопоставимость результатов измерения (VIM3, 2.46) — сопоставимость *результатов измерений* для величин данного рода, которые метрологически прослеживаются к одной и той же основе для сравнения

Модель измерений (VIM3, 2.48) — математическая связь между всеми величинами, о которых известно, что они участвуют в *измерении*

Неопределенность измерений (VIM3, 2.26) — неотрицательный параметр, характеризующий рассеяние значений величины, приписываемых измеряемой величине на основании используемой информации

Номинальное значение величины (VIM3, 4.6) — округленное или приближенное значение величины, приписанное *средству измерений* или *измерительной системе*, которым следует руководствоваться при их применении

Нормальные условия эксплуатации (VIM3, 4.11) — условия эксплуатации, предписанные для оценивания характеристик *средства измерений* или *измерительной системы* или для сравнения *результатов измерений*

Нормированные условия эксплуатации (VIM3, 4.9) — условия эксплуатации, которые должны выполняться во время *измерения* для того, чтобы *средство измерений* или *измерительная система* функционировали в соответствии со своим назначением

Опорное значение величины (VIM3, 5.18) — значение величины, которое используется как основа для сопоставления со значениями величин того же рода

Оценивание неопределенности измерений по типу А (VIM3, 2.28) — оценивание составляющей *неопределенности измерений* путем статистического анализа измеренных значений величины, получаемых при определенных условиях *измерения*

Оценивание неопределенности измерений по типу В (VIM3, 2.29) — оценивание составляющей *неопределенности измерений* способами, отличными от *оценивания неопределенности измерений по типу А*

Погрешность измерения (VIM3, 2.16) — разность между измеренным значением величины и *опорным значением величины*

Показание (VIM3, 4.1) — значение величины, формируемое *средством измерений* или *измерительной системой*

Порог реагирования (VIM3, 4.16) — наибольшее изменение значения измеряемой величины, не вызывающее заметного изменения соответствующего *показания*

Правильность измерений (VIM3, 2.14) — близость среднего арифметического бесконечно большого числа повторно измеренных значений величины к *опорному значению величины*

Предельные условия эксплуатации (VIM3, 4.10) — крайние условия эксплуатации, которые *средство измерений* или *измерительная система* должны выдерживать без повреждения и без ухудшения их установленных метрологических характеристик, если они впоследствии будут использоваться в своих *нормированных условиях эксплуатации*

Прецизионность измерений (VIM3, 2.15) — близость между *показаниями* или измеренными значениями величины, полученными при повторных измерениях для одного и того же или аналогичных объектов при заданных условиях

Разрешение (разрешающая способность) (VIM3, 4.14) — наименьшее изменение измеряемой величины, которое является причиной заметного изменения соответствующего *показания*

Расширенная неопределенность измерений (VIM3, 2.35) — произведение *суммарной стандартной неопределенности* и коэффициента больше единицы

Результат измерения (VIM3, 2.9) — набор значений величины, приписываемых измеряемой величине вместе с любой другой доступной и существенной информацией

Систематическая погрешность измерения (VIM3, 2.17) — составляющая *погрешности измерения*, которая остается постоянной или закономерно изменяется при повторных измерениях

Случайная погрешность измерения (VIM3, 2.19) — составляющая *погрешности измерения*, которая при повторных измерениях изменяется непредсказуемым образом

Смещение (при измерении) (VIM3, 2.18) — оценка *систематической погрешности измерения*

Средство измерений (VIM3, 3.1) — средство, используемое для выполнения *измерений*, в том числе в сочетании с одним или несколькими дополнительными устройствами

Стабильность средства измерений (VIM3, 4.19) — свойство *средства измерений*, отражающее неизменность во времени его метрологических характеристик

Стандартная неопределенность измерений (VIM3, 2.30) — *неопределенность измерений*, выраженная в виде стандартного отклонения

Суммарная стандартная неопределенность измерений (VIM3, 2.31) — *стандартная неопределенность измерений*, которую получают, исходя из индивидуальных *стандартных неопределенностей измерений*, связанных с входными величинами в *модели измерений*

Сходимость измерений (повторяемость) (VIM3, 2.21) — *прецизионность измерений* в *условиях сходимости измерений*

Точность измерений (VIM3, 2.13) — близость измеренного значения к *истинному значению* измеряемой *величины*

Условия воспроизводимости измерений (VIM3, 2.24) — один из наборов условий измерений, включающий разные местоположения, разные *измерительные системы*, участие разных операторов и выполнение повторных измерений на одном и том же или подобных объектах

Условия стабильности при эксплуатации (VIM3, 4.8) — условия эксплуатации *средства измерений* или *измерительной системы*, при которых соотношение, установленное при *калибровке*, остается неизменным, даже если измеряемая величина изменяется со временем

Условия сходимости измерений (VIM3, 2.20) — один из наборов условий измерений, включающий применение одной и той же *методики измерений*, той же *измерительной системы*, участие тех же операторов, те же рабочие условия, то же местоположение и выполнение повторных измерений на одном и том же или подобных объектах в течение короткого промежутка времени

Функция измерений (VIM3, 2.49) — функция от величин, значение которой, вычисленное с использованием известных значений входных величин в *модели измерений*, является измеренным значением выходной величины в этой *модели измерений*

Чувствительность измерительной системы (VIM3, 4.12) — отношение изменения *показаний измерительной системы* к соответствующему изменению значения величины, которая измеряется

Чувствительный элемент (первичный измерительный преобразователь, датчик, сенсор) (VIM3, 3.8) — элемент *измерительной системы*, на который непосредственно воздействует явление, физический объект или вещество, являющееся носителем величины, подлежащей измерению

РЕКОМЕНДАЦИЯ ПО МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЙ СТАНДАРТИЗАЦИИ РМГ 29–99 [89]

Градуировка средств измерений (13.24) — определение *градуировочной характеристики средства измерений*

Градуировочная характеристика средства измерений (6.52) — зависимость между значениями величин на входе и выходе средства измерений, полученная экспериментально

Действительное значение меры (6.48) — значение величины, приписанное мере на основании ее *калибровки* или *поверки*

Действительное значение физической величины (3.7) — значение физической величины, полученное экспериментальным путем и настолько близкое к истинному значению, что в поставленной *измерительной задаче* может быть использовано вместо него

Диапазон измерений средства измерений (6.46) — область значений величины, в пределах которой нормированы допускаемые пределы погрешности средства измерений

Динамическая погрешность измерений (9.26) — *погрешность результата измерений*, свойственная условиям динамического измерения

Динамическая погрешность средства измерений (10.10) — *погрешность средства измерений*, возникающая при измерении изменяющейся (в процессе измерений) физической величины

Доверительные границы погрешности результата измерений (9.16) — наибольшее и наименьшее значения погрешности измерений, ограничивающие интервал, внутри которого с заданной вероятностью находится искомое (истинное) значение *погрешности результата измерений*

Дополнительная погрешность средства измерений (10.8) — составляющая *погрешности средства измерений*, возникающая дополнительно к *основной погрешности* вследствие отклонения какой-либо из *влияющих величин* от *нормального* ее *значения* или вследствие ее выхода за пределы нормальной области значений

Дрейф показаний средства измерений (6.54) — изменение показаний средства измерений во времени, обусловленное изменением влияющих величин или других факторов

Измерительная задача (5.18) — задача, заключающаяся в определении значения физической величины путем ее измерения с требуемой точностью в данных условиях измерений

Измерительная информация (5.17) — информация о значениях физических величин

Измерительно-вычислительный комплекс (6.15) — функционально объединенная совокупность средств измерений, ЭВМ и вспомогательных устройств, предназначенная для выполнения в составе измерительной системы конкретной *измерительной задачи*

Измерительный сигнал (5.16) — сигнал, содержащий количественную информацию об измеряемой физической величине

Инструментальная погрешность измерения (9.3) — составляющая погрешности измерения, обусловленная *погрешностью* применяемого *средства измерений*

Исправленный результат измерения (8.3) — полученное при измерении значение величины путем введения в него необходимых поправок на действие *систематических погрешностей*

Калибровка средств измерений (13.23) — совокупность операций, устанавливающих соотношение между значением величины, полученным с помощью данного средства измерений, и соответствующим значением величины, определенным с помощью эталона с целью определения действительных метрологических характеристик этого средства измерений

Класс точности средств измерений (10.15) — обобщенная характеристика данного *типа средств измерений*, как правило, отражающая уровень их *точности*, выражаемая пределами допускаемых *основной* и *дополнительной погрешностей*, а также другими характеристиками, влияющими на *точность*.

Комплектная поверка (13.20) — *поверка*, при которой определяют *метрологические характеристики средства измерений*, присущие ему как единому целому

Методика выполнения измерений (7.11) — установленная совокупность операций и правил при измерении, выполнение которых обеспечивает получение результатов измерений с гарантированной *точностью* в соответствии с принятым методом

Метрологическая аттестация средств измерений (13.26) — признание метрологической службой узаконенным для применения средства измерений единичного производства (или ввозимого единичными экземплярами из-за границы) на основании тщательных исследований его свойств

Метрологическая исправность средства измерений (6.59) — состояние средства измерений, при котором все нормируемые *метрологические характеристики* соответствуют установленным требованиям

Метрологическая надежность средства измерений (6.60) — надежность средства измерений в части сохранения *метрологической исправности*

Метрологический отказ средства измерений (6.61) — выход *метрологической характеристики* за установленные пределы

Метрологическая характеристика средства измерений (6.42) — характеристика одного из свойств средства измерений, влияющая на результат измерений и на его *погрешность*

Неисключенная систематическая погрешность (9.7) — составляющая *погрешности результата измерений*, обусловленная погрешностями вычисления и введения поправок на влияние *систематических погрешностей* или *систематической погрешностью*, поправка на действие которой не введена вследствие ее малости

Неисправленный результат измерения (8.2) — значение величины, полученное при измерении до введения в него поправок, учитывающих *систематические погрешности*

Неравноточные измерения (5.3) — ряд измерений какой-либо величины, выполненных различающимися по *точности* средствами измерений и (или) в разных условиях

Нестабильность средства измерений (10.13) — изменение *метрологических характеристик средства измерений* за установленный интервал времени

Номинальное значение меры (6.47) — значение величины, приписанное мере или партии мер при изготовлении

Нормальная область значений влияющей величины (11.3) — область значений влияющей величины, в пределах которой изменением результата измерений под ее воздействием можно пренебречь в соответствии с установленными нормами *точности*

Нормальное значение влияющей величины (11.2) — значение влияющей величины, установленное в качестве *номинального*

Нормальные условия измерений (11.1) — условия измерений, характеризуемые совокупностью значений или областей значений влияющих величин, при которых изменением результата измерений пренебрегают вследствие малости

Нормируемые метрологические характеристики средства измерений (10.17) — совокупность *метрологических характеристик* данного *типа средств измерений*, устанавливаемая нормативными документами на средства измерений

Объект измерения (5.19) — тело (физическая система, процесс, явление и т. д.), которое характеризуется одной или несколькими измеряемыми физическими величинами

Основная погрешность средства измерений (10.7) — *погрешность средства измерений*, применяемого в *нормальных условиях*

Передача размера единицы (12.21) — приведение единицы физической величины, хранимой поверяемым средством измерений, к размеру единицы, воспроизводимой или хранимой эталоном, осуществляемое при их *поверке* (*калибровке*)

Поверка средств измерений (13.15) — установление органом государственной метрологической службы (или другим уполномоченным органом, организацией) пригодности средства измерений к применению на основании экспериментального определения *метрологических характеристик* и подтверждения их соответствия установленным обязательным требованиям

Погрешность (измерения) из-за изменений условий измерения (9.5) — составляющая *систематической погрешности измерения*, являющаяся следствием неучтенного влияния отклонения в одну сторону какого-либо из параметров, характеризующих условия измерений, от установленного значения

Погрешность меры (10.11) — разность между *номинальным значением меры* и *действительным значением* воспроизводимой ею *величины*

Погрешность метода измерений (9.4) — составляющая *систематической погрешности измерений*, обусловленная несовершенством принятого метода измерений

Погрешность результата измерений (9.1) — отклонение результата измерения от истинного (*действительного*) *значения измеряемой величины*

Погрешность средства измерений (10.1) — разность между показанием средства измерений и истинным (*действительным*) *значением измеряемой физической величины*

Порог чувствительности средства измерений (6.50) — характеристика средства измерений в виде наименьшего значения изменения физической величины, начиная с которого может осуществляться ее измерение данным средством

Поэлементная поверка (13.21) — *поверка*, при которой значения *метрологических характеристик средств измерений* устанавливаются по *метрологическим характеристикам* его элементов или частей

Предел допускаемой погрешности средства измерений (10.16) — наибольшее значение *погрешности средств измерений*, устанавливаемое нормативным документом для данного *типа средств измерений*, при котором оно еще признается годным к применению

Предельные условия измерений (11.7) — условия измерений, характеризуемые экстремальными значениями измеряемой и влияющих величин, которые средство измерений может выдержать без разрушений и ухудшения его *метрологических характеристик*

Приведенная погрешность средства измерений (10.6) — относительная *погрешность*, выраженная отношением абсолютной *погрешности средства измерений* к условно принятому значению величины, постоянному во всем *диапазоне измерений* или в части диапазона

Промах (9.27) — *погрешность результата* отдельного *измерения*, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда

Рабочая область значений влияющей величины (11.4) — область значений влияющей величины, в пределах которой нормируют *дополнительную погрешность* или изменение показаний средства измерений

Равноточные измерения (5.2) — ряд измерений какой-либо величины, выполненных одинаковыми по *точности средствами измерений* в одних и тех же условиях с одинаковой тщательностью

Рассеяние результатов в ряду измерений (9.12) — несовпадение результатов измерений одной и той же величины в ряду *равноточных измерений*, как правило, обусловленное действием *случайных погрешностей*

Систематическая погрешность средства измерений (10.2) — составляющая *погрешности средства измерений*, принимаемая за постоянную или закономерно изменяющуюся

Случайная погрешность средства измерений (10.3) — составляющая *погрешности средства измерений*, изменяющаяся случайным образом

Средства поверки (6.56) — эталоны, поверочные установки и другие средства измерений, применяемые при *поверке* в соответствии с установленными правилами

Статическая погрешность измерений (9.25) — погрешность результата измерений, свойственная условиям статического измерения

Статическая погрешность средства измерений (10.9) — *погрешность* средства измерений, применяемого при измерении физической величины, принимаемой за неизменную

Субъективная погрешность измерения (9.6) — составляющая *систематической погрешности*, обусловленная индивидуальными особенностями оператора

Суммарная погрешность результата (9.30) — *погрешность результата измерений*, состоящая из суммы *случайных* и *неисключенных систематических погрешностей*, принимаемых за случайные

Тип средства измерений (6.57) — совокупность средств измерений одного и того же назначения, основанных на одном и том же принципе действия, имеющих одинаковую конструкцию и изготовленных по одной и той же технической документации

Точностные характеристики средства измерений (10.18) — совокупность *метрологических характеристик средства измерений*, влияющих на *погрешность измерения*

Точность средства измерений (10.14) — характеристика качества средства измерений, отражающая близость его *погрешности* к нулю

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОГРЕШНОСТИ

Введение

В 1993 г. под эгидой Международного Комитета по Мерам и Весам (МКМВ), Международной Электротехнической Комиссии (МЭК), Международной Организации по Стандартизации (ИСО), Международной Организации по Законодательной Метрологии (МОЗМ), Международного Союза по Теоретической и Прикладной Физике, Международного Союза по Теоретической и Прикладной Химии и Международной Федерации Клинической Химии разработано «Руководство по выражению неопределенности измерения» [96] (далее — *Руководство*).

Целями *Руководства* являются:

– обеспечение полной информации о том, как составлять отчеты о неопределенностях измерений;

– предоставление основы для международного сопоставления результатов измерений;

– предоставление универсального метода для выражения и оценивания неопределенности измерений, применимого ко всем видам измерений и всем типам данных, используемых при измерениях.

Существуют два подхода к оцениванию точности измерений. Один подход основан на понятиях и терминах, используемых в *Руководстве*, другой — на понятиях и терминах, применяемых в основополагающих нормативных документах (НД) в области метрологии, используемых в национальных (государственных) системах обеспечения единства измерений государств — участников Соглашения (далее НД ГСИ по метрологии).

Задачами рекомендации являются:

– изложение основных положений *Руководства* и рекомендаций по их практическому применению;

– сравнительный анализ двух подходов к описанию точности измерений;

– показ степени соответствия между формами представления результатов измерений, используемыми в НД ГСИ, и формой, используемой в *Руководстве.*

1. Область применения

Документ содержит практические рекомендации по применению *Руководства* и показывает соответствие между формами представления результатов измерений, используемыми в НД ГСИ по метрологии, и формой, используемой в *Руководстве*.

2. Нормативные ссылки, определения и обозначения

2.1. В документе использованы термины, определения и обозначения, способы расчетов, принятые в следующих межгосударственных НД по метрологии:

ГОСТ 16263–70 ГСИ. Метрология. Термины и определения [34] (РМГ 29–99 ГСИ. Метрология. Основные термины и определения [89])

ГОСТ 8.207–76 ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений

ГОСТ 8.381–80 ГСИ. Эталоны. Способы выражения погрешностей

2.2. В документе использованы следующие основные термины, определенные в *Руководстве*.

Неопределенность (измерений) — параметр, связанный с результатом измерений и характеризующий рассеяние значений, которые могли бы быть обоснованно приписаны измеряемой величине.

Стандартная неопределенность ($\boldsymbol{u}$) — неопределенность результата измерений, выраженная в виде среднего квадратического отклонения (СКО).

Суммарная стандартная неопределенность ($\boldsymbol{u}_\mathrm{c}$) — стандартная неопределенность результата измерений, полученного через значения других величин, равная положительному квадратному корню суммы членов, причем члены являются дисперсиями или ковариациями этих других величин, взвешенными в соответствии с тем, как результат измерений изменяется при изменении этих величин.

Расширенная неопределенность (***U***) — величина, определяющая интервал вокруг результата измерений, в пределах которого, как можно ожидать, находится большая часть распределения значений, которые с достаточным основанием могли бы быть приписаны измеряемой величине.

2.3. В Рекомендации использованы следующие обозначения:

x_i — оценка i-й входной величины;

x_{il} — l-й результат измерения i-й входной величины;

$\overline{x}_i$ — среднее арифметическое значение i-й входной величины;

y — оценка измеряемой величины;

u — стандартная неопределенность;

u_A — стандартная неопределенность, оцененная по типу А;

u_B — стандартная неопределенность, оцененная по типу В;

$u(x_i)$ — стандартная неопределенность оценки i-й входной величины;

u_i — стандартная неопределенность единичного измерения i-й входной величины;

$r(x_i, x_j)$ — коэффициент корреляции оценок i-й и j-й входных величин;

u_c — суммарная стандартная неопределенность;

k — коэффициент охвата;

$t_p(\nu)$ — квантиль распределения Стьюдента для доверительной вероятности (уровня доверия) p и числа степеней свободы ν;

ν_i — число степеней свободы при вычислении неопределенности оценки i-й входной величины;

ν_{eff} — оценка эффективного числа степеней свободы, принятая в *Руководстве*;

U — расширенная неопределенность;

U_p — расширенная неопределенность для уровня доверия p;

S – среднее квадратическое отклонение (СКО) случайной погрешности результата измерений;

$S(x_i)$ — СКО единичного измерения при многократных измерениях i-й входной величины;

$S(\overline{x}_i)$ — СКО среднего арифметического значения при многократных измерениях i-й входной величины;

S_Σ — СКО суммы случайных и неисключенных систематических погрешностей;

K – коэффициент при суммировании систематической и случайной составляющих суммарной погрешности, принятый в НД ГСИ по метрологии;

$f_{эфф}$ — оценка эффективного числа степеней свободы, принятая в НД ГСИ по метрологии;

Δ_p — доверительные границы суммарной погрешности результата измерений для доверительной вероятности p;

z_p — квантиль нормального распределения для доверительной вероятности p;

θ_i — границы i-й составляющей неисключенной систематической погрешности;

$\theta(p)$ — доверительные границы систематической погрешности измерения для доверительной вероятности p;

b_{i-} — нижняя граница отклонения измеряемой величины от результата измерений;

b_{i+} — верхняя граница отклонения измеряемой величины от результата измерений;

b_i — симметричные границы отклонения измеряемой величины от результата измерений.

3. Рекомендации по применению *Руководства*

3.1. Основным количественным выражением неопределенности измерений является стандартная неопределенность (u) (см. п. 2).

3.2. Основным количественным выражением неопределенности измерений, при котором результат определяют через значения других величин, является суммарная стандартная неопределенность (u_c) (см. п. 2).

3.3. В тех случаях, когда это необходимо, вычисляют расширенную неопределенность (U) (см. п. 2) по формуле:

$$U = ku_c, \tag{П 2.1}$$

где k — коэффициент охвата (числовой коэффициент, используемый как множитель при суммарной стандартной неопределенности для получения расширенной неопределенности).

3.4. В *Руководстве* измеряемую величину Y определяют как:

$$Y = f(X_1, ..., X_m), \tag{П 2.2}$$

где X_1, ..., X_m — входные величины (непосредственно измеряемые или другие величины, влияющие на результат измерения); m — число этих величин; f — вид функциональной зависимости.

3.5. Оценку измеряемой величины y вычисляют как функцию оценок входных величин x_1, ..., x_m после внесения поправок на все известные источники неопределенности, имеющие систематический характер:

$$y = f(x_1, ..., x_m). \tag{П 2.3}$$

3.6. Затем вычисляют стандартные неопределенности входных величин $u(x_i)$ (i = 1, ..., m) и возможные коэффициенты корреляции $r(x_i, x_j)$ оценок i-й и j-й входных величин (j = 1, ..., m).

3.7. Различают два типа вычисления стандартной неопределенности:

– вычисление по типу А — путем статистического анализа результатов многократных измерений;

– вычисление по типу В — с использованием других способов.

3.8. Вычисление стандартной неопределенности u.

3.8.1. Вычисление стандартной неопределенности ($u_\text{А}$) по типу А.

3.8.1.1. Исходными данными для вычисления являются результаты многократных измерений: x_{i1}, ..., x_{in_i} (i = 1, ..., m), где n_i — число измерений i-й входной величины.

3.8.1.2. Стандартную неопределенность единичного измерения i-й входной величины вычисляют по формуле:

$$u_{\text{А},\,i} = \sqrt{\frac{1}{n_i - 1}\sum_{q=1}^{n_i}\left(x_{iq} - \overline{x_i}\right)^2}, \tag{П 2.4}$$

где $\overline{x_i} = \dfrac{1}{n_i}\sum\limits_{q=1}^{n_i} x_{iq}$ — среднее арифметическое результатов измерений i-й входной величины.

3.8.1.3. Стандартную неопределенность измерений i-й входной величины, при которых результат определяют как среднее арифметическое, вычисляют по формуле:

$$u_A(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n_i(n_i - 1)} \sum_{q=1}^{n_i} \left(x_{iq} - \overline{x_i}\right)^2}. \qquad (\text{П } 2.5)$$

3.8.2. Вычисление стандартной неопределенности ($u_{\text{В}}$) по типу В.

3.8.2.1. Исходными данными для вычисления является следующая информация:

– данные предшествовавших измерений величин, входящих в уравнение измерения; сведения о виде распределения вероятностей;

– данные, основанные на опыте исследователя или общих знаниях о поведении и свойствах соответствующих приборов и материалов;

– неопределенности констант и справочных данных;

– данные поверки, калибровки; сведения изготовителя о приборе и др.

3.8.2.2. Неопределенности этих данных обычно представляют в виде границ отклонения значения величины от ее оценки. Наиболее распространенный способ формализации неполного знания о значении величины заключается в постулировании равномерного закона распределения возможных значений этой величины в указанных (нижней и верхней) границах ($[b_{i-}, b_{i+}]$ для i-й входной величины). При этом стандартную неопределенность, вычисляемую по типу В, определяют по формуле:

$$u_{\text{В}}(x_i) = \frac{b_{i+} - b_{i-}}{2\sqrt{3}}, \qquad (\text{П } 2.6)$$

а для симметричных границ ($\pm b_i$) —

$$u_{\text{В}}(x_i) = b_i / \sqrt{3}. \qquad (\text{П } 2.7)$$

3.8.2.3. В случае других законов распределения формулы для вычисления неопределенности по типу В будут иными.

3.8.3. Для вычисления коэффициента корреляции используют согласованные пары измерений (x_{il}, x_{jl}) ($l = 1, ..., n_{ij}$, где n_{ij} — число согласованных пар результатов измерений):

$$r(x_i, x_j) = \frac{\sum_{l=1}^{n_{ij}} (x_{il} - \overline{x}_i)(x_{jl} - \overline{x}_j)}{\sqrt{\sum_{l=1}^{n_{ij}} (x_{il} - \overline{x}_i)^2 \sum_{l=1}^{n_{ij}} (x_{jl} - \overline{x}_j)^2}}. \qquad (\text{П } 2.8)$$

3.9. Вычисление суммарной стандартной неопределенности (u_{c}).

3.9.1. В случае некоррелированных оценок $x_1, ..., x_m$ суммарную стандартную неопределенность вычисляют по формуле:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i). \qquad (\text{П } 2.9)$$

3.9.2. В случае коррелированных оценок $x_1, ..., x_m$ суммарную стандартную неопределенность вычисляют по формуле:

$$u_{\text{c}}^2(y) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j), \qquad (\text{П } 2.10)$$

где $r(x_i, x_j)$ — коэффициент корреляции; $u(x_i)$ — стандартная неопределенность i-й входной величины, вычисленная по типу А или по типу В.

3.10. Выбор коэффициента охвата k при вычислении расширенной неопределенности.

3.10.1. В общем случае коэффициент охвата выбирают в соответствии с формулой:

$$k = t_p(\nu_{eff}), \qquad (\text{П } 2.11)$$

где $t_p(\nu_{eff})$ — квантиль распределения Стьюдента с эффективным числом степеней свободы ν_{eff} и доверительной вероятностью (уровнем доверия) p.

3.10.2. Число степеней свободы определяют по формуле:

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^{m} \frac{u^4(x_i)}{\nu_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^4}, \qquad (П\ 2.12)$$

где ν_i — число степеней свободы при определении оценки i-й входной величины:

$\nu_i = n_i - 1$ для вычисления неопределенностей по типу А;

$\nu_i = \infty$ для вычисления неопределенностей по типу В.

3.10.3. Во многих практических случаях при вычислении неопределенностей измерений делают предположение о нормальности закона распределения возможных значений измеряемой величины и полагают:

$$k = 2 \quad \text{при} \quad p \approx 0{,}95 \qquad \text{и} \qquad k = 3 \quad \text{при} \quad p \approx 0{,}99.$$

При предположении о равномерности закона распределения полагают:

$$k = 1{,}65 \quad \text{при} \quad p \approx 0{,}95 \qquad \text{и} \qquad k = 1{,}71 \quad \text{при} \quad p \approx 0{,}99.$$

3.11. При представлении результатов измерений *Руководство* рекомендует приводить достаточное количество информации для возможности проанализировать или повторить весь процесс получения результата измерений и вычисления неопределенностей измерений, а именно:

– алгоритм получения результата измерений;

– алгоритм расчета всех поправок и их неопределенностей;

– неопределенности всех используемых данных и способы их получения;

– алгоритмы вычисления суммарной и расширенной неопределенностей (включая значение коэффициента k).

4. Соответствие между формами представления результатов измерений, используемыми в НД ГСИ по метрологии, и формой, используемой в *Руководстве*

4.1. При проведении совместных работ с зарубежными странами, в работах, проводимых под эгидой МКМВ и его Консультативных Комитетов, при подготовке публикаций в зарубежной печати, при публикациях работ по определению физических констант и в других случаях, связанных с выполнением международных метрологических работ, целесообразно руководствоваться нижеприведенными схемами.

4.1.1. При вычислении неопределенности измерений следует придерживаться последовательности, показанной на рис. П.1.

4.2. Сопоставление способов оценивания доверительных границ погрешности и вычисления расширенной неопределенности измерений приведено в таблице П.1.

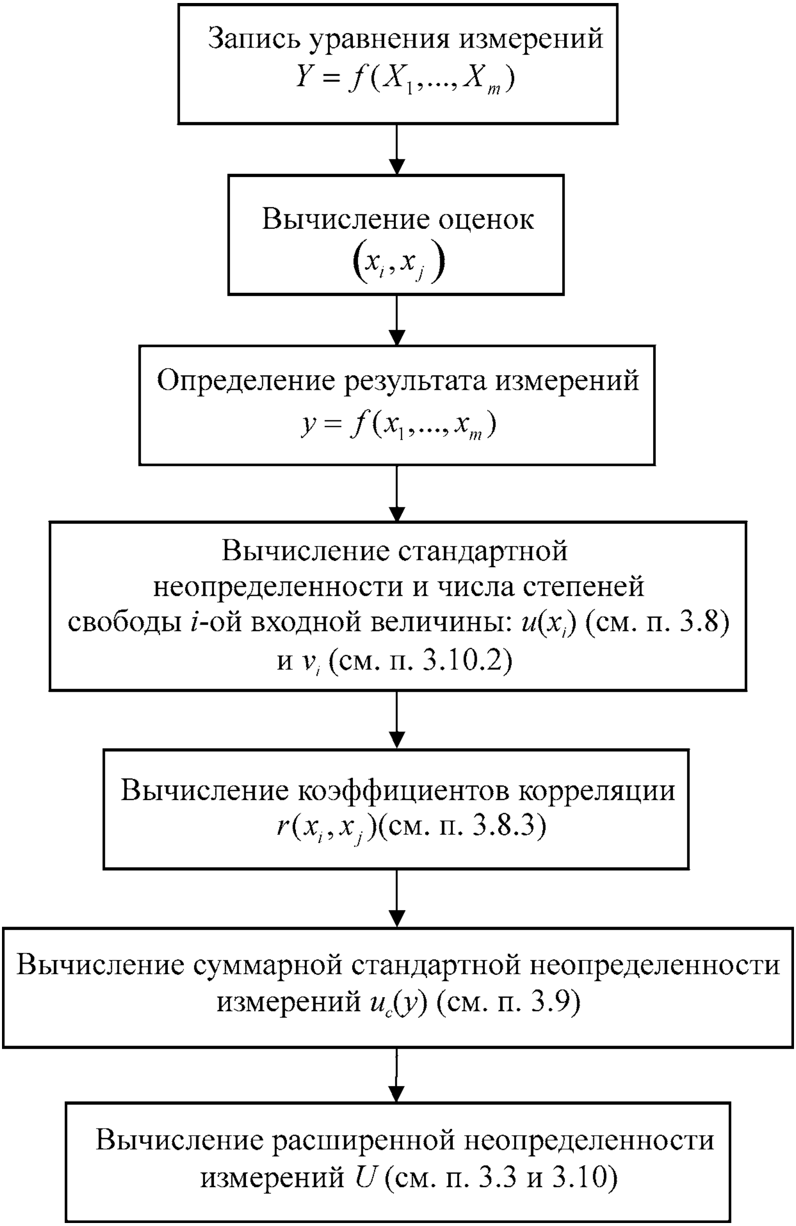

Запись уравнения измерений
$Y = f(X_1, ..., X_m)$
Вычисление оценок
(x_i, x_j)
Определение результата измерений
$y = f(x_1, ..., x_m)$
Вычисление стандартной неопределенности и числа степеней свободы i-ой входной величины: $u(x_i)$ (см. п. 3.8) и v_i (см. п. 3.10.2)
Вычисление коэффициентов корреляции
$r(x_i, x_j)$(см. п. 3.8.3)
Вычисление суммарной стандартной неопределенности измерений $u_c(y)$ (см. п. 3.9)
Вычисление расширенной неопределенности измерений U (см. п. 3.3 и 3.10)

Рис. П.1.

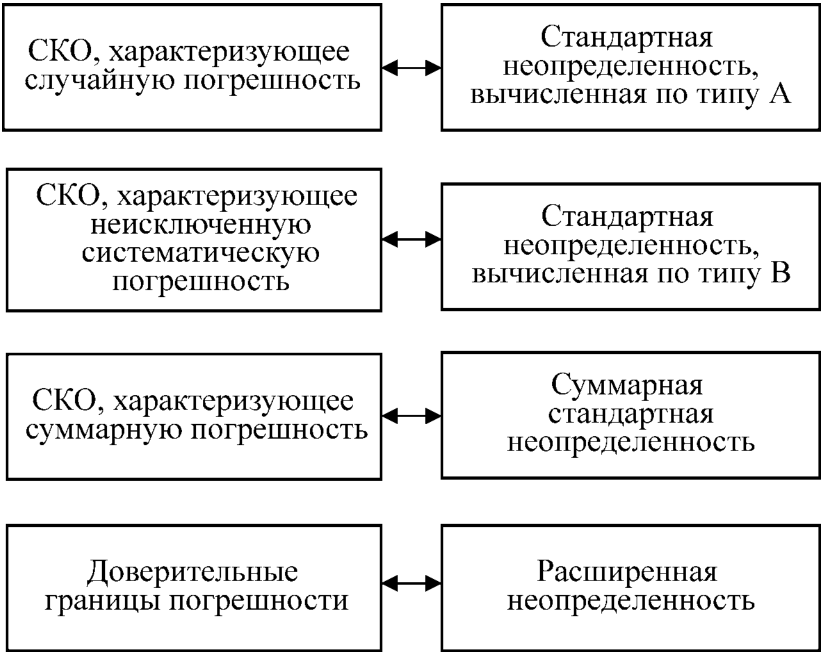
Таблица П.1

НД ГСИ по метрологии	$\frac{\theta(p)}{S} < 0,8$	$0,8 \le \frac{\theta(p)}{S} \le 8$	$\frac{\theta(p)}{S} > 8$
	$\Delta_p = t_p(f_{эфф})S,$ $S = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 S^2(\overline{x}_i)}$	$\Delta_p = \frac{t_p(f_{эфф})S + \theta(p)}{S + \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \frac{\theta_i^2}{3}}}\sqrt{S^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \frac{\theta_i^2}{3}}$ $\theta(p) = K\sqrt{\sum_{i=1}^{m_{сист}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \theta_i^2},$ $K = 1,1$ при $p = 0,95;$ $K = 1,4$ при $p = 0,99;$ $m_{сист} > 4$;	$\Delta_p = \theta(p)$
	$f_{эфф} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 S^2(\overline{x}_i)\right)^2 - \frac{2}{m+1}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^4 S^4(\overline{x}_i)}{\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^4 S^4(\overline{x}_i)}$		

Окончание табл. П.1

<table>
<tr><td rowspan="2">Руководство</td><td>$$U_p = t_p(\nu_{eff})\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)},$$
$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^{m}\frac{u^4(x_i)}{\nu_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^4},$$
$\nu_i = n_i - 1$ для неопределенностей, вычисленных по типу А;
$\nu_i = \infty$ для неопределенностей, вычисленных по типу В.</td></tr>
<tr><td>Для большинства практических случаев в предположении:
– нормального закона распределения — $U_{0,95} = 2u_c$, $U_{0,99} = 3u_c$;
– равномерного закона распределения — $U_{0,95} = 1,65u_c$, $U_{0,99} = 1,71u_c$.</td></tr>
</table>

4.3. При сопоставлении оценок характеристик погрешности и неопределенностей измерений рекомендуется использовать следующую схему (с учетом пояснений пп. А.5 и А.6):



4.4. Если отсутствует достаточная информация для вычисления неопределенности u в соответствии с *Руководством* (п. 3 Рекомендации), то ее оценка $\hat{u}$ может быть получена на основании оценок характеристик погрешности по приведенным ниже схемам. Схемы П 1 и П 2 соответствуют двум различным способам представления результатов измерений, принятым в НД ГСИ по метрологии. Необходимо отметить, что оценки неопределенностей, полученные таким образом, в ряде случаев не совпадают со значениями неопределенностей, полученными в соответствии с *Руководством*.

Схема П 1

y — результат измерений;

S — СКО случайной погрешности результата измерений;

$\theta(p)$ — доверительные границы неисключенной систематической погрешности результата измерений;

$m_{\text{сист}}$ — число источников неисключенной систематической погрешности;

n — число измерений.

$\rightarrow$

y — результат измерений;

$\hat{u}_A = S$ — оценка стандартной неопределенности, вычисленной по типу А;

$\hat{u}_{\text{В}} = \dfrac{\theta(p)}{k\sqrt{3}}$ — оценка стандартной неопределенности, вычисленной по типу В;

$k = 1{,}1$ при $p = 0{,}95$;

$k = 1{,}4$ при $p = 0{,}99$;

$m_{\text{сист}} > 4$;

$\hat{u}_{\text{C}} = \sqrt{\hat{u}_A^2 + \hat{u}_B^2}$ — оценка суммарной стандартной неопределенности;

$v_{eff} = (n-1)\left[1 + \dfrac{\hat{u}_B^2}{\hat{u}_A^2}\right]^2$ — оценка эффективного числа степеней свободы;

$\hat{U}_p = t_p\left(\hat{v}_{eff}\right)\hat{u}_c$ — оценка расширенной неопределенности.

Схема П 2

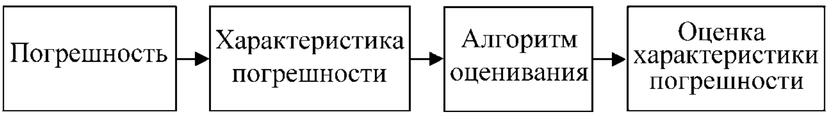
y — результат измерений;		y — результат измерений;
Δ_p — доверительные границы погрешности измерений;	→	$\hat{U}_p = \Delta_p$ — оценка расширенной неопределенности;
p — доверительная вероятность.		$\hat{u}_c = \dfrac{\Delta_p}{z_p}$ — оценка суммарной стандартной неопределенности;
		z_p — квантиль нормального распределения.

(Оценить неопределенности u_A и u_B по отдельности, зная только Δ_p, невозможно).

ПРИЛОЖЕНИЕ А*

Сравнительный анализ двух подходов к выражению точности измерений

А.1. Целью измерений является получение оценки истинного значения измеряемой величины. Понятие погрешности измерений как разности между результатом измерений и истинным (действительным) значением измеряемой величины используется для описания точности измерений в НД ГСИ по метрологии. Говоря об оценивании погрешности, в метрологической практике государств — членов Соглашения подразумевают оценивание ее характеристик.



А.2. В *Руководстве* для выражения точности измерений вводят понятие неопределенности измерений. Неопределенность измерений понимают как неполное знание значения измеряемой величины и для количественного выражения этой неполноты вводят распределение вероятностей возможных (обоснованно приписанных) значений измеряемой величины. Таким образом, параметр этого распределения (также называемый «неопределенность») количественно характеризует точность результата измерений.

А.3. Сходными для обоих подходов являются последовательности действий при оценивании характеристик погрешности и вычислении неопределенности измерений:

– анализ уравнения измерений;

* Остальные Приложения не приводятся.

– выявление всех источников погрешности (неопределенности) измерений и их количественное оценивание;

– введение поправок на систематические погрешности (эффекты), которые можно исключить.

А.4. Методы вычисления неопределенности, также как и методы оценивания характеристик погрешности, заимствованы из математической статистики, однако при этом используются различные интерпретации закона распределения вероятностей случайных величин. Кроме изложенных в *Руководстве* и НД ГСИ по метрологии, на практике используют и другие методы вычисления неопределенности и оценивания характеристик погрешности.

Возможные различия между оценками характеристик погрешности (в соответствии с НД ГСИ по метрологии) и неопределенностями (в соответствии с *Руководством*) можно показать на примерах.

Различие двух подходов проявляется также в трактовке неопределенности и характеристик погрешности, основанной на разных интерпретациях вероятности: частотной и субъективной. В частности, доверительные границы погрешности (отложенные от результата измерений) накрывают истинное значение измеряемой величины с заданной доверительной вероятностью (частотная интерпретация вероятности). В то же время аналогичный интервал $(y - U_p, y + U_p)$ трактуется в *Руководстве* как интервал, содержащий заданную долю распределения значений, которые могли бы быть обоснованно приписаны измеряемой величине (субъективная интерпретация вероятности).

А.5. В общем случае не существует однозначного соответствия между случайными погрешностями и неопределенностями, вычисленными по типу А (а также неисключенными систематическими погрешностями и неопределенностями, вычисленными по типу В). Деление на систематические и случайные погрешности обусловлено природой их возникновения и проявления в ходе измерительного эксперимента, а деление на неопределенности, вычисляемые по типу А и по типу В, — методами их расчета.

А.6. Результаты сравнительного анализа процедур оценивания характеристик погрешности и вычисления неопределенности измерений приведены в табл. А.1 и А.2.

Таблица А.1

Процедура оценивания характеристик погрешности результата измерений

Погрешность	$\xi = y - y_{ист} \Leftrightarrow y = y_{ист} + \xi$		
Модель погрешности	ξ — случайная величина с плотностью распределения вероятностей $p(x, E, \sigma^2, \ldots)$, E — математическое ожидание, σ^2 — дисперсия		
Характеристики погрешности	S — СКО	θ — границы неисключенной систематической погрешности	Δ_p — доверительные границы
Исходные данные для оценивания характеристик погрешности	1. Модель объекта исследования. 2. Экспериментальные данные x_{iq}; $q = 1, \ldots, n_i$; $i = 1, \ldots, m$. 3. Информация о законах распределения. 4. Сведения об источниках погрешностей, их природе и характеристиках составляющих ($S(x_i)$, θ_i), структурная модель погрешности. 5. Стандартные справочные данные и другие справочные материалы.		
Методы оценивания характеристик:			
1) случайных погрешностей	$S(x_{il}) = \sqrt{\frac{1}{n_i - 1}\sum_{q=1}^{n_i}\left(x_{iq} - \bar{x}_i\right)^2}$; $S(\bar{x}_i) = \sqrt{\frac{1}{n_i(n_i - 1)}\sum_{q=1}^{n_i}\left(x_{iq} - \bar{x}_i\right)^2}$; $S^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 S^2(\bar{x}_i)$; $\Delta_p = t_p(f_{эфф})S$		

2) неисключенных систематических погрешностей	$\theta(p) = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \theta_i^2}$	
3) суммарной погрешности	$\Delta_p = \frac{t_p(f_{\text{эфф}})S + \theta(p)}{S + \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \theta_i^2/3}}\sqrt{S^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \theta_i^2/3};$ где $\theta(p) = K\sqrt{\sum_{i=1}^{m_{\text{сист}}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \theta_i^2}, \quad K = 1{,}1$ при $p = 0{,}95;$ $K = 1{,}4$ при $p = 0{,}99;\ m_{\text{сист}} > 4;$ $S = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 S^2(\overline{x}_i)}$	
Форма представления характеристик погрешности	$\theta(p)$, S, n	Δ_p
Интерпретация полученных результатов	Интервал $(-\Delta p, +\Delta p)$ с вероятностью p содержит погрешность измерений, что равносильно тому, что интервал $(y - \Delta p, y + \Delta p)$ с вероятностью p содержит истинное значение измеряемой величины.	

Таблица А.2

Процедура вычисления неопределенности измерений

Модель неопределенности (представление знания о значении измеряемой величины)	η — случайная величина с плотностью распределения вероятностей $p(x, y, u^2, \ldots)$, y — математическое ожидание, u^2 — дисперсия		
Неопределенность (количественная мера)	Стандартная u	Суммарная $u_c = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} u_i^2}$	Расширенная $U_p = ku_c$
Исходные данные для вычисления неопределенности	1. Модель объекта исследования. 2. Экспериментальные данные x_{iq}, $q = 1, \ldots, n_i$; $i = 1, \ldots, m$. 3. Информация о законах распределения. 4. Сведения об источниках неопределенности и информация о значениях неопределенности. 5. Стандартные справочные данные и другие справочные материалы		
Методы вычисления неопределенности:			
1) по типу А	$u_{A,i} = \sqrt{\dfrac{\sum_{q=1}^{n_i}(x_{iq} - \bar{x}_i)^2}{n_i - 1}}$, , $u_A(x_i) = \sqrt{\dfrac{\sum_{q=1}^{n_i}(x_{iq} - \bar{x}_i)^2}{n_i(n_i - 1)}}$		
2) по типу В	$u_B(x_i) = \dfrac{b_i}{\sqrt{3}}$		

Окончание табл. А.2

3) расширенной неопределенности	$U_p = t_p(\nu_{eff}) \cdot u_{\text{c}}$, $\nu_{eff} = \dfrac{u_{\text{c}}^4}{\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i)\right)^4}{\nu_i}}$, $u_{\text{c}} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i)\right)^2}$; $U_{0,95} = 2u_{\text{c}}$; $U_{0,99} = 3u_{\text{c}}$ — для нормального закона; $U_{0,95} = 1{,}65u_{\text{c}}$; $U_{0,99} = 1{,}71u_{\text{c}}$ — для равномерного закона
Представление неопределенности	$u_{\text{c}}, U_p, k, u_i, \nu_i$
Интерпретация полученных результатов	Интервал $(y - U_p,\ y + U_p)$ содержит большую долю (p) распределения значений, которые могли бы быть обоснованно приписаны измеряемой величине

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Статистические свойства оценок

Как было отмечено, основной задачей обработки значений измерений является определение интересующего нас параметра (или группы параметров — вектора) по данным прямых и (или) косвенных измерений. Любая функция от значений измерений, принимаемая в качестве подходящего значения неизвестного параметра (либо величины), называется оценкой этого параметра.

Какую же из этих оценок предпочесть?

Если исходить только из соображений простоты, то в качестве оценки можно взять полусумму максимального и минимального значений. Так иногда поступают, например, в задачах контроля качества продукции. Однако очевидно, что требование простоты не единственное и не самое главное. Не менее важно потребовать, чтобы при увеличении числа наблюдений точность полученной оценки неизвестного параметра непрерывно увеличивалась, а при заданном количестве наблюдений являлась бы максимальной.

Таким образом, изучая и сравнивая результаты оценивания, можно прийти к постановке следующего ряда вопросов.

1. Что подразумевать под наиболее точными (наилучшими) оценками?

2. Как использовать имеющиеся измерительные данные для получения этих наилучших оценок?

3. Как ведут себя оценки при увеличении числа измерений?

Примечание. Необходимо иметь в виду, что дальнейшее изложение касается не столько «задачи о трех измерениях», сколько тех случаев, когда имеется возможность увеличивать число измерений, т. е. для случаев $n > 3$.

П 3.1. Несмещенность, состоятельность и эффективность оценок

Перед тем как остановиться на какой-либо оценке, рассмотрим, каким требованиям она должна удовлетворять. Прежде всего, желательно, чтобы математическое ожидание $M\{\hat{x}\}$ оценки $\hat{x}$ совпадало с неизвестным параметром (измеряемой величиной). Оценка, для которой это требование выполняется, называется ***несмещенной***.

Так, среднее значение $x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ является несмещенной оценкой математического ожидания случайной величины. Можно было бы думать, что и оценка

$$D_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x})^m \qquad (\text{П } 3.1)$$

m-го центрального момента относительно выборочного среднего арифметического также является несмещенной. Но оказывается, что это не так, а несмещенной является оценка

$$D_2 = \frac{n^{m-1}}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x})^m. \qquad (\text{П } 3.2)$$

В частности, несмещенной оценкой дисперсии при трех измерениях является не

$$D_1 = \frac{1}{3}\left[\left(x_1 - \hat{x}\right)^2 + \left(x_2 - \hat{x}\right)^2 + \left(x_3 - \hat{x}\right)^2\right],$$

а

$$D_2 = \frac{1}{2}\left[\left(x_1 - \hat{x}\right)^2 + \left(x_2 - \hat{x}\right)^2 + \left(x_3 - \hat{x}\right)^2\right].$$

Известно, что при $n \le m$ несмещенную оценку $(m + 1)$-го момента вообще нельзя получить.

Следует отметить, что теория несмещенных оценок довольно сложна, и порой трудно установить не только метод устранения смещения, но и сам факт наличия или отсутствия смещения. Однако в подавляющем большинстве практических случаев сравнительно просто удается найти асимптотически несмещенную оценку, т. е. такую смещенную оценку, математическое ожидание которой стремится к истинному (действительному) значению оцениваемого параметра (измеряемой величины) при неограниченном увеличении числа измерений.

Если бы дисперсия случайной величины оценивалась по формулам (П 3.1) и (П 3.2), то D_2 являлась бы несмещенной оценкой, в то время как D_1 — асимптотически несмещенной оценкой, так что при достаточно большом n эти оценки мало отличаются друг от друга.

Значение и поведение смещения оценки при увеличении числа наблюдений не является исчерпывающей характеристикой ее свойств. Так, нетрудно видеть, что если в качестве оценки $\hat{x}$ выбрать произвольное значение x_i из трех измерений, не содержащих систематической погрешности, то получим несмещенную оценку, поскольку $M\{\hat{x}\} = x.$ Но вместе с тем ясно, что при получении такой оценки не используется информация, содержащаяся в остальных двух значениях измерений, и даже при большом числе измерений нельзя гарантировать сколько-нибудь высокой точности определения величины x.

Если при неограниченном увеличении числа наблюдений оценка не приближается сколь угодно близко к искомому параметру, то ее называют несостоятельной; в противном случае оценка называется состоятельной. Более точно, оценка $\hat{x}$ параметра x называется состоятельной, если при $n \to \infty$ вероятность события $|x - \hat{x}| < \varepsilon$ стремится к единице (здесь ε — произвольное положительное число).

Из определения состоятельности не следует, что дисперсия состоятельной оценки с увеличением n стремится к нулю [82], хотя, как правило, это выполняется. Обратное же верно всегда: из того факта, что дисперсия несмещенной оценки с увеличением n стремится к нулю, следует состоятельность оценки.

В качестве примера ***состоятельной оценки*** можно привести среднее арифметическое

$$\hat{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

где x_1, ..., x_n – независимые равноточные измерения. Эта оценка имеет дисперсию $\left(\frac{1}{n}\right)\sigma^2$, где σ^2 — дисперсия погрешности измерения.

Состоятельность, устанавливая факт неограниченного повышения точности оценки при увеличении числа наблюдений, не характеризует того, как быстро увеличивается эта точность. В связи с этим возникает важный вопрос, насколько точно можно оценить неизвестный параметр, располагая некоторой конечной выборкой.

Ответ на этот вопрос был найден независимо друг от друга несколькими авторами: Фреше́ (1943 г.), Рао (1945 г.) [87] и Крамером (1946 г.) [58]. Они получили неравенство, которое утверждает, что при оценке величины x дисперсия оценки ограничена снизу некоторым положительным числом, зависящим от функции распределения $g(x_1, x_2, x_3, x)$ случайных величин x_1, x_2, x_3, по которым оценивается параметр x, и объема выборки n (для рассматриваемого случая $n = 3$).

Неравенство, которое обычно называется неравенствам Рао — Крамера или неравенством информации, имеет вид:

$$D_x = \sigma_x^2 \geq \frac{1}{\int\limits_x \left(\frac{\partial \ln g\left(x_1, x_2, x_3 \mid x\right)}{\partial x}\right)^2 g\left(x_1, x_2, x_3 \mid x\right) \mathrm{d}x}. \quad (\text{П } 3.3)$$

Величину, стоящую в знаменателе, Р. Фишер [157] назвал информацией, содержащейся в выборке. Если выражение (П 3.3) превращается в равенство, то говорят, что при нахождении оценки информация, содержащаяся в выборке, была использована полностью.

Если производится три независимых измерения с одной и той же плотностью распределения вероятностей погрешности измерений, то неравенство информации можно записать в виде:

$$\sigma_x^2 \geq \frac{1}{3\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln f(x_1, x}{\partial x}\right)^2 f(x_1, x) \mathrm{d}x},$$

т. к. $f\left(x_1, x\right) = f\left(x_2, x\right) = f\left(x_3, x\right)$, где x_1, x_2, x_3 — случайные величины.

Например, для нормального закона распределения вероятностей погрешности измерений

$$f(x_1, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x_1 - x)^2}{2\sigma^2}\right]$$

подынтегральное выражение равно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln f(x_1, x)}{\partial x}\right)^2 f(x_1, x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_1 - x)^2}{\sigma^4} f(x_1, x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma^2}.$$

Следовательно, дисперсия любой несмещенной оценки $\hat{x}$, полученной по трем значениям измерений x_1, x_2, x_3, удовлетворяет неравенству

$$\sigma_{\hat{x}}^2 \geq \frac{\sigma^2}{3}.$$

При неполном использовании информации, содержащейся в выборке, получим оценку с дисперсией, которая не является наименьшей.

Отношение

$$\eta = \frac{\sigma_{\hat{x}}^2}{\sigma_x^2}$$

называется ***эффективностью оценки*** $\hat{x}$. Очевидно, что $0 \leq \eta \leq 1$. Оценка $\hat{x}$, для которой $\eta = 1$, называется эффективной. Если для неэффективной оценки при увеличении числа измерений n $\lim\limits_{n\to\infty} \eta(x_n) = 1$, то оценка $\hat{x}$ называется асимптотически эффективной.

Следует отметить, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \eta(x_n) = 0$, это не говорит о том, что оценка является несостоятельной.

Например, при оценке среднего значения нормально распределенных равноточных измерений $\hat{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ будет эффективной оценкой с дисперсией $\frac{\sigma^2}{n}$.

Если же в качестве оценки среднего значения взять полусумму $\frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}$, то окажется, что ее дисперсия пропорциональна $\frac{\sigma^2}{\ln n}$ и при $n \to \infty$ эффективность этой оценки, равная $\frac{\ln n}{n}$, стремится к нулю, хотя эта оценка и является состоятельной. Эффективность же несостоятельной оценки всегда стремится к нулю. Более полное изложение вопросов эффективности оценок можно найти, например, в [87].

П 3.2. Надежность оценок

Как было показано ранее, выбор метода оценивания и качество получаемого решения зависит от объема и характера априорной информации о функции плотности распределения вероятностей погрешности измерений. Однако на практике довольно часто отсутствуют достоверные сведения о свойствах наблюдаемых процессов, в том числе помех.

Поэтому при анализе свойств получаемых оценок необходимо учитывать такое свойство, как надежность. Под надежностью (устойчивостью) понимается вероятность отказа алгоритма оценивания (превышение величины $|x - \hat{x}|$ допустимого значения) при заданной модели отказов приборов, с которых получают значения x_1, x_2, x_3.

Достаточно полная классификация отказов приведена в [51]. На практике обычно используется простейшая модель отказов, основанная на следующем упрощающем предположении: погрешности показаний приборов (значений x_1, x_2, x_3) при отказе или сбое весьма велики и значительно превосходят максимально допускаемые значения, так что избежать отказа алгоритма можно только при полном исключении сигнала отказавшего прибора. При этом предположении вопрос о выборе допускаемых значений из рассмотрения исключается.

Требования по точности и надежности, взятые отдельно, обычно приводят к противоречивым рекомендациям: обычно оценки, оптимальные по точности, характеризуются не очень высокой надежностью, а оценки, лучшие по надежности, приводят к проигрышу в точности.

Рассмотрим с точки зрения точности и надежности шесть различных алгоритмов получения оценок [31]. При этом предполагается, что, во-первых, при исправном состоянии приборов осуществляются равноточные независимые измерения, погрешности которых подчиняются нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2; во-вторых, отказы приборов равновероятны и независимы, вероятность отказа прибора q 1, а вероятность появления положительного и отрицательного значения погрешности равна 0,5. Для определенности будем считать число измерений нечетным ($n = 2k + 1$), причем все значения измерений расположены в порядке их возрастания $\left(x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{n-1} \le x_n\right)$.

Для каждого из шести алгоритмов оценивания определяется относительная дисперсия оценки $\frac{\sigma_{\hat{x}}^2}{\sigma^2}$ для числа измерений $n = 3$; 5; 7; 9. Полученные значения сведены в табл. П 3.1 [31]. Для тех же алгоритмов, а также значений $n = 3$; 5; 7; 9 и $q = 0{,}01$ вычислена вероятность отказа Q, характеризующая надежность оценки. Найденные значения Q сведены в табл. П 3.2.

***Алгоритм* 1.** Осреднение всех результатов измерения:

$$\hat{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Точность оценки, характеризуемая ее дисперсией, равна

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \frac{1}{n}\sigma^2 .$$

Вероятность отказа, характеризующую надежность, можно оценить по формуле

$$Q = n - q,$$

т. е. с увеличением числа измерений точность оценки возрастает, а ее надежность уменьшается.

Алгоритм 2. Осреднение пяти срединных значений измерений, когда все остальные значения измерений отбрасываются (предполагается, что $n \geq 5$):

$$\hat{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=h-1}^{h+3} x_i.$$

Дисперсия оценки $\sigma_{\hat{x}}^2$ зависит от общего числа измерений n и определяется по формуле

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \frac{1}{25}\left[\sum_{i=1}^{5}\sigma_{h-2+i}^2 + 2\sum_{\substack{i=1\\ i<j}}^{5}\sum_{j}\operatorname{cov}\left(\varepsilon_{h-2+i}, \varepsilon_{h-2+j}\right)\right],$$

где $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ — момент второго порядка погрешностей двух значений измерений x_i и x_j; при $i = j$ $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sigma_i^2$.

Например, для семи измерений дисперсия оценки равна:

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \frac{1}{25}\Big\{2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 + 2\sigma_4^2 + 2\Big[2\operatorname{cov}\left(\varepsilon_2,\varepsilon_3\right) + 2\operatorname{cov}\left(\varepsilon_2,\varepsilon_4\right) +$$
$$+2\operatorname{cov}\left(\varepsilon_2,\varepsilon_5\right) + \operatorname{cov}\left(\varepsilon_2,\varepsilon_6\right) + 2\operatorname{cov}\left(\varepsilon_3,\varepsilon_4\right) + \operatorname{cov}\left(\varepsilon_3,\varepsilon_5\right)\Big]\Big\},$$

т. к.

$$\sigma_2^2 = \sigma_6^2,\ \ \sigma_3^2 = \sigma_9^2,\ \operatorname{cov}\left(\varepsilon_2,\varepsilon_3\right) = \operatorname{cov}\left(\varepsilon_5,\varepsilon_6\right),\ \operatorname{cov}\left(\varepsilon_3,\varepsilon_4\right) = \operatorname{cov}\left(\varepsilon_4,\varepsilon_5\right),$$
$$\operatorname{cov}\left(\varepsilon_3,\varepsilon_4\right) = \operatorname{cov}\left(\varepsilon_4,\varepsilon_5\right), \quad \operatorname{cov}\left(\varepsilon_3,\varepsilon_6\right) = \operatorname{cov}\left(\varepsilon_2,\varepsilon_5\right).$$

Значения ковариаций определяются из таблиц, приведенных в литературе, например, в [31].

Отказ алгоритма оценивания (потеря его устойчивости) наступает, если имеют место $\eta = \frac{n-s}{2} + 1$ грубых ошибок измерения (сбоев, промахов) одного знака. Так как $q \ll 1$, то вероятностями появления бóльшего количества грубых ошибок одного знака можно пренебречь. Тогда вероятность отказа алгоритма оценивания определяется по формуле

$$Q \approx 2^{-(r-1)} C_n^r q^r.$$

***Алгоритм* 3.** Осреднение трех «центральных» значений измерений. Формулы для оценки параметра точности и вероятности отказа аналогичны формулам для *Алгоритма* 2:

$$\hat{x} = \frac{1}{3}\sum_{i=h}^{h+2} x_i,$$

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \frac{1}{9}\left[\sum_{i=1}^{3}\sigma_{h-1+i}^2 + 2\sum_{\substack{i=1\\ i<j}}^{5}\sum_{j=1}\operatorname{cov}(\varepsilon_{h-1+i}, \varepsilon_{h-1+i})\right],$$

$$Q = 2^{-(r-1)}C_n^r q^r, \qquad r = \frac{n-3}{2}+1.$$

***Алгоритм* 4.** Выбор медианы. В этом случае оценка имеет вид:

$$\hat{x} = x_{h+1},$$

оценка дисперсии погрешности

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \sigma^2,$$

оценка вероятности отказа

$$Q = 2^{-h}C_n^{h-1}q^{h-1}.$$

***Алгоритм* 5.** Осреднение двух ближайших значений измерений.

***Алгоритм* 6.** Осреднение значений трех ближайших измерений.

Так как для *алгоритмов* 5 и 6 нет аналитических выражений для дисперсии получаемой оценки, то в табл. П 3.1 приведены результаты статистического моделирования, полученные в [31].

Отказ *Алгоритма* 5 для n = 3 связан с появлением двух грубых ошибок измерения любого знака, т. е. $Q = C_3^2 q^2 = 3\cdot 10^{-4}$. При бóльшем числе измерений ($n > 3$) отказ имеет место, если два измерения x_i и x_j, полученные с большими погрешностями, ближе друг к другу, чем любая пара из оставшихся значений измерений.

Если при отказах приборов сигналы принимают некоторые фиксированные значения, то вероятность отказа *Алгоритма* 5 осреднения двух ближайших значений близка к q^2. В приведенном примере считалось, что при отказе прибора сигнал принимает неопределенное значение и характеризуется непрерывной плотностью распределения вероятностей с дисперсией σ_0^2. Тогда вероятность отказа *Алгоритма* 5 вычисляется по полуэмпирической формуле [31]:

$$Q = \sigma/\sigma_0 q^2 = 10^{-6}.$$

Аналогичные рассуждения для *Алгоритма* 6 позволяют сделать вывод, что при

$$n = 3, \qquad Q = 3q = 3 \cdot 10^{-2},$$
$$n = 5, \qquad Q = C_5^3 \cdot q^3 = 10^{-5},$$
$$n = 7, \qquad Q = C_7^5 \cdot q^5 \cong 2 \cdot 10^{-9},$$
$$n = 9,\ 11, \ldots, \qquad Q = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} q^3 \approx 10^{-10}.$$

Соотношение между точностными и надежностными свойствами рассматриваемых *Алгоритмов* представлены на рис. П 3.1 и П 3.2. По оси абсцисс рис. П 3.1 и П 3.2 отложено число измерений n, а по оси ординат на рис. П 3.1 — относительные дисперсии оценки $\frac{\sigma_{\hat{x}}^2}{\sigma^2}$.

На рис. П 3.2 по оси ординат в логарифмическом масштабе отложены вероятности отказов Q. На рисунках ломаными линиями соединены точки, соответствующие различным значениям n для каждого *Алгоритма* оценивания. Семейства линий, образованных таким образом, позволяют получить представление об изменении точности и надежности оценок при изменении числа измерений.

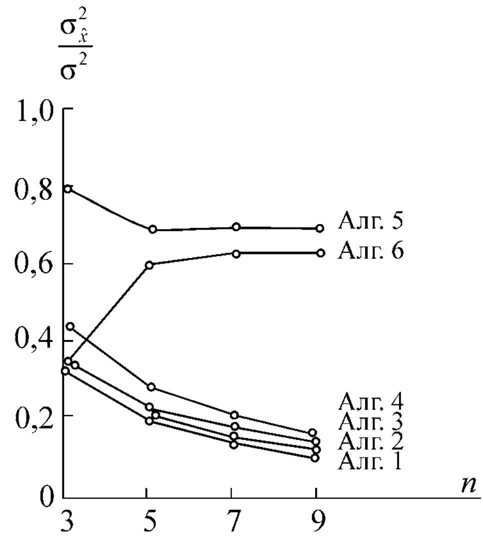


Рис. П 3.1. Зависимость относительной дисперсии оценки от числа измерений и выбранного *Алгоритма*

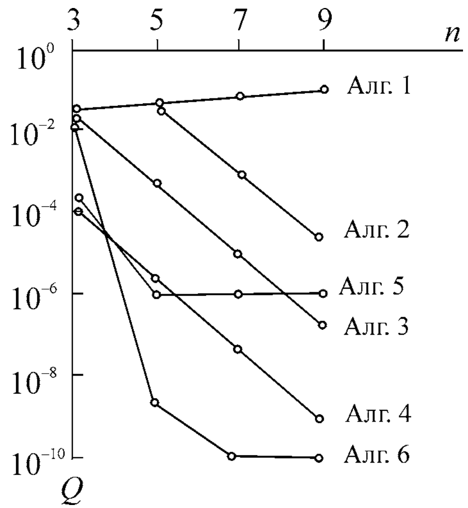


Рис. П 3.2. Зависимость вероятности отказа от числа измерений при выбранном *Алгоритме*

Так, можно отметить, что при фиксированном n увеличение количества осредняемых центральных порядковых статистик (*Алгоритмы* 1–4) приводит к увеличению точности оценок при одновременном снижении их надежности. Характерно, что при последовательном переходе от *Алгоритма* 1 (осреднение всех результатов измерений) к *Алгоритму* 4 (выбор медианы) дисперсия оценки увеличивается незначительно, а вероятность отказа может возрасти на несколько порядков, причем тем существеннее, чем выше надежность измерительных приборов. Например, при $n = 7$ и $q = 0{,}01$ уменьшение дисперсии оценок по выборочной медиане и выборочному среднему составляет около 30 %, а отношение соответствующих вероятностей отказов возрастает примерно в 10^6 раз.

Алгоритмы 5 и 6 осреднения двух или трех ближайших результатов измерений дают меньшую точность оценок по сравнению с *Алгоритмами* 1–4. Довольно высокая надежность оценок объясняется тем, что вероятности отказов рассчитывались при относительно большом уровне грубых ошибок (сбоев, промахов) $\sigma_1/\sigma = 10^2$.

Отметим, что с ростом числа n приборов (или значений измерений) надежность этих оценок практически не изменяется, поэтому при увеличении n будет существенно возрастать отставание в надежности по сравнению с оценками, полученными по *Алгоритмам* 2–4. Из рис. П 3.1 и П 3.2 видно, что при осреднении трех ближайших результатов измерений оценка обладает более высокой точностью и надежностью, чем при осреднении двух ближайших результатов.

Пользуясь рис. П 3.1 и П 3.2, а также табл. П 3.1 и П 3.2, можно дать обоснованные рекомендации для выбора оценок, удовлетворяющих практическим требованиям как по точности, так и по надежности.

Таблица П 3.1

Значения относительных дисперсий $\dfrac{\sigma_{\hat{x}}^2}{\sigma^2}$ оценки

Алгоритмы оценивания	Число измерений n			
	3	5	7	9
Алгоритм 1	0,33	0,20	0,14	0,11
Алгоритм 2	—	0,20	0,16	0,13

Окончание табл. П 3.1

Алгоритмы оценивания	Число измерений n			
	3	5	7	9
Алгоритм 3	0,33	0,23	0,18	0,14
Алгоритм 4	0,45	0,29	0,21	0,17
Алгоритм 5	0,80	0,69	0,70	0,69
Алгоритм 6	0,33	0,59	0,63	0,63

Таблица П 3.2

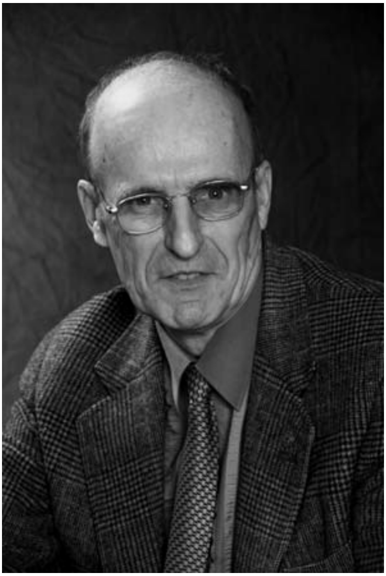
Значения вероятности отказа алгоритма оценивания

Алгоритмы оценивания	Число измерений n			
	3	5	7	9
Алгоритм 1	$3 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-2}$
Алгоритм 2	—	$5 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-5}$
Алгоритм 3	$3 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-7}$
Алгоритм 4	$2 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-8}$	$8 \cdot 10^{-10}$
Алгоритм 5	$3 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$
Алгоритм 6	$3 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-10}$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENTS



**МИРОНОВСКИЙ
ЛЕОНИД АЛЕКСЕЕВИЧ**

Профессор кафедры вычислительных систем и сетей Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения, действительный член академии навигации и управления движением. Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации. Член редколлегии журнала «Автоматика и телемеханика».

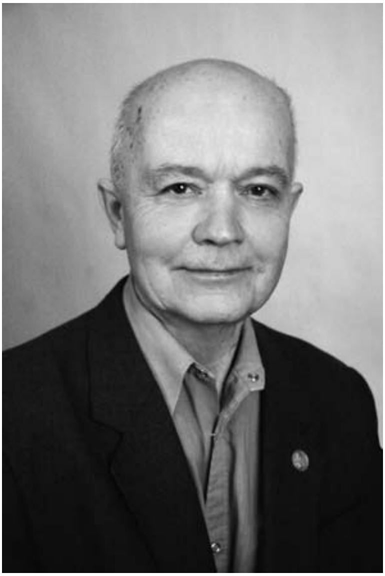
В 1962 г. окончил Ленинградский политехнический институт.

В 1981 г. защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук.

Является автором более 200 научных публикаций, в том числе книг:

Функциональное диагностирование динамических систем. М.: МГУ, 1998; Стрип-метод преобразования изображений и сигналов. СПб.: Политехника, 2006 (соавтор Слаев В.А.); Моделирование разностных уравнений. СПб.: ГУАП, 2004; Моделирование линейных систем. СПб.: ГУАП, 2009.

Область научных интересов — теория инвариантов и канонических форм линейных систем, техническая диагностика и компьютерное моделирование динамических систем.



СЛАЕВ ВАЛЕРИЙ АБДУЛЛОВИЧ

Главный научный сотрудник Всероссийского научно-исследовательского института метрологии им. Д.И. Менделеева, доктор технических наук, профессор, академик Метрологической академии, Заслуженный метролог Российской Федерации, председатель Совета по защитам докторских и кандидатских диссертаций при ВНИИМ им. Д.И. Менделеева.

В 1962 г. окончил радиотехнический факультет Ленинградского электротехнического института им. В.И. Ульянова (Ленина).

В 1990 г. защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук.

Является автором более 200 научных трудов, в том числе пяти монографий и более 30 изобретений.

Среди монографий: Метрологическое обеспечение аппаратуры магнитной записи: СПб., 2004; Теория систем воспроизведения единиц и передачи их размеров: СПб.: Профессионал, 2004; Потенциальная точность измерений: СПб.: Профессионал, 2005; Стрип-метод преобразования изображений и сигналов. СПб.: Политехника, 2006 (соавтор Мироновский Л.А.); Аттестация программного обеспечения, используемого в метрологии: Справочная книга: СПб.: Профессионал, 2009, а также изданный перевод Руководства по выражению неопределенности измерения: Пер. с англ. под науч. ред. проф. В.А. Слаева: СПб.: ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, 1999.

Область научных интересов — метрология и научное приборостроение в сфере электрических и магнитных измерений, измерительных информационных систем и интеллектуальных средств измерений.

Мироновский Леонид Алексеевич
Слаев Валерий Абдуллович

АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЙ

Ответственный за издание *А.А. Полуда*
Ответственный за выпуск *Н.В. Емельянова*
Ответственный за подготовку *Е.М. Криворучко*
Корректор *С.Е. Парфенова*
Компьютерная верстка *Е.М. Криворучко*
Техническое сопровождение *Т.И. Жадобина*
Оператор цифровой печати *А.В. Егорова*

Издание подготовлено в НПО «Профессионал»
197341, Санкт-Петербург, ул. Горная, д. 1, корп. 1, оф. 22-Н.
Тел.(факс): (812) 601-30-70, 601-32-49, 715-14-35

mail@naukaspb.ru
http://www.naukaspb.ru

Подписано в печать 22.03.2010.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Объем 12 печ. л.

Отпечатано в центре цифровой печати НПО «Профессионал»

Для заметок

Для заметок

Для заметок