

Л.А. Мироновский, В.А. Слаев

**СТРИП-МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ИЗОБРАЖЕНИЙ И СИГНАЛОВ**

Издательство ПОЛИТЕХНИКА

Санкт – Петербург

2006

УДК 621.39
ББК 32.811
М64

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор МГУ
им. М.В. Ломоносова *Н.А. Парусников*
доктор технических наук, профессор,
начальник сектора ЦНИИ «Электроприбор» *Н.В. Колесов*

Мироновский Л.А., Слаев В.А.

М64 Стрип-метод преобразования изображений и сигналов:
Монография / СПб.: Политехника, 2006. 163 с.: ил.
ISBN 5-7325-0413-3

Рассмотрены матричные методы обработки непрерывных сигналов и изображений, использующие стрип-преобразование. Решена задача оценки потенциальной помехоустойчивости и синтеза оптимального фильтра для случая импульсных помех. Исследованы возможности двумерного стрип-преобразования для хранения и помехоустойчивой передачи изображений. Приведены примеры стрип-преобразования изображений и описаны классы изображений, инвариантных относительно симметричных ортогональных преобразований.

Для научных работников и специалистов, работающих в области компьютерной обработки изображений и сигналов, приборостроения и метрологии. Может использоваться в качестве учебного пособия магистрантами направлений 2301 «Информатика и вычислительная техника», 2133 «Радиотехника» и аспирантами технических вузов при изучении компьютерных методов обработки изображений и сигналов.

УДК 621.39
ББК 32.811

ISBN 5-7325-0413-3

© ГУАП, 2006

© Л.А. Мироновский, В.А. Слаев
2006

ПРЕДИСЛОВИЕ

Важной задачей при передаче сигналов по каналам связи является уменьшение уровня помех и искажений, вносимых в различных звеньях канала, или, другими словами, повышение точности (или снижение погрешности) передачи сигнала по каналу. В монографии исследуется оригинальный метод повышения помехоустойчивости систем передачи и хранения информации, названный стрип-методом. Его суть заключается в предварительном преобразовании сигнала на передающем конце путем "разрезания" его на участки равной длительности, формирования их линейных комбинаций и обратного "склеивания" в единый сигнал той же (или большей) длительности. На приемном конце смесь сигнала с шумом, полученная из канала связи, подвергается обратной процедуре, в результате чего импульсные помехи "растягиваются" по всей длительности сигнала с одновременным уменьшением их амплитуды. Это приводит к уменьшению относительного уровня помех и, соответственно, к повышению помехоустойчивости.

Аналогичное преобразование изображения сводится к его разбиению на большое число одинаковых фрагментов (фрагментации), формированию их линейных комбинаций и обратному преобразованию (дефрагментации), в результате чего получается изображение, внешне совершенно не похожее на исходное. Если оно в дальнейшем подвергнется воздействию импульсных помех, приводящих к искажению или полному пропаданию отдельных фрагментов, то после восстановления будет получено цельное исходное изображение, только несколько худшего качества.

При изложении материала основное внимание уделено рассмотрению следующих задач:

- разработке метода изометрических предискажений (стрип-метода), не изменяющего "объем" сигнала и повышающего его устойчивость к импульсным помехам, действующим в каналах связи, который основан на прямом и обратном линейных преобразованиях сигнала, описываемых матрицами;

- нахождению требований к операторам стрип-преобразования, выполнение которых обеспечивает сохранение непрерывности и "гладкости" преобразованного сигнала; равномерность распределения импульсных помех по длительности сигнала или площади изображения; стационарность передаваемого сигнала по дисперсии; выравнивание его информативности; сужение спектра передаваемого сигнала и сравнительную простоту технической реализации;

- оценке потенциальной помехоустойчивости и эффективности стрип-метода для случая однократных и r - кратных помех и синтезу соответствующих оптимальных алгоритмов предискажения;

- исследованию возможностей введения в передаваемый сигнал информационной избыточности для обнаружения, локализации, идентификации и коррекции импульсных помех;

- отысканию инвариантов и оптимальных матриц двумерного стрип-преобразования для хранения и помехоустойчивой передачи изображений;

- созданию технических средств для реализации стрип-метода линейных предискажений и фильтрации передаваемого сигнала.

Естественно, что стрип-метод является лишь одним из многих методов, направленных на повышение точности передачи сигналов и изображений по каналам связи. Вопросам повышения помехоустойчивости систем передачи информации посвящено большое количество публикаций [29, 32, 35, 37, 40–43, 50, 58, 60, 64, 65, 68, 73, 74, 77, 113, 114, 119, 120, 122–124, 137–139, 142–146, 148, 152, 154, 157 и др.].

Необходимо также упомянуть смежные работы по групповой системе передачи сообщений и линейным предискажениям сигнала Д. В. Агеева, В. К. Маригодова, Д. С. Лебедева, Б. С. Цыбакова, Ю. Н. Бабанова, С. А. Сулонова, Л. П. Ярославского и др.; по методу избыточных переменных – М. Б. Игнатьева, А. П. Бурякова, Г. С. Бритова и др.; работы по линейному преобразованию и блочному кодированию сигналов и изображений – американских исследователей Г. Р. Лэнга, У. Х. Пирса, Д. Костаса, Х. П. Крамера, М. В. Мэтьюса, У. К. Пратта, Г. К. Эндрюса и др.

Методы предискажений на основе линейного матричного преобразования широко применяются для дискретных сигналов [11, 17, 18, 20, 50, 56, 72, 115, 117, 118, 141, 153 и др.], кроме того, в последнее время много внимания уделяется созданию различных алгоритмов помехоустойчивой обработки изображений [46, 63, 131, 155 и др.].

Таким образом, борьба с помехами на основе введения предискажений при передаче сигнала и оптимальной обработки (коррекции помех) при его приеме широко используется в

системах передачи информации. Однако большинство работ посвящено методам предсказаний и коррекции с использованием среднеквадратического критерия, в то время как методы, удовлетворяющие требованиям оптимизации систем передачи информации по минимаксному критерию, разработаны в значительно меньшей степени. Поэтому представляется целесообразной разработка и исследование новых методов борьбы с импульсными помехами, опирающихся на использование минимаксного критерия и современные возможности компьютерной обработки изображений и сигналов.

Монография подводит итог многолетней работы авторов в указанной области и опирается на их научные публикации по исследованию стрип-метода за последние 20 лет [13, 99–110, 126, 127 и др.]. В разд. 3 использованы результаты компьютерного моделирования, выполненного магистрантами И. С. Селяковым и С. В. Юдовичем под руководством одного из авторов [123, 159]. Приоритет в исследованиях закреплен рядом авторских свидетельств [86–98, 111, 128–130].

Основная часть исследований проводилась в ЛИАП (ныне СПбГУАП) и ВНИИМ им. Д. И. Менделеева, где авторы работают более 40 лет.

ВВЕДЕНИЕ

Одна из центральных задач теории связи состоит в повышении точности передачи сигналов по каналам информационных измерительных систем (ИИС) и систем передачи информации (СПИ). Оно может быть обеспечено, в частности, за счет помехоустойчивого преобразования сигналов при их передаче и приеме.

Известные методы и средства повышения помехоустойчивости систем передачи информации можно классифицировать по различным признакам (рис. 1.1).

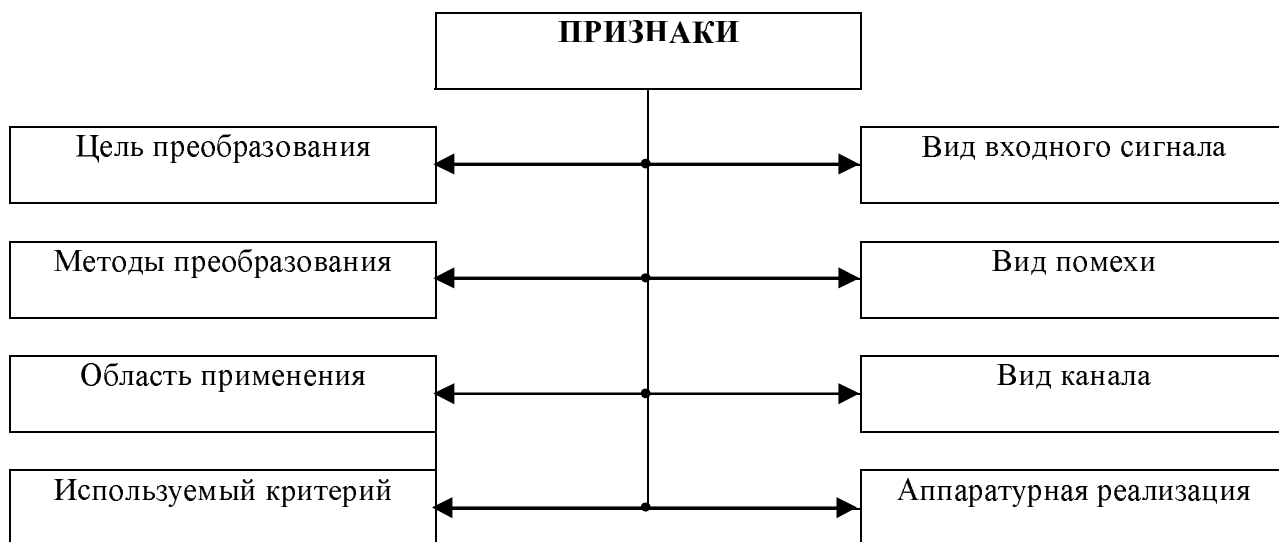


Рис. 1.1. Признаки классификации методов и средств повышения помехоустойчивости систем передачи информации

Один из важных признаков – вид помех, характерных для данной технической реализации системы. Тип и параметры помех задаются при проектировании из физических соображений и априорной информации, а также по данным, полученным в процессе эксплуатации аналогичных по принципу действия систем либо в результате проведения специальных исследований [134], позволяющих определить статистические свойства помех.

На практике наиболее часто встречаются помехи трех типов:

- импульсные помехи, имеющие вид кратковременных пропаданий сигналов или пиков большой амплитуды и малой длительности и обладающие широким спектром частот;
- флуктуационные помехи, которые характеризуются некоторым законом распределения плотности вероятностей их значений и спектральной плотностью мощности или автокорреляционной функцией;
- узкополосные помехи, в частности – гармонические, отличающиеся тем, что их спектр располагается в узкой полосе частот.

Помехи упомянутых типов могут быть как аддитивными, т.е. линейно складывающимися с полезным сигналом, так и мультипликативными, т.е. зависящими от уровня полезного сигнала.

Областями применения методов и средств борьбы с помехами (рис. 1.2) являются проводные каналы и радиоканалы связи, предназначенные для передачи сигналов телефонной и телеграфной информации, фототелеграфных, телевизионных сигналов, а также данных телеметрии. Сюда же входят активные и пассивные радиолокационные системы и устройства траекторных измерений и радионавигации. Кроме того, широкой областью применения методов борьбы с помехами является техника записи, хранения и воспроизведения информационных сигналов. К такого рода устройствам следует отнести электромеханические регистраторы и самопишущие измерительные приборы, светолучевые осциллографы, аппаратуру магнитной записи-воспроизведения (АМЗ) на движущийся и неподвижный носитель и др.



Рис. 1.2. Области применения методов и средств борьбы с помехами

Эти устройства предназначены для регистрации в основном одномерных сигналов, под которыми понимаются функции одного аргумента, чаще всего – времени. Примером такого сигнала может служить телефонный сигнал либо телевизионный сигнал при растровой развертке. Для регистрации многомерных сигналов используются многоканальная АМЗ, фотографические системы, устройства голографической записи-воспроизведения и др. Многомерные сигналы являются функциями нескольких аргументов. Например, неподвижное черно-белое изображение на плоскости можно рассматривать как двумерный сигнал. Объемное изображение, изменяющееся во времени, представляет собой четырехмерный сигнал и т.д.

По способу представления входные и выходные сигналы системы передачи информации делятся на дискретные (импульсные, цифровые) и аналоговые (непрерывные, континуальные). Дискретные сигналы имеют вид импульсов или "ступенек" постоянного напряжения. Зачастую они представляют собой (рис. 1.3) кодовые комбинации, соответствующие значениям информативного параметра сообщения в фиксированные моменты времени при заданном основании системы счисления.

При аналоговой форме входного сигнала выходной сигнал системы передачи информации может иметь как аналоговый, так и дискретный вид. В первом случае система содержит в себе аналоговые (в частности, масштабные) преобразователи. Во втором – аналого-цифровой преобразователь, осуществляющий операции дискретизации и квантования реализации входного

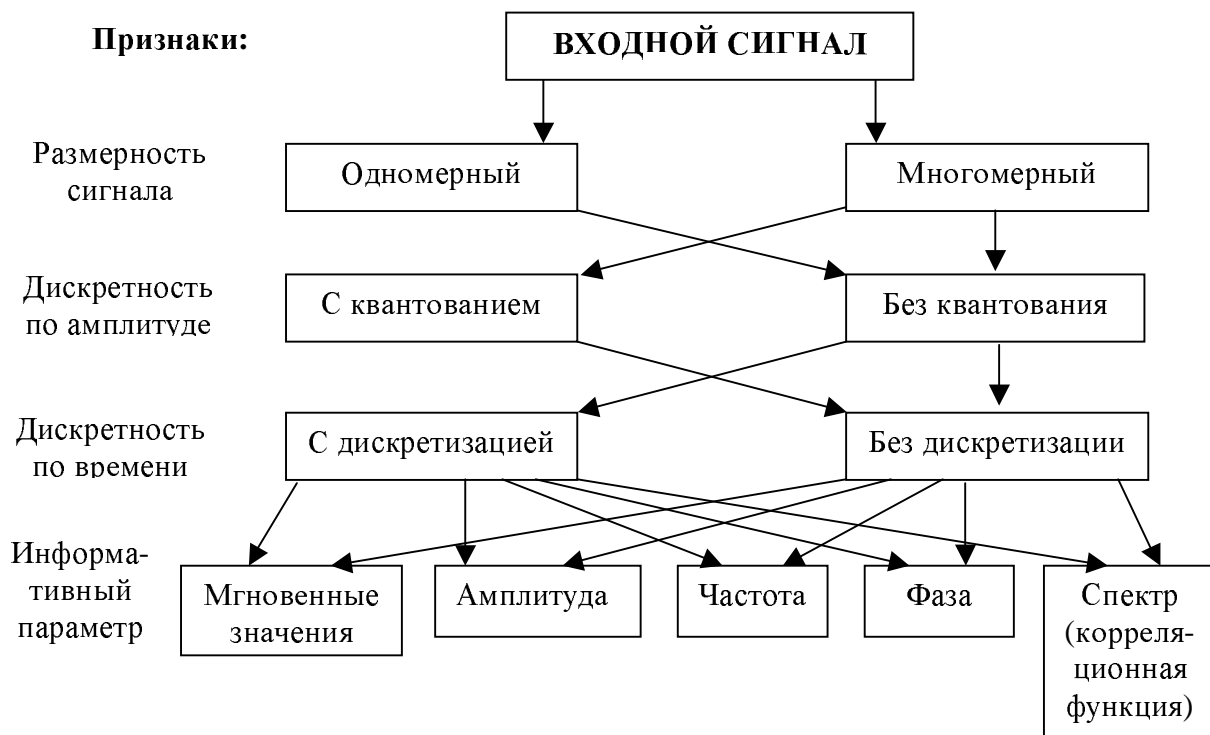


Рис. 1.3. Классификация каналов передачи информации по форме представления сигнала и его информативных параметров

процесса. При дискретной форме входного сигнала выходной сигнал системы может иметь дискретный или аналоговый вид. В первом случае в системе применяются цифровые кодеры, во втором – цифро-аналоговые преобразователи, осуществляющие операции интерполяции и сглаживания выходного сигнала.

Информативными параметрами входного сигнала могут быть его мгновенные значения, амплитуда, частота, фаза, спектр или корреляционная функция, а также их комбинации.

Классификация методов преобразования информации в СПИ по поставленной цели приведена на рис. 1.4. Одной из целей преобразования является сжатие объема передаваемой информации, под которым понимается произведение полосы частот, времени существования и динамического диапазона сигнала [147]. Такая задача актуальна при передаче сигналов, обладающих большой естественной информационной избыточностью [15, 44, 158 и др.], например данных телеметрии. Уменьшение объема сигнала приводит к увеличению скорости передачи информации. К тому же эффекту приводит декорреляция, т.е. устранение линейной стохастической зависимости элементов сигнала на передающем пункте и помех на приемном конце системы передачи информации.

Другой важной целью является повышение помехоустойчивости систем передачи информации или борьба с помехами. Способы повышения помехоустойчивости СПИ различны и включают в себя: изоляцию канала от помех, сводящуюся к совершенствованию аппаратуры; согласование характеристик сигнала и канала (по мощности, частоте, амплитуде); введение в передаваемый сигнал информационной избыточности (использование повторов, получение квитанций, применение избыточного помехоустойчивого кодирования); оптимизацию приема и обработки информации, которая предполагает применение оптимальной фильтрации [1, 8] и коррекции принятого сигнала.

В частности, системы подавления импульсных помех по принципу действия могут быть разделены на следующие шесть групп [52]:

- ограничение амплитуды смеси помехи с сигналом;
- прерывание прохождения смеси сигнала с помехой на приемном пункте во время действия помехи;
- компенсация эффекта действия помехи;

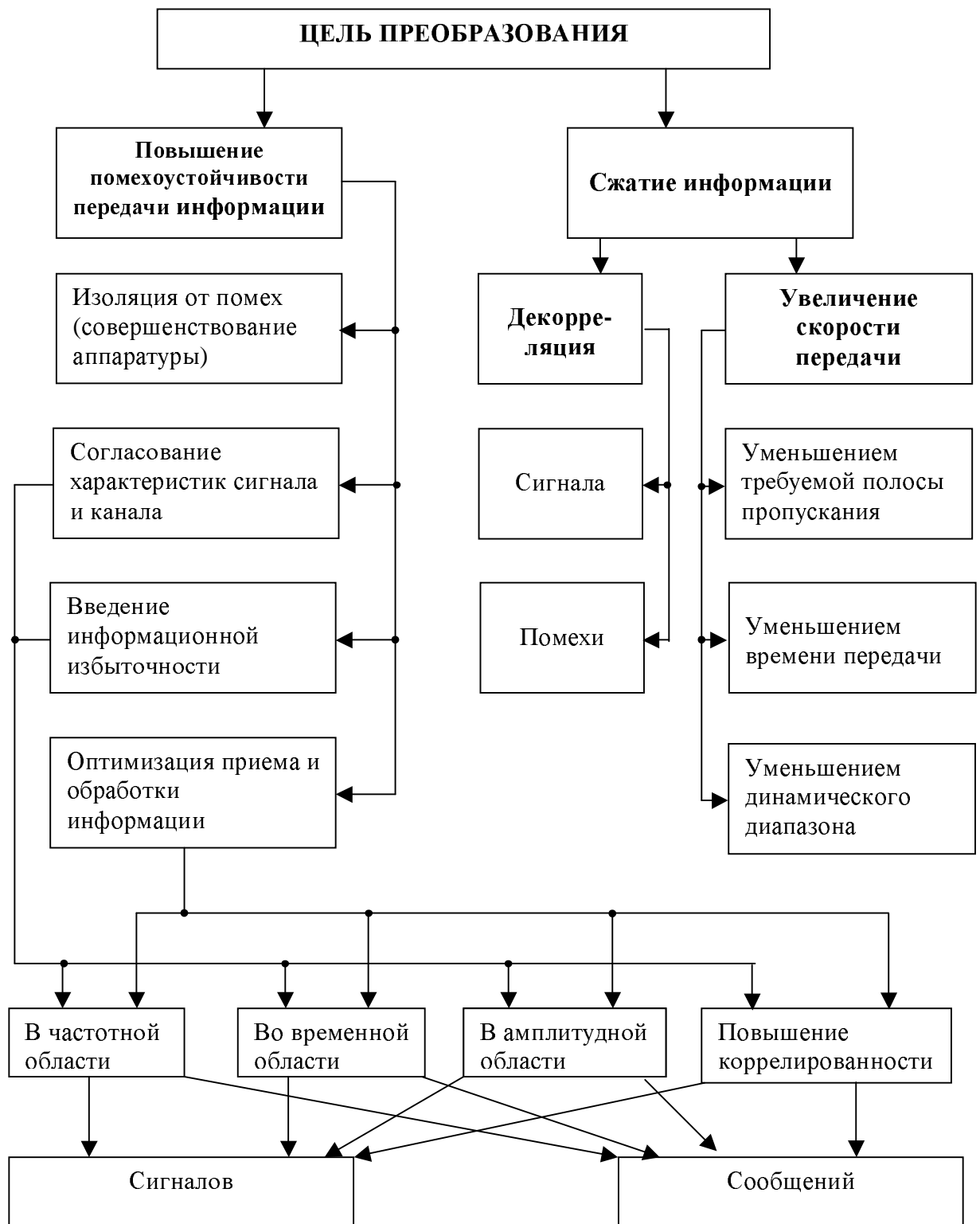


Рис. 1.4. Классификация методов преобразования информации по поставленной цели

- сведение смеси сигнала с помехой с помощью регулирующего каскада к уровню сигнала, имеющемуся во время действия помехи;
- ограничение в приемном устройстве скорости нарастания принимаемых сигналов;

– преобразование спектров сигналов с целью ослабления импульсных помех при обратном преобразовании.

Последняя из перечисленных групп основана на использовании достаточно универсального принципа введения предскажений при передаче сигнала и обратного преобразования при его приеме. Это позволяет также решать часть других задач, таких как согласование характеристик сигнала и канала, фильтрацию и коррекцию помех, облегчает введение информационной избыточности и т.д.

Эффект, получаемый от подавления помех, существенно зависит от выбираемого критерия оценки помехоустойчивости. На рис. 1.5 приведена классификация используемых критериев. Выбор критерия обуславливается задачами, решаемыми при передаче информации, из которых можно выделить две основные:

- обнаружение сигнала или различение сигналов;
- восстановление сигнала на приемном пункте или оценка его параметров (идентификация).

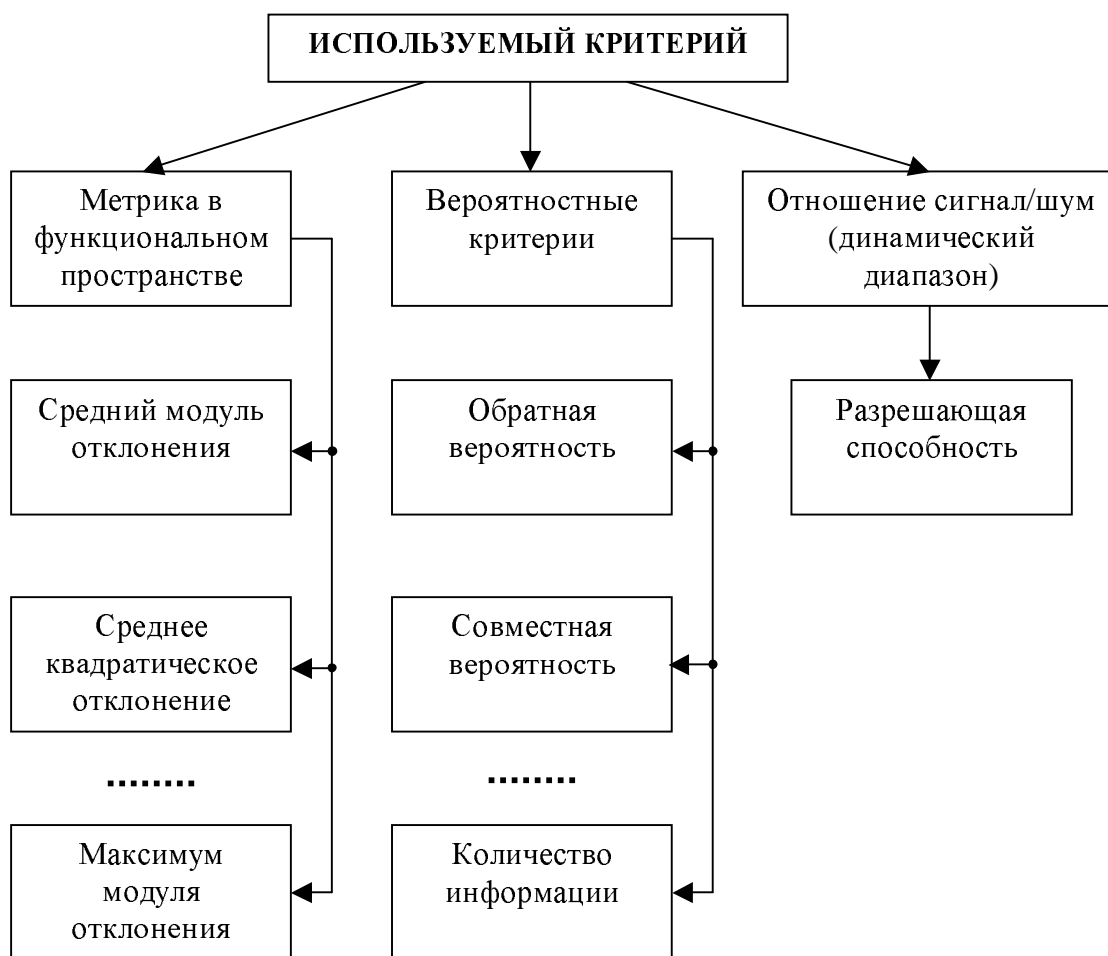


Рис. 1.5. Классификация методов передачи информации по виду используемого критерия

Вероятностные критерии [40, 50, 64, 74, 122, 142 и др.] находят широкое применение для решения первой задачи и строятся на основе условных плотностей вероятностей оценок принятого сигнала при условии реализации определенного сообщения, априорной плотности вероятностей различных сообщений, а также совместной плотности вероятностей переданного и принятого сообщений. Известны различные виды критериев, в том числе критерии Байеса, Неймана–Пирсона, Гловера, Кузьмина, максимума правдоподобия и др.

Так, при задании функции значимости совместной реализации сообщения и его оценки использование априорного распределения и условной плотности вероятности приводит к критериям Байеса и Неймана–Пирсона. Согласно критерию Байеса, минимизируется средний риск принятия неправильного решения (пропуска сигнала и ложной тревоги). По критерию Неймана–Пирсона минимизируется условная вероятность ошибочного принятия решения, соответствующего вероятности пропуска сигнала при заданной условной вероятности ошибочного принятия решения, соответствующего вероятности ложной тревоги, и т.д.

При передаче сигналов измерительной информации существенный интерес представляет критерий, характеризующий уменьшение информации в канале СПИ [62, 65, 112, 120, 137, 152]. Затруднение, связанное с равенством количества информации аналоговых сигналов бесконечности, удается обойти с помощью понятия ε -энтропии.

Для решения задачи восстановления сигнала и оценки его параметров наиболее приемлемым критерием служит норма ошибки или погрешности передачи в некотором функциональном пространстве [66]. Широкое распространение получил среднеквадратический критерий, который характеризует норму ошибки в функциональном пространстве L_2 :

$$\sigma = [E(x' - x)^2]^{1/2},$$

где σ – среднее квадратическое отклонение; E – символ математического ожидания; x' , x – принятый и переданный сигналы.

Средний модуль отклонения Δ_1 (средняя погрешность)

$$\Delta_1 = E |x' - x|$$

является метрикой в пространстве L_1 . Оптимизация по этому критерию приводит к использованию метода наименьших модулей [49]. Для алгоритмов обработки по методу наименьших модулей характерно игнорирование сигналов или результатов измерений с большой величиной помех.

Максимум модуля отклонения

$$\Delta_\infty = \max |x'(t) - x(t)|, \quad 0 \leq t \leq \infty$$

является метрикой в пространстве L_∞ (или C). Часто этот критерий называют критерием Чебышева. Оптимизация системы по этому критерию обеспечивает получение минимальной допустимой погрешности, поэтому он известен также как минимаксный критерий.

Широко применяемый на практике критерий отношения сигнал/шум обычно трактуется как отношение их средних мощностей и характеризует разрешающую способность аппаратуры, под которой понимается обеспечение возможности различения пороговых сигналов на фоне помех.

Классификация методов помехоустойчивого преобразования передаваемых сигналов приведена на рис. 1.6. Как было отмечено, распространенным принципом повышения помехоустойчивости СПИ служит введение предсказаний в передаваемый сигнал и обратное преобразование при его приеме [2, 3, 10–12, 17, 18, 20, 23, 27, 30, 31, 38, 39, 56, 59, 69, 70–72, 78–82, 115, 117, 118, 125, 132, 135, 136, 149, 150, 153, 156]. Методы предсказания сигнала можно разделить на два больших класса, включающих линейные и нелинейные предсказания.

Классическими примерами устройств нелинейного предсказания являются компрессоры и экспандеры динамического диапазона, а также схемы автоматической регулировки усиления (АРУ) [114]. Сжатие динамического диапазона осуществляется компрессорами с нелинейной амплитудной характеристикой. Коэффициент передачи компрессора различен для разных мгновенных значений сигнала. При этом сама форма кривой передаваемого сигнала изменяется, причем большие мгновенные значения "сжимаются" (ограничиваются), а небольшие – проходят через компрессор почти без искажений. На приемном пункте СПИ применяется экспандер с амплитудной характеристикой, обратной по отношению к характеристике компрессора. Следует отметить, что происходящее изменение формы кривой приводит к изменению ширины спектра передаваемого сигнала.

Другой способ воздействия на динамический диапазон сигнала состоит в применении схем АРУ, т.е. нестационарных устройств с памятью, обладающих определенной постоянной времени. Коэффициент передачи схем АРУ меняется с изменением уровня (огibaющей) сигнала и не зависит от мгновенного его значения. К недостаткам устройств нелинейного предсказания и восстановления сигнала надо отнести то, что изменение формы сигнала, обусловленное частотными и фазовыми искажениями в канале связи, неизбежно вызывает искажения сигнала даже в том случае, если амплитудная характеристика восстанавливающего устройства (экспандера) в точности обратна соответствующей характеристике компрессора.

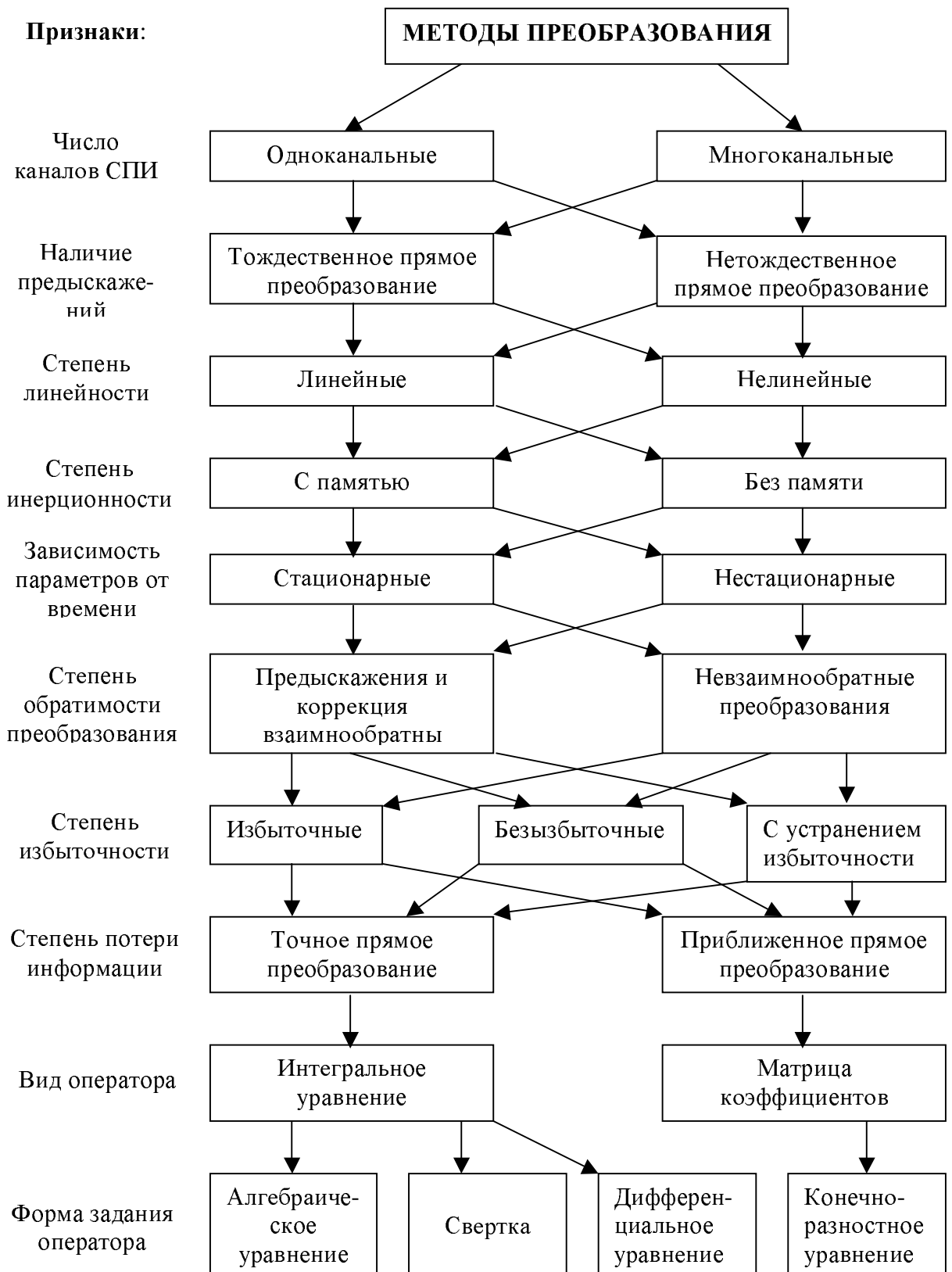


Рис. 1.6. Классификация методов помехоустойчивого преобразования передаваемых сигналов

Методы линейного предыскажения сигналов весьма многообразны. Большая часть из них основана на следующей общей идее (рис. 1.7). На передающем пункте СПИ ставится предыскажающий четырехполюсник, часто в виде фильтра [2, 149] с характеристикой $H(\omega)$

такой, чтобы на приемном пункте канала, обладающего шумовыми помехами, можно было бы выбором коэффициента передачи $G(\omega)$ корректирующего четырехполосника улучшить отношение сигнал/помеха.

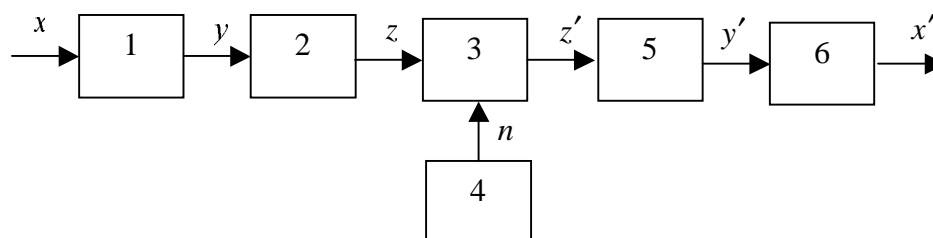


Рис. 1.7. Блок-схема канала системы передачи информации

1 – кодер (предыскажающее устройство или блок прямого преобразования сигнала x); 2 – передатчик; 3 – среда (линия связи, АМЗ и т.п.); 4 – источник помех; 5 – приемник; 6 – декодер (фильтр или блок обратного преобразования принятого сигнала x').

Наиболее простым и широко применяемым методом линейных предсказаний являются амплитудно-частотные предсказания. К примеру, известно, что амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) системы магнитная головка – лента – головка АМЗ с прямой записью и индукционными головками воспроизведения линейно нарастает до сравнительно высоких частот. Для получения равномерной АЧХ сквозного канала в усилителях записи АМЗ применяются амплитудно-частотные предсказания [126, 133], целью которых является "подчеркивание" низких частот входного сигнала.

Метод фазочастотных предсказаний основан на использовании двух фильтров [73], один – на передающем, другой – на приемном пункте СПИ, с равномерными амплитудно-частотными, но сложными по форме и взаимно сопряженными фазо-частотными характеристиками (ФЧХ). Сигнал, проходящий через оба фильтра, будет только задерживаться на фиксированное время, в то время как частотные компоненты шума будут "разбросаны" во временной области.

В работе [136] используется метод амплитудно-фазовых предсказаний, которые состоят из амплитудно-частотных и фазочастотных искажений, примененных последовательно. Задача введения амплитудно-фазовых предсказаний рассматривается для детерминированных сигналов с сохранением их формы при наличии помех в заданном динамическом диапазоне при максимальном отношении сигнал/помеха.

Метод времячастотных предсказаний [31] основан на свойстве человеческого слуха не замечать сдвигов во времени воспроизведения отдельных частотных компонент сложного звукового сигнала, если только эти сдвиги не превосходят определенного порога. Аппаратурная реализация метода заключается во введении различных временных задержек в узкополосные сигналы, полученные с помощью полосовых фильтров из исходного. Задержанные с помощью линий задержки сигналы затем смешиваются, и на выходе смесителя получается предсказанный сигнал.

В работе [125] решается задача минимизации среднего квадратического значения погрешности передачи стационарного гауссовского процесса по каналу связи. При этом на передающем пункте канала применяется предсказание в виде линейного преобразования сверточного типа с ядром $K(\tau)$, которое является одной из варьируемых функций при оптимизации. Таким образом, здесь применяется предсказание, описываемое интегральным уравнением.

Зачастую используют предсказания, описываемые дифференциальными уравнениями (предсказания дифференциального типа). Примером может служить запись широтно-модулированных импульсов на магнитную ленту. Оптимальным способом восстановления временного положения фронтов воспроизводимых импульсов служит метод обработки сигнала "по нулю производной" [28, 86], предполагающий двукратное дифференцирование сигнала, поступающего с головки. При этом все высокочастотные помехи "подчеркиваются". Чтобы

избежать двойного дифференцирования воспроизводимого сигнала, в режиме записи используют импульсы, полученные дифференцированием широтно-модулированных импульсов прямоугольной формы, т.е. используют предсказание дифференциального типа.

В работах [15, 69] описывается вокодер для передачи n непрерывных коррелированных сигналов по m каналам ($m \leq n$). Каждый из m сигналов является линейной комбинацией исходных n сигналов. Коэффициенты этого линейного преобразования, составляющие матрицу размера $m \times n$, постоянны. В описываемом вокодере речь передается с использованием набора сигналов, пропорциональных энергии речевого сигнала в различных полосах частот. Эти сигналы сильно коррелированы, и результатом предсказания является существенное уменьшение числа сигналов, необходимых для передачи разборчивой речи.

Аналоговый метод предсказания на основе линейного преобразования, состоящий в получении предсказанного сигнала как линейной комбинации фрагментов исходного, рассматривается в работе [70]. К недостаткам этого метода следует отнести необходимость использования многоканальной аппаратуры хранения и передачи сигнала, поскольку в результате предсказания получается m сигналов. Кроме того, фрагменты исходного сигнала, используемые в линейной комбинации, создаются путем пропускания исходного сигнала через полосовые фильтры, что усложняет аппаратуру и предъявляет к каналам связи различные требования по необходимой полосе пропускания.

Далее основное внимание уделяется стрип-методу преобразования сигналов и изображений [107, 110 и др.]. Сопоставляя его с перечисленными, можно отметить следующие характерные черты. Предсказание в стрип-методе осуществляется за счет линейного комбинирования фрагментов исходного сигнала или изображения. Это приводит к тому, что каждый фрагмент передаваемого сообщения несет информацию обо всех без исключения фрагментах исходного сообщения, что позволяет в случае потери или повреждения одного из фрагментов восстановить все изображение без заметных искажений.

При этом отпадает необходимость в использовании каких-либо фильтров или предсказывающих четырехполюсников. Здесь можно провести аналогию с голографическим преобразованием изображений, только роль отдельных точек (пикселей) играют конечные участки сигнала или фрагменты изображения, на которые оно разрезается (как в детских играх типа «puzzle»). Следует подчеркнуть, что в процессе фрагментации сигналов и изображений не происходит потери информации, как при преобразовании Фурье или аппроксимации, поэтому в отсутствие помех восстановление информации происходит без методической погрешности.

Таким образом, стрип-метод относится к группе методов, осуществляющих линейное предсказание и ориентированных в первую очередь на борьбу с импульсными помехами. Степень их ослабления естественно оценивать минимаксным критерием. Процедура предсказания (и восстановления) при использовании стрип-метода требует задержки на время длительности сигнала. Более подробное описание этого метода – цель монографии.

1. СТРИП-МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ

1.1. Стрип-метод линейных предсказаний и решаемые им задачи

Известно, что понятия памяти и связи тесно "переплетены" друг с другом. Если функция памяти – передача информации во времени, то функция связи – передача информации в пространстве. Обе функции имеют пассивный характер: информация лишь сохраняется и распространяется, но не подвергается активной, целенаправленной переработке [117]. Поэтому задачи, возникающие при разработке и эксплуатации систем передачи информации (каналов связи), с одной стороны, и хранения в аппаратуре записи информации - с другой стороны, во многом схожи. В частности, и в том, и в другом случае большое значение имеет повышение помехоустойчивости, т.е. увеличение отношения сигнал/помеха, непосредственно влияющего на точностные параметры передачи сигнала.

В технических приложениях довольно часто встречаются импульсные помехи, которые имеют вид пиков шума малой длительности и большой амплитуды [66, 130, 142]. Другим видом импульсных помех являются пропадания сигнала типа глубоких замираний при радиосвязи [27, 78] или "выпадения" сигнала из-за дефектов магнитного носителя при магнитной записи-воспроизведении сигналов измерительной информации [45, 122]. Зачастую импульсные помехи имеют спектр, близкий к спектру передаваемого или регистрируемого сигнала, и не могут быть ослаблены традиционными способами, например, методами оптимальной фильтрации [1, 3, 8, 26, 40]. Поэтому представляет интерес разработка метода, позволяющего уменьшить влияние импульсных помех без изменения полосы частот, скорости передачи информации, средней мощности и длительности сигнала во временной области, т.е. без изменения "объема" передаваемого сигнала [143].

Как показано во Введении, существует универсальный принцип борьбы с помехами канала связи путем предварительного преобразования (предсказания) сигнала при передаче и обратного преобразования его при приеме. Особенности применения этого принципа определяются конкретными ограничениями на предметную область и преследуемые цели.

Рассмотрим возможности применения принципа предсказания для решения следующей задачи.

Пусть имеется исходный сигнал $x(t) \in X$, предназначенный для передачи по каналу связи. Множество X содержит сигналы, характеризующиеся следующими свойствами:

- финитность, т.е. ограниченность во времени ($0 \leq t \leq T$) и по амплитуде ($|x| \leq D$);
- непрерывность и дифференцируемость (по крайней мере, отсутствие разрывов первого рода), обеспечивающие "гладкость" сигнала.

Для передачи сигнала $x(t)$ будем использовать систему связи, изображенную на рис. 1.7.

Применим в качестве кодера 1 устройство предсказания, характеризуемое оператором Φ , к которому предъявим следующие общие требования:

- существование обратного оператора Φ^{-1} , обеспечивающего точное восстановление сигнала при отсутствии помех;
- сохранение непрерывности и "гладкости" сигнала;
- достаточное количество варьируемых параметров для обеспечения удобства настройки;
- сравнительная простота технической реализации.

Оператор Φ , удовлетворяющий этим требованиям, можно использовать для решения различных задач по согласованию характеристик сигнала и канала связи, повышению помехоустойчивости передачи и т.д.

Перейдем к описанию класса линейных предсказывающих операторов Φ , удовлетворяющих перечисленным требованиям. Он был предложен в работах [86-88, 99, 102, 105, 123]; там же были рассмотрены вопросы технической реализации соответствующих операторов. Отличительная особенность операторов этого класса – конечномерный способ преобразования непрерывного сигнала. В соответствии с ним исходный скалярный сигнал $x(t)$ разбивается на n участков одинаковой длительности и формируются n их линейных комбинаций, из которых составляется преобразованный сигнал $y(t)$.

При этом общая длительность сигнала не изменяется, однако теперь каждый из участков несет информацию обо всем сигнале $x(t)$. На приемном конце происходит обратное преобразование (декодирование), в результате чего восстанавливается исходный вид сигнала.

С точки зрения математики, оператор Φ описанного преобразования сигнала на передающем конце и обратный оператор Φ^{-1} восстановления сигнала на приемном конце описываются уравнениями:

$$\Phi = S^{-1}AS, \quad \Phi^{-1} = S^{-1}A^{-1}S, \quad (1.1)$$

где S – стрип-оператор, осуществляющий преобразование исходного сигнала длительности T в n -мерную вектор-функцию длительностью T/n ; S^{-1} – обратный ему оператор; A – постоянная невырожденная $n \times n$ матрица, элементами которой служат коэффициенты линейных комбинаций участков преобразуемого сигнала.

Схема, поясняющая процедуру линейных прямого и обратного преобразований аналогового (непрерывного) сигнала $x(t)$, приведена на рис. 1.8.

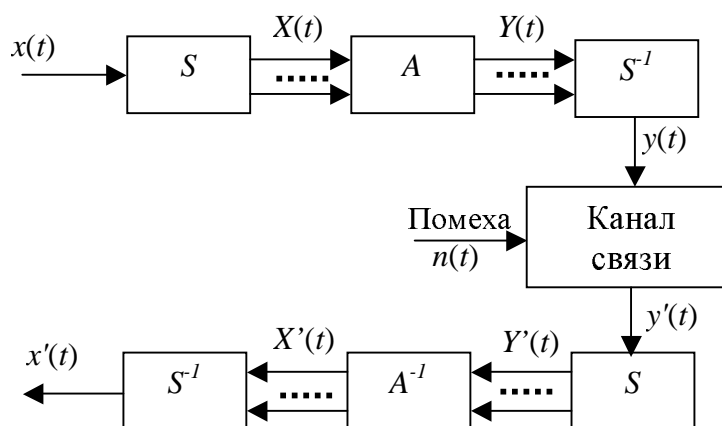


Рис. 1.8. Стрип-метод линейных предсказания, передачи и восстановления сигнала

$x(t)$ – исходный сигнал длительности T ; S – стрип-оператор "разрезания" сигнала на участки длительности $h=T/n$; $X(t)$ – вектор-функция длительности h ; A , A^{-1} – прямой и обратный операторы матричного преобразования; $Y(t)$ – вектор-функция преобразованного сигнала $Y = AX$; S^{-1} – обратный стрип-оператор ("склеивания" сигнала); $y(t)$ – сигнал длительности T , передаваемый по каналу связи; $y'(t)$ – сумма сигнала $y(t)$ и помехи $n(t)$ на выходе канала связи; $Y'(t)$ – вектор-функция смеси сигнала с помехой; $X'(t)$ – вектор-функция сигнала после обратного линейного преобразования; $x'(t)$ – принятый сигнал длительности T .

Ей соответствует цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= Sx, \quad \mathbf{Y} = A\mathbf{X}, \quad y = S^{-1}\mathbf{Y}, \quad y' = y + n, \\ \mathbf{Y}' &= S\mathbf{y}', \quad \mathbf{X}' = A^{-1}\mathbf{Y}', \quad x' = S^{-1}\mathbf{X}'. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для моделирования и исследования этой схемы удобно использовать пакет MATLAB. В нем, в частности, имеется команда **strips**, которая действует аналогично стрип-оператору. Она обеспечивает вывод на экран "длинного" графика функции, разрезая его на участки (англ. strip – полоска). К сожалению, для дальнейшей обработки результат этой команды недоступен, поэтому для реализации стрип-оператора необходимо писать пользовательскую функцию.

Поясним действие стрип-метода простым примером.

Пример 1.1. На рис.1.9,а показан график функции

$$x(t) = e^{-0,1t} + 0,2 \sin 6t, \quad 0 \leq t \leq 8 \text{ с.}$$

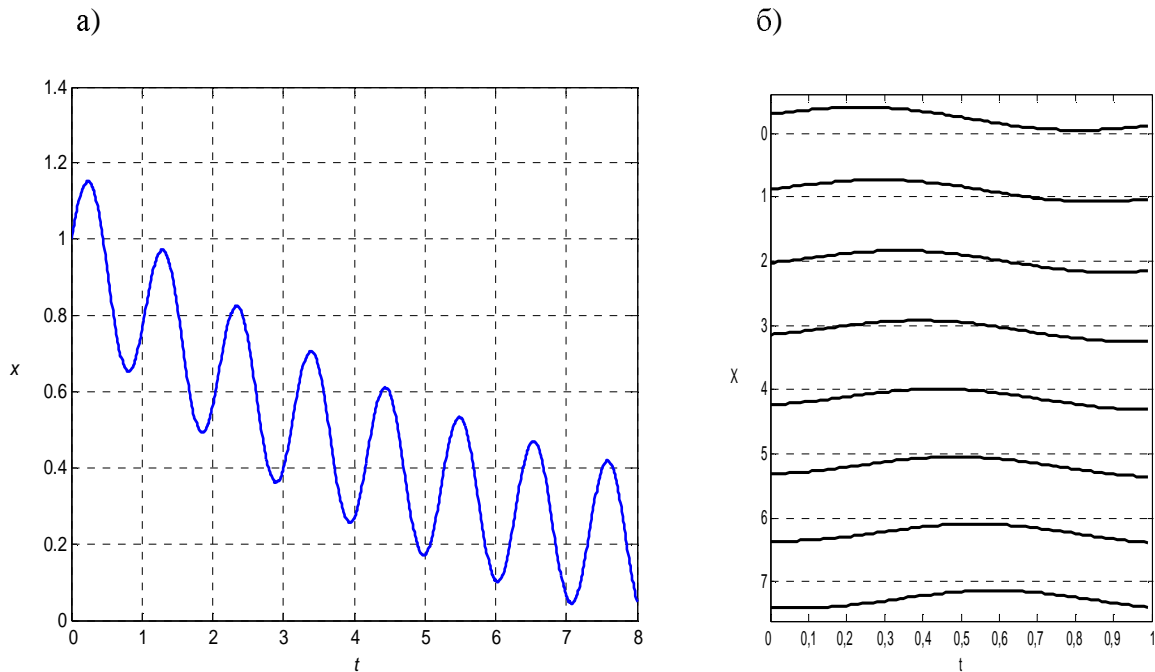


Рис. 1.9. Пример стрип-преобразования: а) исходный скалярный сигнал x , б) векторный сигнал X , полученный с помощью функции *strips*

"Разрезая" его на 8 участков длительностью 1 с каждый, получаем вектор-функцию $\mathbf{X}(t) \in R^8$, представленную на рис. 1.9,б. Графики построены в пакете MATLAB с помощью команд

```
t=0:.01:8; x=exp(-.1*t)+.2*sin(6*t);
plot(t,x), grid,
strips(x, 100).
```

Последней командой исходный сигнал $x(t)$, заданный массивом из 801 отсчета, "разрезается" на 8 участков длиной по 100 отсчетов.

В общем случае применение стрип-оператора S эквивалентно разбиению "длинного" исходного сигнала $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, на n участков равной длительности $h = T/n$ и получению n "коротких" сигналов вида:

$$x_1(t) = x(t), x_2(t) = x(t + T/n), \dots, x_n(t) = x(t + (n-1)T/n), 0 \leq t \leq T/n. \quad (1.3)$$

Из них формируется n -мерная вектор-функция $\mathbf{X}(t)$:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T/n. \quad (1.4)$$

При помощи неособенной квадратной матрицы $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{1,n}$, элементами которой являются действительные числа, вектор $\mathbf{X}(t)$ преобразуется в вектор $\mathbf{Y}(t)$:

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T/n. \quad (1.5)$$

Компоненты вектора $\mathbf{Y}(t)$ определяются формулами

$$y_i(t) = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{X}(t); \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.6)$$

где A_i – i -я строка матрицы A .

Оператор S^{-1} является обратным оператору S и производит операцию "склеивания" сигналов $y_i(t)$, $0 \leq t \leq T/n$, $i = 1, 2, \dots, n$, в единый сигнал $y(t)$ длительности T .

Этим завершается процедура кодирования (предыскажения) исходного сигнала. Далее сигнал $y(t)$ передается по каналу связи с помехами и на приемном конце подвергается процедуре декодирования, в которой используется матрица A^{-1} (рис. 1.8).

Поскольку в основе описанного преобразования лежит использование стрип-оператора, соответствующий метод предыскажения и восстановления сигналов был назван *стрип-методом*.

Пример 1.2. Проиллюстрируем описанное преобразование, положив $T=20$, $n=4$ и взяв в качестве исходного сигнала экспоненциально затухающий синусоидальный сигнал $x = e^{-0,1t} \sin \frac{\pi}{2}t$ (рис. 1.10,а). В результате стрип-преобразования он превращается в векторный сигнал X (рис. 1.10,б).

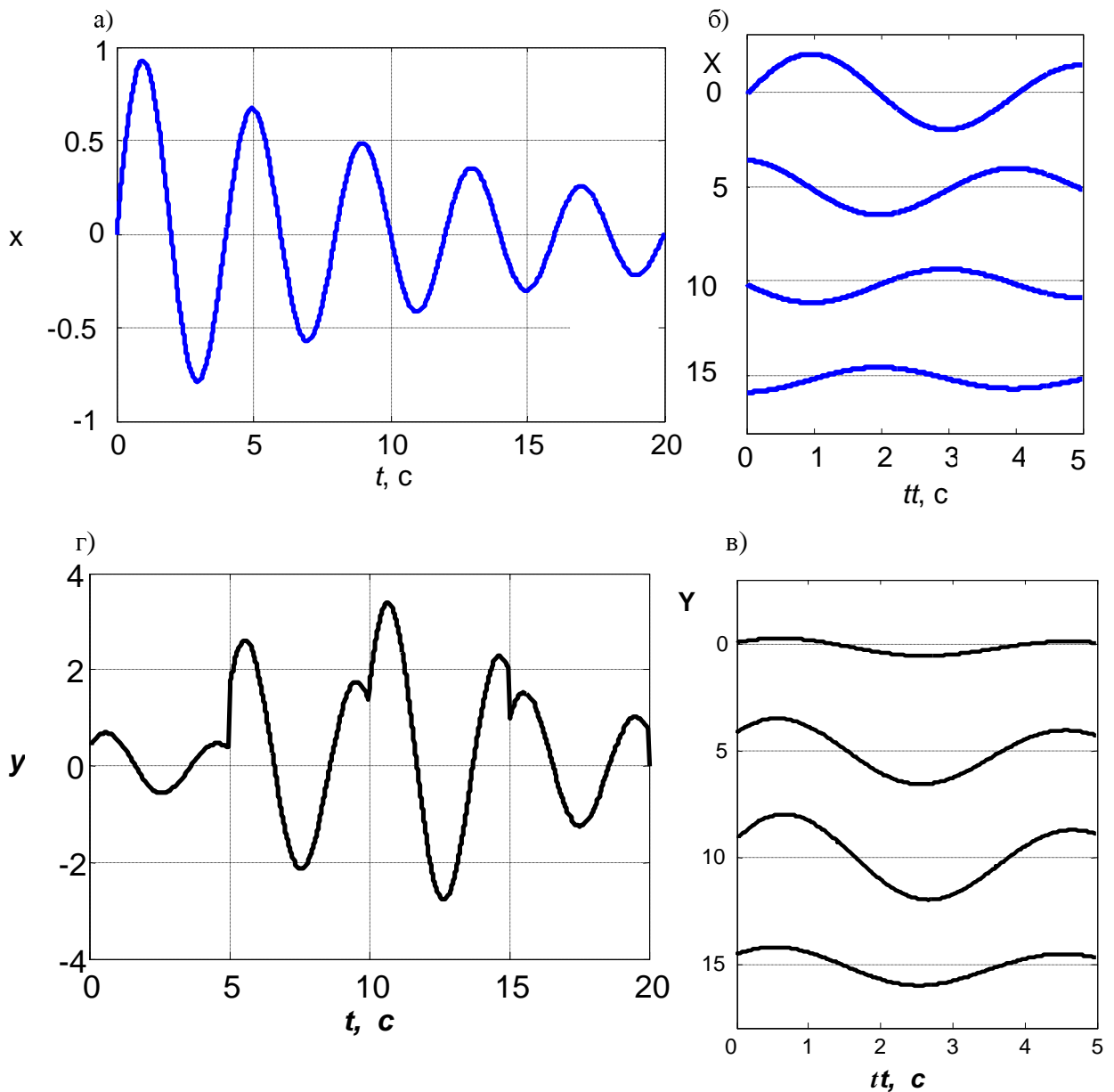


Рис. 1.10. Преобразование исходного сигнала с помощью матрицы A (1.7); а – исходный сигнал x ; б – векторный сигнал $X = Sx$; в – векторный сигнал $Y = AX$; г – передаваемый сигнал $y = S^{-1} Y$

Умножая его на матрицу \mathbf{A} с единичным определителем

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

получаем сигнал \mathbf{Y} (рис. 1.10,в), который после преобразования обратным стрип-оператором становится скалярным сигналом y (рис. 1.10,г). Этот сигнал передается по каналу связи и на приемном конце подвергается аналогичной цепочке преобразований с использованием матрицы \mathbf{A}^{-1}

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

При отсутствии помех он будет совпадать с исходным сигналом $x(t)$. Реализация описанной процедуры в пакете MATLAB производилась с помощью следующей последовательности команд.

%Программа strip1 (предыскажение исходного сигнала)

```
t=0:.01:20;tt=0:.01:5-.01;
```

```
x=sin(.5*pi*t).*exp(-.1*t);
```

% исходный сигнал x(t)

```
figure(1);plot(t,x,'LineWidth',2),grid
```

```
x1=x(1:500);x2=x(501:1000);x3=x(1001:1500);x4=x(1501:2000); % стрип-преобразование
```

```
X=[x1;x2;x3;x4];
```

```
figure(2);plot(tt,X)
```

```
A=[1 1 1 1; 4 3 2 1; 3 3 2 1; 2 2 2 1];
```

```
Y=A*X; plot(tt,Y),
```

```
y=[Y(:)' 0];
```

% обратное стрип-преобразование

```
figure(3);plot(t,y,'LineWidth',2),grid
```

% передаваемый сигнал y(t)

Заметим, что в результате выполненного преобразования информация о значении сигнала $x(t)$ в любой момент времени $0 \leq t \leq T/n$ содержится в каждой составляющей $y_i(t)$. Именно этот факт, полностью аналогичный голографической записи изображения [12], обеспечивает высокую помехоустойчивость преобразованной информации по отношению к импульсным помехам. Даже в случае полной потери информации с одного из участков $y_i(t)$ исходный сигнал может быть восстановлен (с некоторой погрешностью) в процессе выполнения обратного преобразования, которому подвергается вектор $\mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y}$, где $\Delta\mathbf{Y}$ – вектор-функция помехи. При этом погрешность $\Delta\mathbf{X}$ восстановления сигнала определяется по формуле

$$\Delta\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \Delta\mathbf{Y} \quad \text{или} \quad \Delta x_j(t) = \sum_{i=1}^n b_{ij} \cdot \Delta y_i(t),$$

где: b_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$ – элементы матрицы \mathbf{A}^{-1} .

Если в результате действия импульсной помехи одна из составляющих вектора $\Delta\mathbf{Y}$ окажется отличной от нуля, то это приводит, в общем случае, к появлению вектора $\Delta\mathbf{X}$, все компоненты которого отличны от нуля. Таким образом, вместо помехи по одной составляющей появляются помехи по всем составляющим, т.е. происходит "растягивание" импульсной помехи по всей длительности сигнала. Если матрица \mathbf{A} ортогональная, то амплитуда помехи уменьшается.

Пример 1.3. Вновь возьмем в качестве исходного сигнала затухающую синусоиду $x(t) = e^{-0,1t} \sin \frac{\pi}{2}t$ (рис. 1.11,а). Результат его преобразования в сигнал $y(t)$ с помощью ортогональной матрицы Адамара четвертого порядка

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \quad (1.8)$$

приведен на рис. 1.11,б.

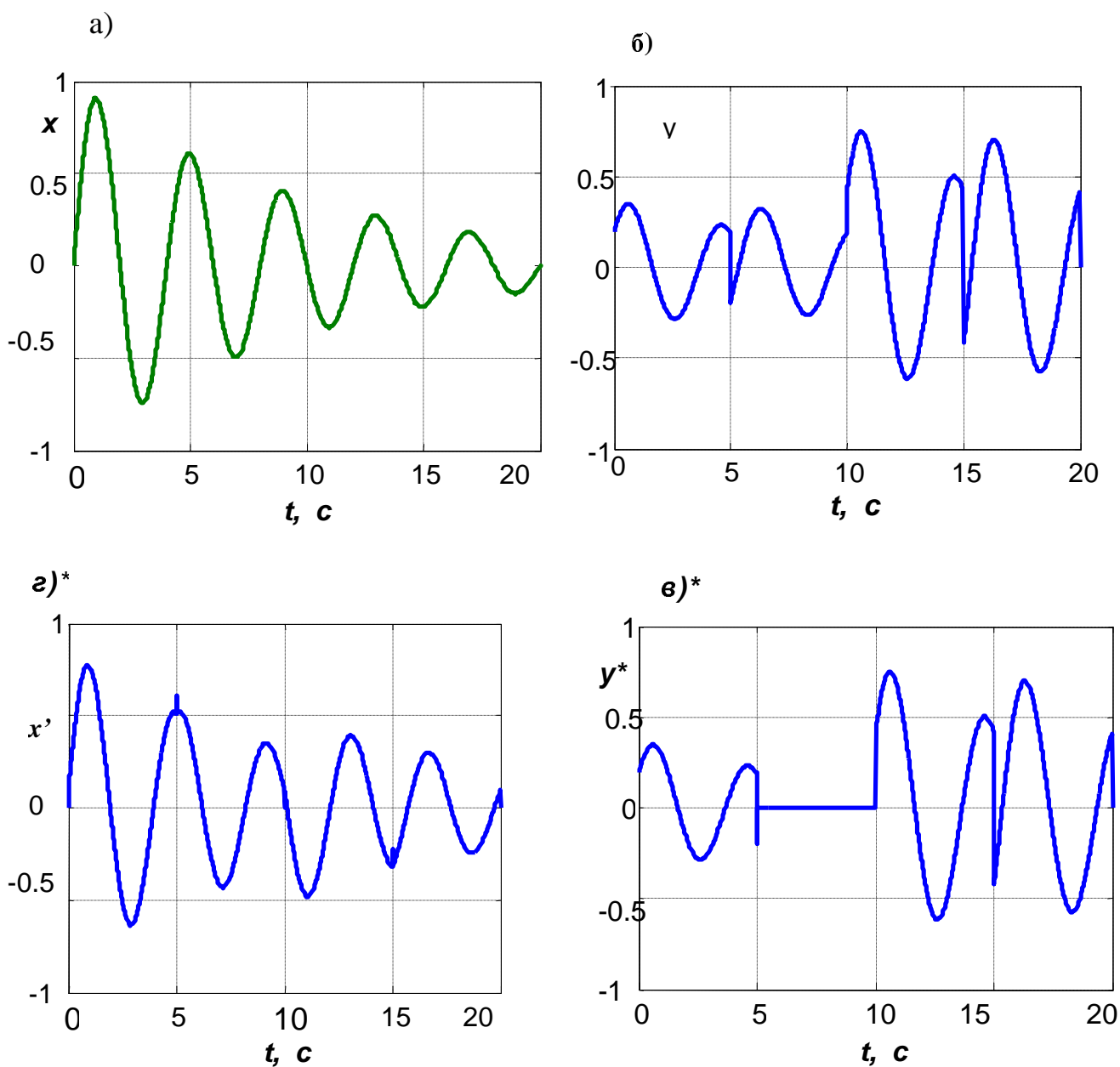


Рис. 1.11. Иллюстрация стрип-метода (пример 1.3): а – исходный сигнал x ; б – передаваемый сигнал v ; в – принятый сигнал v' ; г – восстановленный сигнал x'

На рис. 1.11,в показан сигнал $y'(t)$, отличающийся от сигнала $y(t)$ полным пропаданием сигнала на втором участке. Восстановленный сигнал $x'(t)$ (рис. 1.11,г) отличается от исходного сигнала $x(t)$ уже на всех участках, однако степень его искажения сравнительно невелика, поскольку помеха равномерно распределилась по всем четырем участкам.

Графики построены в пакете MATLAB с помощью программы **strip1**, в которой использовалась матрица **A** (1.8), и программа **istrip1**, текст которой приводится ниже.

```
%Программа istrip1 (восстановление исходного сигнала на приемном конце)
ye=y.*(1-(t>5&t<10)); % внесение помехи (обнуление сигнала на втором участке)
figure(1);plot(t,ye,'LineWidth',2),grid
y1=ye(1:500);y2=ye(501:1000);y3=ye(1001:1500);y4=ye(1501:2000);
Ye=[y1;y2;y3;y4]; % стрип-преобразование принятого сигнала
Xe=inv(A)*Ye;
Xe=Xe';xe=[Xe(:)' 0]; % обратное стрип-преобразование
figure(2);plot(t,x,'LineWidth',2),grid % восстановленный сигнал
```

Геометрический смысл ослабления помехи при обратном преобразовании состоит в следующем. Однократная помеха ΔY представляет собой вектор в пространстве R^n , имеющий направление одной из координатных осей. При использовании изометрического преобразования вектор ΔY поворачивается в n -мерном пространстве на некоторый угол без изменения своей величины, превращаясь в вектор ΔX . Помехи Δx_j являются его проекциями на координатные оси x_1, x_2, \dots, x_n ; следовательно, каждая из них меньше Δy_i . Коэффициенты a_{ij} являются направляющими косинусами вектора ΔX .

Описанный оператор Φ (1.1) обладает следующими свойствами:

- является линейным;
- отображает функциональное пространство $L_\infty(0, T)$ в $L_\infty(0, T)$, т.е. сохраняет непрерывность сигнала;
- конечномерен, так как имеет n^2 свободных параметров;
- множество операторов Φ изоморфно общей линейной группе $GL(n)$ невырожденных квадратных матриц.

Поясним последнее свойство. Если зафиксировать длительность участков сигнала $h=T/n$, то набор операторов Φ , задаваемых невырожденными $n \times n$ матрицами, образует группу по умножению (последовательное применение Φ_1 и Φ_2 дает некоторый оператор Φ_3 ; имеются единичный и обратный операторы). Таким образом, множество операторов Φ представляет собой n^2 -параметрическую группу Ли. Это дает возможность при многоступенчатой передаче, когда последовательно используются разные наборы предсказывающих устройств и каналов передачи сигнала, на приемном пункте применить единственное восстанавливающее устройство, характеризующееся оператором, обратным к произведению предсказывающих операторов.

Если вместо квадратной матрицы **A** прямого преобразования использовать прямоугольную $(n+k) \times n$ матрицу, появляются дополнительные возможности уменьшения уровня помех в восстановленном сигнале, а также их диагностики и коррекции за счет введения избыточности в сигнал, передаваемый по каналу связи [108].

Полезно рассмотреть, во что превращается линейное преобразование, описываемое формулами (1.1) – (1.6), при стремлении длительности участка h к нулю. В этом случае, применяя предельный переход при $n \rightarrow \infty$ в равенстве

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j(t), \quad (1.9)$$

получим:

$$y(t') = \int_0^T K(t', t) \cdot x(t) dt; \quad t', t \in [0, T] \quad (1.10)$$

Из (1.10) видно, что линейное преобразование в пределе превращается в линейный интегральный оператор Фредгольма первого рода [64] с ядром $K(t', t)$. Для того чтобы обратная операция была также линейным интегральным преобразованием вида:

$$x(t) = \int_0^T L(t, t') \cdot y(t') dt', \quad t, t' \in [0, T], \quad (1.11)$$

необходимо предъявить к ядру $L(t, t')$ следующее требование:

$$\int L(t, t') \cdot K(t', t) dt' = \delta(t - t'), \quad (1.12)$$

где $\delta(t - t')$ – дельта-функция Дирака.

При этом в отсутствие помех операция восстановления превращается в тождественное преобразование:

$$x(t) = \int_0^T L(t, t') \cdot y(t') dt' = \int_0^T \left[\int_0^T L(t, t') \cdot K(t', t) dt' \right] \cdot x(t) dt' = \int_0^T \delta(t - t') \cdot x(t) dt' \equiv x(t). \quad (1.13)$$

Ядро $L(t, t')$ называется взаимным ядром, ассоциированным с ядром $K(t', t)$.

Важным частным случаем является пара следующих преобразований:

$$L[x(t)] = y(t), \quad (1.14)$$

$$x(t) = \int_t K(t, t') \cdot y(t') dt'. \quad (1.15)$$

где L – дифференциальный оператор,

$K(t, t')$ – функция Грина для линейной краевой задачи (1.14) [116].

Основная проблема в рамках стрип-метода состоит в исследовании требований к операторам прямого и обратного преобразований аналогового сигнала и поиск операторов Φ , удовлетворяющих этим требованиям. Требования к операторам будут различными в зависимости от поставленных задач. Перечислим основные из них.

1. Сохранение непрерывности и "гладкости" передаваемого сигнала $y(t)$ (несмотря на наличие элементов "разрывности" в процедуре преобразования).

2. Согласование свойств сигнала с каналом:

– обеспечение стационарности сигнала $y(t)$ по дисперсии;

– сужение частотного спектра преобразованного сигнала;

– выравнивание "информативности" каждого участка сигнала $y_i(t)$, выражающееся в максимальной коррелированности участков сигнала $y(t)$ с участками сигнала $x(t)$.

3. Повышение помехоустойчивости передачи сигнала без введения в него информационной избыточности:

– получение равномерного распределения импульсной помехи по длительности выходного сигнала $x(t)$ ("растягивание" помехи);

– оптимизация предсказания и фильтрации сигналов по чебышевской норме.

4. Борьба с помехами с введением информационной избыточности:

– уменьшение мощности помех в восстановленном сигнале $x'(t)$;

– обнаружение, локализация, идентификация и коррекция помех.

Остановимся отдельно на каждой из этих задач.

1.2. Обеспечение непрерывности преобразованного сигнала

Если исходный сигнал $x(t)$ был непрерывным на интервале $0 \leq t \leq T$, то после выполнения преобразования $y(t) = \Phi x(t)$ при использовании матрицы A размера $n \times n$ сигнал $y(t)$ будет иметь, в общем случае, $(n - 1)$ разрывов на границах участков $y_i(t)$. На практике это приведет к тому, что в выходном сигнале появятся дополнительные помехи из-за конечной полосы пропускания реального канала связи.

Поэтому возникает вопрос о выделении класса матриц A , не приводящих к появлению таких разрывов, т.е. сохраняющих непрерывность сигнала.

Условия, накладываемые на выбор матрицы A для получения непрерывной на $[0, T]$ функции $y(t)$, могут быть записаны в виде:

$$y_i(T/n) = y_{i+1}(0); \quad i = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (1.16)$$

Согласно равенствам (1.3-1.5) фрагменты преобразованного сигнала формируются по формулам

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j(t); \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.17)$$

Поэтому условия (1.16) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j\left(\frac{T}{n}\right) = \sum_{j=1}^n a_{i-1,j} \cdot x_j(0); \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Учитывая, что $x_1(0)=x(0)$, $x_n(T/n)=x(T)$ и $x_j(T/n)=x_{j+1}(0)$, при $i = 1, 2, \dots, n-1$, получим совокупность равенств

$$a_{i,n} \cdot x(T) - a_{i+1,1} \cdot x(0) + \sum_{j=2}^n (a_{i,j-1} - a_{i+1,j}) \cdot x_j(0) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (1.18)$$

Для их выполнения при произвольном сигнале $x(t)$ необходимо, чтобы элементы матрицы \mathbf{A} удовлетворяли следующим условиям:

$$a_{i,j-1} - a_{i+1,j} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad j = 2, \dots, n, \quad (1.19)$$

$$a_{i,n} \cdot x(T) - a_{i+1,1} \cdot x(0) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (1.20)$$

Согласно условиям (1.19) элементы матрицы \mathbf{A} , лежащие на каждой из диагоналей (на главной или параллельных ей), должны быть равны. Матрицы, удовлетворяющие этому свойству, называются *тёплицевыми* [22, 34, 61, 83].

Выполнение условий (1.19) необходимо, но недостаточно для получения непрерывной функции $y(t)$, так как требуется еще выполнение краевых условий (1.20), которые связывают значения сигнала $x(t)$ на краях интервала $[0, T]$. Здесь можно выделить четыре различных случая:

$$x(0) = x(T) = 0; \quad (1.21)$$

$$x(0) = x(T) \neq 0; \quad (1.22)$$

$$x(0) = \alpha x(T), \quad \alpha = \text{const} \neq 1; \quad (1.23)$$

$$x(0), x(T) - \text{произвольные}. \quad (1.24)$$

Практический интерес представляют два первые из них. В случае (1.21), когда сигнал $x(t)$ начинается и заканчивается в нуле, краевые условия (1.20) превращаются в тождества и применение *тёплицевой* матрицы оказывается не только необходимым, но и достаточным условием обеспечения непрерывности $y(t)$.

В случае (1.22), когда начальное и конечное значения сигнала совпадают, но не равны нулю, краевые условия (1.20) принимают вид $a_{i,n} = a_{i+1,1}$, $i=1, \dots, n-1$, т.е. последний элемент каждой строки матрицы \mathbf{A} должен совпадать с первым элементом следующей строки. В сочетании с требованием (1.19) это означает, что все строки матрицы \mathbf{A} должны получаться из ее первой строки циклическим сдвигом вправо. Матрицы такого вида называются *циклическими* (*циркулянтами*); они обладают рядом специальных свойств [34].

Следует отметить, что условия непрерывности производных функции $y(t)$ требуют идентичных ограничений на выбор матрицы \mathbf{A} , т.е. обеспечение условий непрерывности сигнала $y(t)$ автоматически гарантирует и сохранение непрерывности его первых производных.

Более точно этот результат формулируется в виде следующей теоремы [106, 127].

Теорема 1. Пусть функция $x(t)$ и ее первые k производных непрерывны на интервале $[0, T]$ и равны нулю на краях интервала. Тогда для непрерывности на том же интервале функции $y(t)$, получаемой из $x(t)$ при помощи линейных преобразований (1.5), и непрерывности ее первых k производных необходимо и достаточно, чтобы матрица \mathbf{A} была *тёплицевой*.

Доказательство. Для доказательства рассмотрим равенства (1.16, 1.17) для первых k производных от сигнала $y(t)$:

$$y_i^{(r)}(T/n) = y_{i+1}^{(r)}(0); \quad y_i^{(r)}(t) = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i^{(r)}(t); \quad i = 1, \dots, n; \quad r = 1, \dots, k.$$

Если сигнал $x(t)$ вместе со своими k производными обращается в нуль на краях интервала, то условия (1.20) и их аналоги выполняются тождественно, поэтому условия теплицевости (1.19) являются необходимыми и достаточными.

Таким образом, применение теплицевых матриц для преобразования сигналов $x(t)$, удовлетворяющих условиям теоремы, обеспечивает сигналу $y(t)$ такую же степень "гладкости", как и у сигнала $x(t)$. Заметим, что начальное и конечное значения сигнала $y(t)$ совпадают, т.е. он будет непрерывным (вместе с производными) и после «склейки» его в кольцо.

Пример 1.4. Матрицы \mathbf{A} (1.7), (1.8), использованные в примерах 1.2, 1.3, не удовлетворяли условиям теоремы, поэтому графики сигнала $y(t)$ (рис. 1.10,г, рис. 1.11,б) имели разрывы на границах участков.

Вновь возьмем в качестве исходного сигнала функцию $x(t) = e^{-0,1t} \sin \frac{\pi}{2}t$, (рис. 1.11,а) и преобразуем ее в сигнал $y(t)$ с помощью матрицы

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

Она симметричная, теплицева, ортогональная и циклическая одновременно, т.е. полностью удовлетворяет условиям теоремы.

Сформированный с ее помощью сигнал $y(t)$ показан на рис. 1.12. Он непрерывен, причем его начальное и конечное значения совпадают (равны 0,2). Однако в нем есть изломы на границах участков, т.е. разрывы первой производной. Это объясняется ненулевыми значениями первых производных сигнала $x(t)$ на краях интервала.

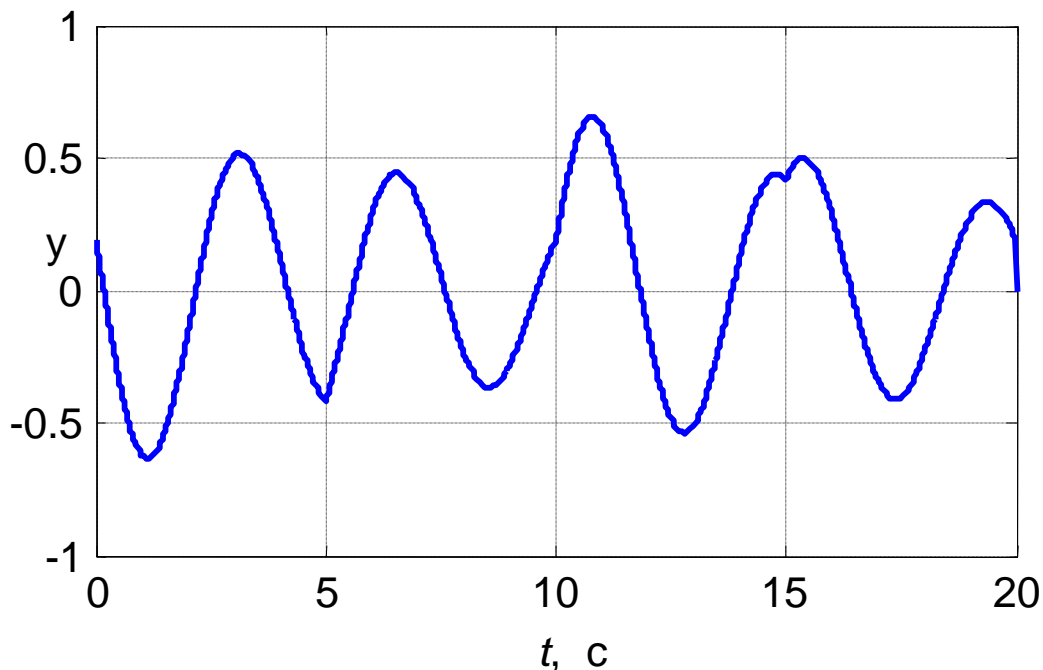


Рис. 1.12. Сигнал $y(t)$ (пример 1.4) непрерывен, но имеет точки излома

Пример 1.5. Чтобы обеспечить нулевые краевые условия по первой производной, умножим входной сигнал предыдущего примера на весовую функцию $t(20 - t)$, т.е. возьмем $x(t) = t(20 - t)e^{-0,1t} \sin \frac{\pi}{2}t$, $0 \leq t \leq 20$. Благодаря этому не только сигнал $x(t)$, но и его первая производная обращаются в ноль на краях интервала (рис. 1.13,а). Теперь график сигнала $y(t)$, сформированный с применением матрицы \mathbf{A} (1.25), не имеет изломов, т.е. непрерывен вместе со своей производной (рис. 1.13,б).

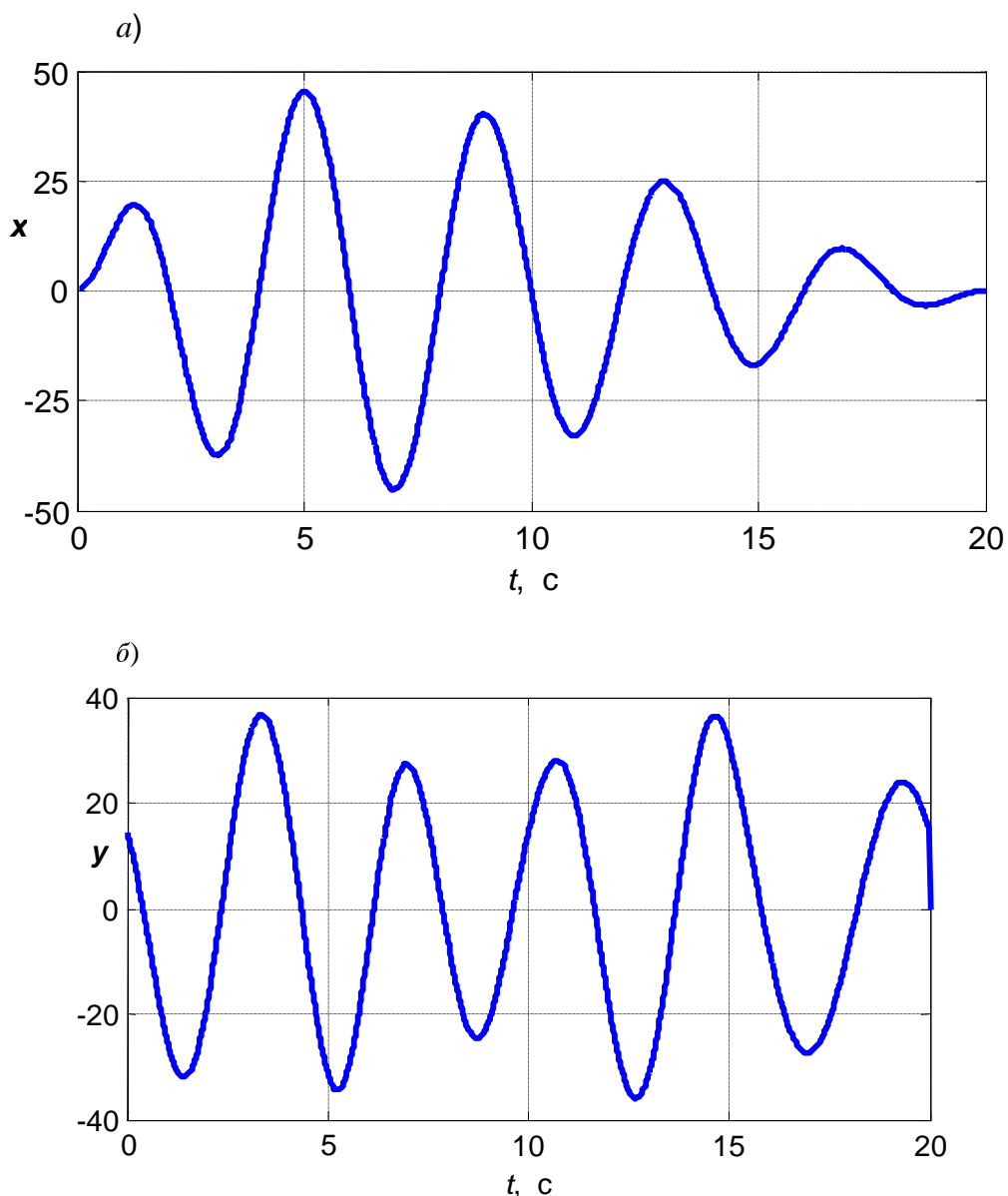


Рис. 1.13. Сохранение непрерывности и гладкости (пример 1.5) : а – исходный сигнал $x(t)$; б – преобразованный сигнал $y(t)$

Заметим, что на практике для выполнения условий теоремы достаточно дополнить исходный сигнал короткими участками в начале и конце, доопределив на них функцию $x(t)$ должным образом.

1.3. Выравнивание дисперсии нестационарного сигнала

Дисперсия аналоговых сигналов, передаваемых по каналам связи, обычно меняется во времени. Такая нестационарность сигнала приводит к заметным перепадам мощности на входе

канала и не позволяет рационально использовать его динамический диапазон. Желательно выполнить предварительное преобразование исходного сигнала таким образом, чтобы передаваемый сигнал был внутренне стационарен по дисперсии. Это позволит при той же средней мощности сигнала уменьшить перепады его колебаний.

Рассмотрим реализацию случайного центрированного процесса $x(t)$ конечной длительности $0 \leq t \leq T$ в предположении, что дисперсия $D_x(t)$ этого сигнала меняется во времени, т.е. сигнал является существенно нестационарным. При этом автокорреляционная функция и интервал корреляции процесса также будут зависеть от времени. Обозначим максимальное значение интервала корреляции $\tau_0(t)$ на промежутке $0 \leq t \leq T$ через τ_{max} . Тогда можно считать, что

$$E [x(t) \cdot x(t + \tau_{max})] = 0, \quad (1.26)$$

где E – символ математического ожидания.

Поставим задачу выравнивания дисперсии нестационарного сигнала в рамках стрип-метода. Она сводится к отысканию матрицы \mathbf{A} , обеспечивающей равенство дисперсий $D_{y_i}(t)$ на всех участках преобразованного сигнала $y(t)$. Решение этой задачи дается следующей теоремой [12, 99, 100, 108].

Теорема 2. Пусть сигнал $y(t)$ сформирован путем операции линейного предсказания исходного сигнала $x(t)$ в соответствии с формулами (1.1) – (1.5). Для того чтобы дисперсии отдельных участков $y_i(t)$ сигнала $y(t)$ были равны между собой, необходимо и достаточно чтобы все элементы матрицы \mathbf{A} были равны по абсолютной величине.

Доказательство. Поскольку на основании (1.5) $y_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t)$, то для дисперсии

$D_{y_i}(t)$ получим:

$$D_{y_i} = E \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \cdot x_j^2(t) \right] + E \left[\sum_{k, j=1, k \neq j}^n a_{ij} \cdot a_{ik} \cdot x_j(t) \cdot x_k(t) \right]. \quad (1.27)$$

При выборе длительности участка $\tau = T/n \geq \tau_{max}$ из (1.26) следует, что второе слагаемое формулы (1.27) равняется нулю. Поэтому из (1.27) получаем:

$$D_{y_i}(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \cdot D_{x_j}(t). \quad (1.28)$$

Заметим, что математическое ожидание $\mu_{y_i}(t)$ i -го участка преобразованного сигнала связано с математическим ожиданием исходного процесса формулой

$$\mu_{y_i}(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \mu_{x_j}(t), \quad (1.29)$$

из которой видно, что, если исходный процесс центрирован ($\mu_x = 0$), то и преобразованный сигнал будет центрированным.

Для получения сигнала с одинаковой дисперсией по участкам необходимо выбирать коэффициенты a_{ij} так, чтобы

$$D_{y_1} = D_{y_2} = \dots = D_{y_n} = D_y. \quad (1.30)$$

Из (1.28) следует, что для выполнения условия (1.30) при произвольных D_{x_j} необходимо и достаточно равенство квадратов элементов каждого столбца матрицы \mathbf{A} между собой, т.е.

$$a_{1j}^2 = a_{2j}^2 = \dots = a_{nj}^2 = c; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.31)$$

Это означает, что в сигнал $y_1(t)$ все компоненты $x_i(t)$ войдут с одинаковыми весами; с теми же весами они войдут и во все остальные сигналы $y_i(t)$:

$$y_i(t) = c [\pm x_1(t) \pm x_2(t) \pm \dots \pm x_n(t)], \quad i = \overline{1, n}.$$

Поскольку при вычислении дисперсии знаки сигналов не играют роли, то средняя дисперсия на всех участках будет одинакова. Условие (1.31) с необходимостью приводит к тому что матрица A должна иметь равные по абсолютной величине элементы. При этом она не должна быть вырожденной.

Важным примером матриц, удовлетворяющих обоим этим условиям, служат матрицы Адамара – ортогональные матрицы с элементами ± 1 . К сожалению, они существуют только для значений n , кратных четырем. В пакете MATLAB есть функция **hadamard**, обеспечивающая построение матрицы Адамара для случаев, когда n , $n/12$ или $n/20$ являются степенями двойки. Первые 17 чисел этого перечня таковы: 1, 2, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 32, 40, 48, 64, 80, 96, 128, 160, 192.

Например, для $n = 2, 4, 8$ матрицы Адамара имеют вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Дополнительные сведения о матрицах Адамара, а также некоторые другие невырожденные матрицы, близкие к ним по свойствам, приведены в приложении.

Если исходный сигнал стационарен по дисперсии и строки матрицы A нормированы (т.е. $\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 1; \quad i = 1, \dots, n$), то преобразование сигнала $x(t)$ с использованием таких матриц приводит к сигналу $y(t)$, также стационарному по дисперсии:

$$D_{y_i} = D_x \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = D_x. \quad (1.32)$$

Следует отметить, что значения автокорреляционной функции многих реальных сигналов с возрастанием времени асимптотически стремятся к нулю, но не достигают его ни при каких конечных τ . В этом случае равенство (1.26) выполняется лишь приближенно:

$$|E[x(t) \cdot x(t + \tau)]| \leq \varepsilon \cdot D_{\max},$$

где D_{\max} – максимальное значение дисперсии сигнала $x(t)$, ε – малая величина.

Из-за этого средние дисперсии участков сигнала будут несколько отличаться друг от друга.

Если учитывать только корреляционные связи между соседними участками, пренебрегая корреляционными связями между остальными (более удаленными участками), то можно показать [123], что разброс средних дисперсий составит примерно 2ε . Следовательно, при достаточно малом ε колебания дисперсии будут незначительными. Например, при $\varepsilon = 0,01$ отклонения дисперсии от среднего значения не превысят 2 %. Отметим, что это касается только средних дисперсий участков и не относится к поведению функции внутри каждого участка.

Пример 1.6. Выполним преобразование нестационарного сигнала $x = e^{-0.08t} \sin \frac{3\pi}{7}t$, $0 \leq t \leq 21$ с (рис. 1.14,а) с помощью матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (1.33)$$

Она получена из симметричной матрицы Адамара восьмого порядка отбрасыванием первой строки и первого столбца.

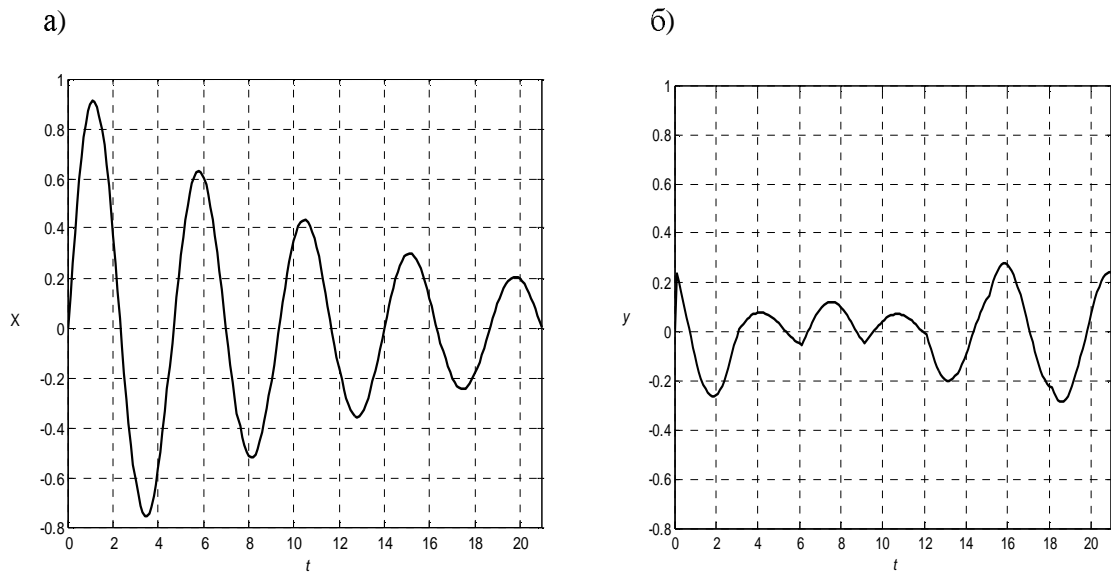


Рис. 1.14. Выравнивание дисперсии (пример 1.6): а – исходный сигнал x ; б – преобразованный сигнал y

Разбивая исходный сигнал на семь участков и подвергая его стрип-преобразованию, получим сигнал y , показанный на рис. 14,б. Вычисления проводились с помощью следующей MATLAB-программы:

```
t=0:.1:21;x=sin(3*pi*t/7).*exp(-.08*t);figure(1);plot(t,x),grid % исходный сигнал
x1=x(1:30);x2=x(31:60);x3=x(61:90);x4=x(91:120);x5=x(121:150);x6=x(151:180);
x7=x(181:210);X=[x1;x2;x3;x4;x5;x6;x7]; % стрип-преобразование исходного сигнала

A=[-1 -1 1 -1 1 1 -1
-1 -1 -1 1 -1 1 1
1 -1 -1 -1 1 -1 1
1 1 -1 -1 -1 1 -1
-1 1 1 -1 -1 -1 1
1 -1 1 1 -1 -1 -1
-1 1 -1 1 1 -1 -1]; % укороченная матрица Адамара
A=A/norm(A); Y=A*X; % сигнал с выровненной дисперсией
y=Y(:);plot(t,y),grid
```

Анализ графиков показывает, что амплитуда и средняя дисперсия сигнала $x(t)$ на первом и последнем участках отличаются примерно в семь раз, в то время как те же характеристики сигнала $y(t)$ практически одинаковы.

1.4. Выравнивание информативности нестационарного сигнала

Выравнивание информативности участков преобразованного сигнала $y(t)$ сводится к выполнению требования, чтобы каждый участок $y_i(t)$ содержал максимальную информацию о всех участках исходного сигнала $x(t)$. При этом предполагается, что все участки $x_j(t)$ равноценны по количеству содержащейся в них информации. Другими словами, каждый участок $y_i(t)$ должен быть максимально коррелирован (максимально линейно стохастически зависим) со всеми участками сигнала $x(t)$.

Эта постановка задачи противоположна задаче сжатия данных путем устранения их коррелированности [154]. При сжатии данных отыскивается такой набор базисных функций, чтобы разложение по нему содержало максимум информации (и мощности) при ограниченном числе членов ряда. Критерием оптимальности выбираемого базиса служит минимальность (в среднеквадратическом смысле) помехи в выходном сигнале, обусловленной отбрасыванием остальных членов разложения. Для стационарных процессов оптимальное решение дается разложением Карунена - Лоэва [9, 76] по собственным функциям автокорреляционного ядра исходного сигнала. Оно представляет собой разложение случайной вектор-функции на взаимно ортогональные некоррелированные составляющие.

В случае стрип-преобразования автокорреляционная матрица аналогового сигнала может быть приближенно построена как матрица, элементами которой являются значения взаимной корреляции участков сигнала длительности T/n :

$$\mathbf{R}_{xx} = [r_{ij}^{xx}] = E[\mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{X}^T(t)] \quad (1.34)$$

где $r_{ij}^{xx} = E[x_i(t) \cdot x_j(t)]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$; $\mathbf{X}(t)$ – вектор-функция, составленная из участков сигнала $x(t)$.

Разложение Карунена – Лоэва диагонализует автокорреляционную матрицу путем линейного преобразования $\mathbf{Y}=\mathbf{H}\mathbf{X}$, где \mathbf{H} – ортонормальная матрица, составленная из собственных векторов матрицы \mathbf{R}_{xx} . При этом корреляционная матрица подвергается конгруэнтному преобразованию

$$\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{H}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}^T = \mathbf{H}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}^{-1} \quad (1.35)$$

и принимает вид

$$\mathbf{R}_{yy} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (1.36)$$

где λ_i – собственные числа матрицы \mathbf{R}_{xx} .

Поставленная здесь цель прямо противоположна и состоит в том, чтобы получить автокорреляционную матрицу с максимально возможными и внедиагональными элементами (в идеале – матрицу с единичными элементами). Для этого подвергнем матрицу \mathbf{R}_{yy} преобразованию подобия с помощью некоторой ортонормальной матрицы \mathbf{U} , что даст новую матрицу \mathbf{R}_{zz} :

$$\mathbf{R}_{zz} = \mathbf{U}\mathbf{R}_{yy}\mathbf{U}^T = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_{1i}^2 & \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_{1i} \cdot u_{2i} & \dots & \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_{1i} \cdot u_{ni} \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_{2i} \cdot u_{1i} & \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_{2i}^2 & \dots & \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_{2i} \cdot u_{ni} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_{ni} \cdot u_{1i} & \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_{ni} \cdot u_{2i} & \dots & \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_{ni}^2 \end{bmatrix}. \quad (1.37)$$

Здесь u_{ij} – элементы матрицы \mathbf{U} ; $\mathbf{Z}=\mathbf{U}\mathbf{Y}=\mathbf{U}\mathbf{H}\mathbf{X}$; $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1} = [u_{ji}]_{1,n}$ – транспонированная матрица \mathbf{U} .

В частности, если \mathbf{U} – матрица Адамара (ортогональная матрица с определителем, равным n), то $u_{1i}^2 = u_{2i}^2 = \dots = u_{ni}^2 = 1$ и все диагональные элементы матрицы \mathbf{R}_{zz} будут одинаковы:

$$n \cdot r_{ii}^{zz} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_{ii}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_{2i}^2 = \dots = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_{ni}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Внедиагональные элементы будут вычисляться по формулам

$$r_{ij}^{zz} = \pm \lambda_1 \pm \lambda_2 \pm \dots \pm \lambda_n$$

при различных сочетаниях знаков, причем число положительных и отрицательных слагаемых всегда будет одинаковым. Если одно из собственных чисел будет заметно больше других, то все внедиагональные элементы окажутся достаточно большими и близкими по величине, т.е. цель выравнивания информативности окажется достигнутой.

Для строгой постановки задачи выравнивания информативности необходимо ввести критерий, подлежащий максимизации.

Будем считать, что преобразование исходного сигнала $x(t)$ в сигнал $y(t)$ происходит по формулам стрип-преобразования (1.1):

$$X(\tau) = Sx(t), \quad Y(\tau) = AX(\tau), \quad y(t) = S^{-1}Y(\tau), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{T}{n}.$$

Обозначим через \mathbf{R}_{xx} , \mathbf{R}_{yy} , \mathbf{R}_{yx} автокорреляционные матрицы вектор-функций $\mathbf{X}(t)$, $\mathbf{Y}(t)$ и их взаимнокорреляционную матрицу. Они связаны очевидными соотношениями

$$\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{A}^T, \quad \mathbf{R}_{yx} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{xx}.$$

Элемент r_{ij}^{yx} матрицы \mathbf{R}_{yx} характеризует информацию о j -ой компоненте вектора \mathbf{X} , содержащуюся в i -й компоненте вектора \mathbf{Y} . Для достижения равномерной информативности нужно добиться, чтобы модули всех элементов были примерно равны, т.е. максимизировать среднее значение элементов матрицы \mathbf{R}_{yx} .

Поэтому в качестве максимизируемого критерия можно взять сумму модулей элементов матрицы \mathbf{R}_{yx} , деленную на нормирующий множитель, который учитывает дисперсии сигналов x , y и число участков разбиения. Это приводит к следующему критерию [125]:

$$\rho = \frac{\sum_{i,j=1}^n |r_{ij}^{yx}|}{\sqrt{n \cdot \text{tr}\mathbf{R}_{xx} \cdot \text{tr}\mathbf{R}_{yy}}}, \quad (1.38)$$

где

$$\text{tr}\mathbf{R}_{xx} = \sum_{i=1}^n r_{ii}^{xx} = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \text{tr}\mathbf{R}_{yy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \cdot \lambda_j. \quad (1.39)$$

Исходя из равенства $\mathbf{Y}=\mathbf{A}\mathbf{X}$ и учитывая (1.34) и (1.36), для взаимнокорреляционной матрицы \mathbf{R}_{yx} получаем:

$$\mathbf{R}_{yx} = [r_{ij}^{yx}]_{1,n} = \begin{bmatrix} a_{11}\lambda_1 & a_{12}\lambda_2 & \dots & a_{1n}\lambda_n \\ a_{21}\lambda_1 & a_{22}\lambda_2 & \dots & a_{2n}\lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\lambda_1 & a_{n2}\lambda_2 & \dots & a_{nn}\lambda_n \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

Требуется найти значения параметров a_{km} , которые максимизируют выбранный критерий ρ :

$$\rho_{\max} = \max_{a_{km}} \frac{\sum_{i,j=1}^n |r_{ij}^{yx}|}{\sqrt{n \cdot \text{tr} \mathbf{R}_{xx} \cdot \text{tr} \mathbf{R}_{yy}}} = \max_{a_{km}} \frac{F}{C}, \quad (1.41)$$

где $F = \sum_{i,j=1}^n |r_{ij}^{yx}|$ и $C = \sqrt{n \cdot \text{tr} \mathbf{R}_{xx} \cdot \text{tr} \mathbf{R}_{yy}}$.

Чтобы найти экстремум, продифференцируем критерий по a_{km} и приравняем производные нулю:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}a_{km}} \left(\frac{F}{C} \right) = \frac{\frac{\mathbf{d}F}{\mathbf{d}a_{km}} \cdot C - \frac{\mathbf{d}C}{\mathbf{d}a_{km}} \cdot F}{C^2} = 0; \quad k, m = 1, 2, \dots, n. \quad (1.42)$$

Очевидно, что $C^2 \neq 0$, так как исходный сигнал $x(t) \neq 0$ и линейное преобразование (1.5) - невырожденное. Поэтому уравнение (1.42) можно переписать в виде:

$$\frac{\frac{\mathbf{d}F}{\mathbf{d}a_{km}}}{\frac{\mathbf{d}C}{\mathbf{d}a_{km}}} = \frac{F}{C} = \rho_{\max}; \quad k, m = 1, 2, \dots, n. \quad (1.43)$$

Из соотношений (1.40) и (1.41) следует, что

$$\frac{\mathbf{d}F}{\mathbf{d}a_{km}} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}a_{km}} \left(\sum_{i,j=1}^n |r_{ij}^{yx}| \right) = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}a_{km}} \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij-1} \cdot \lambda_j| \right) = \lambda_m \cdot \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}a_{km}} |a_{km}| = \lambda_m \cdot \text{sign} a_{km}, \quad k, m = 1, 2, \dots, n. \quad (1.44)$$

На основании формул (1.39) и (1.41) находим:

$$\frac{\mathbf{d}C}{\mathbf{d}a_{km}} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}a_{km}} \left(\sqrt{n \cdot \text{tr} \mathbf{R}_{xx} \cdot \text{tr} \mathbf{R}_{yy}} \right) = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}a_{km}} \left(\sqrt{n \cdot \text{tr} \mathbf{R}_{xx} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \cdot \lambda_j} \right) = \lambda_m a_{km} \sqrt{\frac{n \text{tr} \mathbf{R}_{xx}}{\text{tr} \mathbf{R}_{yy}}}, \quad k, m = 1, 2, \dots, n. \quad (1.45)$$

Подставляя выражения (1.44) и (1.45) в формулу (1.43), после преобразований получим:

$$|a_{km}| = \frac{1}{\rho_{\max}} \sqrt{\frac{\text{tr} \mathbf{R}_{yy}}{n \cdot \text{tr} \mathbf{R}_{xx}}} = a = \text{const}; \quad k, m = 1, 2, \dots, n. \quad (1.46)$$

Таким образом, для оптимизации матрицы \mathbf{R}_{yx} по выбранному критерию необходимо и достаточно, чтобы элементы матрицы \mathbf{A} были равны по абсолютной величине. Тогда критерий ρ достигает своего максимального значения, равного единице. Минимального значения, равного $1/\sqrt{n}$, критерий достигает, когда матрица \mathbf{A} диагональна и элементы ее главной диагонали равны по абсолютной величине.

Полученные требования (1.46) к элементам матрицы \mathbf{A} имеют следующую геометрическую интерпретацию. Поскольку элементы a_{km} играют роль направляющих косинусов для новых координатных осей n -мерного пространства, то преобразование сигнала с помощью полученной матрицы \mathbf{A} эквивалентно выбору таких координатных осей, которые равно наклонены к координатным осям, выбранным в разложении Карунена–Лоэва. В этом смысле линейное преобразование с матрицей \mathbf{A} , удовлетворяющей требованию (1.46), можно образно назвать разложением "анти–Карунена - Лоэва".

Заметим, что при этом одновременно выполняется условие (1.30) стационарности дисперсии передаваемого сигнала, т.е. требования выравнивания дисперсии и выравнивания информативности нестационарного сигнала приводят к одинаковым требованиям, предъявляемым к элементам матрицы \mathbf{A} .

1.5. Сужение спектра предсказанного сигнала

"Объем" сигнала, передаваемого по каналу связи, определяется, как произведение его динамического диапазона, полосы частот и длительности существования [143]. Для сохранения этого объема необходимо, чтобы преобразованный сигнал $y(t)$ имел частотный спектр не шире, чем спектр исходного сигнала $x(t)$.

Поскольку для финитного во времени сигнала [151] частотный спектр принципиально не ограничен (а сигналы $x(t)$ и $y(t)$, $t \in [0, T]$ – заведомо финитны во времени), то под сужением спектра будем понимать уменьшение числа перемен знаков в сигнале $y(t)$ по сравнению с сигналом $x(t)$. По теореме Винера-Хинчина [58] спектральная плотность мощности сигнала связана с ее автокорреляционной функцией парой преобразований Фурье, поэтому задачу сужения спектра можно сформулировать на языке корреляционного анализа. Известно [36], что если процесс характеризуется непрерывным частотным спектром, то его автокорреляционная функция имеет вид затухающего колебания, причем скорость затухания этого колебания зависит от ширины спектра: чем шире спектр, тем быстрее затухание; чем уже спектр, тем медленнее затухает автокорреляционная функция. Таким образом, требование сужения спектра эквивалентно условию замедления затухания автокорреляционной функции, т.е. увеличению коррелированности участков преобразованного сигнала. Тем самым решение задачи сужения спектра сводится к выяснению требований, которые надо наложить на матрицу \mathbf{A} для того, чтобы автокорреляционная матрица предсказанного сигнала \mathbf{R}_{yy} была оптимальной в смысле выбранного в [127] критерия β , отражающего протяженность интервала корреляции:

$$\beta = \frac{\sum_{i,j=1}^n |r_{ij}^{yy}| - \text{tr}\mathbf{R}_{yy}}{\text{tr}\mathbf{R}_{yy}}. \quad (1.47)$$

В числителе этой дроби стоит сумма модулей внедиагональных элементов матрицы \mathbf{R}_{yy} , а в знаменателе – сумма ее диагональных элементов. Таким образом, критерий β характеризует относительный вес внедиагональных элементов автокорреляционной матрицы по сравнению с диагональными.

Линейное преобразование сигнала $x(t)$ с помощью ортогональной матрицы \mathbf{A} приводит к конгруэнтному преобразованию его автокорреляционной матрицы:

$$\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{E}(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^T) = \mathbf{E}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{A}^T) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_{xx} \cdot \mathbf{A}^T. \quad (1.48)$$

Из выражения (1.37) видно, что автокорреляционная матрица предсказанного сигнала не диагональна, что означает появление корреляционных связей между участками $y_i(t)$.

Осуществим поиск таких элементов a_{km} матрицы \mathbf{A} , которые бы максимизировали выбранный критерий:

$$\beta_{\max} = \max_{a_{km}} \left(\frac{\sum_{i,j=1}^n |r_{ij}^{yy}|}{\text{tr}\mathbf{R}_{yy}} - 1 \right). \quad (1.49)$$

Для того чтобы найти максимум, выполним дифференцирование по a_{km} и приравняем производные нулю:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}a_{km}} \left(\frac{\sum_{i,j=1}^n |r_{ij}^{yy}|}{\text{tr}\mathbf{R}_{yy}} \right) = 0, \quad k, m = 1, 2, \dots, n. \quad (1.50)$$

В результате преобразований, аналогичных (1.41) - (1.43), и учитывая, что $\text{tr}\mathbf{R}_{yy} > 0$, получим:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}a_{km}} \left(\sum_{i,j=1}^n |r_{ij}^{yy}| \right) = \beta_{\max}; \quad k, m = 1, 2, \dots, n. \quad (1.51)$$

Элементы матрицы \mathbf{R}_{yy} можно записать в следующем виде:

$$r_{ij}^{yy} = \sum_{l=1}^n a_{il} \cdot a_{jl} \cdot \lambda_l = A_i \cdot A_j^T, \quad (1.52)$$

где $A_i = [a_{i1} \cdot \sigma_1, a_{i2} \cdot \sigma_2, \dots, a_{in} \cdot \sigma_n]$,
 $A_j^T = [a_{j1} \cdot \sigma_1]^T$ и $\sigma_l = \sqrt{\lambda_l}$; $l = 1, 2, \dots, n$.

Вычислим отдельно числитель и знаменатель дроби (1.51):

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}a_{km}} \left(\sum_{i,j=1}^n |r_{ij}^{yy}| \right) = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}a_{km}} \left(\sum_{i,j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{il} \cdot a_{jl} \lambda_l \right) = 2\lambda_m \sum_{p=1}^n [a_{pm} \cdot \mathbf{sign}(A_p \cdot A_m^T)], \quad k, m = 1, 2, \dots, n. \quad (1.53)$$

$$\frac{\mathbf{d}}{a_{km}} (\mathbf{tr} R_{yy}) = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}a_{km}} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \cdot \lambda_j \right) = 2\lambda_m \cdot a_{km}, \quad k, m = 1, 2, \dots, n. \quad (1.54)$$

Подставляя полученные выражения для производных в формулу (1.51), получим

$$a_{km} = \frac{\sum_{p=1}^n [a_{pm} \cdot \mathbf{sign}(A_p \cdot A_m^T)]}{\beta_{\max}}; \quad k, m = 1, 2, \dots, n. \quad (1.55)$$

Это означает, что числа a_{km} не зависят от k (номера строки матрицы \mathbf{A}), т.е. в любом столбце все элементы одинаковы. Следовательно, матрица \mathbf{A} должна иметь следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}. \quad (1.56)$$

Очевидно, что матрица (1.56) является особенной (имеет ранг, равный 1) и поэтому на практике неприменима. Необходимо искать класс неособенных матриц, достаточно близких по своим свойствам к матрицам вида (1.56).

Заметим, что для любой матрицы \mathbf{A} сумма $\sum_{l=1}^n a_{il} \cdot a_{jl} \cdot \lambda_l$ (а следовательно, и значение критерия β) будет больше в том случае, если все элементы этой матрицы имеют один знак, например, все они положительные. Существует класс матриц, у которых замена знаков всех элементов на один не приводит к вырождению. Более того, можно указать на положительные матрицы (т.е. матрицы с положительными элементами [34]), которые, оставаясь неособенными, могут сколь угодно близко приближаться к матрице с одинаковыми элементами. Примером такой матрицы служит циркулянта, элементами которой является конечное число членов арифметической прогрессии $a_1 = a$, $a_2 = a + h$, $a_3 = a + 2h, \dots$. Очевидно, что для такой матрицы $a_{ij} \rightarrow a$ при $h \rightarrow 0$.

Таким образом, положительные матрицы являются представителями класса неособенных матриц, достаточно близких по свойствам к матрицам вида (1.56). Полученный результат является частным случаем теоремы Шенберга [21, 48], смысл утверждения которой состоит в следующем: "Для того, чтобы число перемен знака в сигнале $y(t)$, получаемом из сигнала $x(t)$ с помощью линейного преобразования (1.6), было меньше или равно числу перемен знака в сигнале $x(t)$, необходимо и достаточно, чтобы матрица \mathbf{A} была знакоопределенной".

Под знакоопределенной матрицей понимается такая матрица, у которой все отличные от нуля миноры p -го порядка имеют один и тот же знак ε_p . Если при этом все миноры p -го порядка отличны от нуля, то такая матрица называется строго знакоопределенной. В частности, при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = 1$ строго знакоопределенная матрица является положительной, что и соответствует рассмотренному выше случаю.

Подводя итог изложенному, можно сделать вывод о том, что классом матриц, наилучшим образом сужающим спектр преобразованного сигнала, т.е. максимизирующим критерий β ($0 \leq \beta < 1$), оставаясь неособенными, является класс знакоопределенных матриц. К сожалению, эти матрицы могут быть плохо обусловленными, что может приводить к проблемам при их обращении.

В заключение остановимся на частотной (спектральной) интерпретации стрип-метода.

Мгновенные значения преобразованного сигнала получаются здесь как результат скалярного произведения i -ой строки матрицы \mathbf{A} на вектор-столбец, составленный из отсчетов исходного сигнала $x(t)$. Другими словами, они получаются как коэффициенты обобщенного преобразования Фурье. За систему базисных функций берется набор, получаемый из линейно независимых векторов, координаты которых составляют строки матрицы преобразования. Базисные функции представляют собой, тем самым, кусочно-постоянные и, в общем случае, разрывные функции. Число разрывов первого рода таких базисных функций может достигать $(n - 1)$, не считая граничных.

В линейном преобразовании сигнала берется заведомо конечное число членов ряда n . Для получения взаимнооднозначного соответствия сигналов $x(t)$ и $y(t)$, т.е. оригинала и изображения, коэффициенты разложения в ряд Фурье $y_i(t)$ с необходимостью должны быть функциями времени, а не постоянными величинами. В этом смысле такое разложение представляет собой функциональный ряд с конечным числом членов.

На примере использования матриц Адамара можно дать частотную интерпретацию линейного преобразования, используя понятие обобщенной частоты, введенное в [7, 140], где под обобщенной частотой понимается половина числа пересечений нулевого уровня за секунду.

В этом случае для матрицы Адамара под частотой понимается половина числа изменений знака вдоль каждой строки [127]. Можно построить матрицы Адамара порядка $n = 2^m$, частоты которой представляют собой все числа от нуля до $n/2$, следующие через $1/2$. Такая частотная интерпретация строк матрицы Адамара позволяет говорить об эквивалентности ее строк прямоугольным колебаниям с амплитудой 1 и периодом $2/n$. Такие функции называются функциями Уолша [24] и могут быть сведены к функциям Радемахера [19]. Функции Уолша $wal(0, \theta)$, $cal(i, \theta)$, $sal(i, \theta)$ составляют полный ортонормированный базис на интервале

$\theta = \frac{t}{T} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$. Преобразование Фурье - Уолша функции $x(\theta)$, заданной на интервале $-\frac{1}{2} \leq \theta < \frac{1}{2}$, выглядит следующим образом:

$$x(\theta) = a(0) \cdot wal(0, \theta) + \sum_{i=1}^{\infty} [a_c(i) \cdot cal(i, \theta) + a_s(i) \cdot sal(i, \theta)],$$

где $a(0) = \int_{-1/2}^{1/2} x(\theta) \cdot wal(0, \theta) d\theta$, $a_c(i) = \int_{-1/2}^{1/2} x(\theta) \cdot cal(i, \theta) d\theta$, $a_s(i) = \int_{-1/2}^{1/2} x(\theta) \cdot sal(i, \theta) d\theta$.

Таким образом, с точки зрения частотной интерпретации, стрип-преобразование с использованием матриц Адамара дает разложение исходного сигнала в ряд Фурье-Уолша с конечным числом членов, причем это разложение точное, а не приближенное.

Подводя итоги главы 1, отметим, что в ней были исследованы возможности стрип-метода при решении различных задач. Они касались выбора матрицы \mathbf{A} , обеспечивающей "гладкость" преобразованного сигнала, выравнивание его дисперсии, равномерную информативность и сужение частотного спектра. Во всех случаях получены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять матрица \mathbf{A} , либо установлен ее конкретный вид.

Следующая глава посвящена исследованию и решению группы задач, связанных с достижением максимальной помехоустойчивости передачи сигнала в рамках стрип-метода.

2. ОПТИМАЛЬНОЕ ЧЕБЫШЕВСКОЕ ПРЕДЫСКАЖЕНИЕ И ФИЛЬТРАЦИЯ

2.1. Предварительные замечания

Обеспечение помехоустойчивой передачи сообщений или "борьба с помехами" является одной из главных проблем теории связи. Блестящий обзор этой проблемы и методов ее решения можно найти в классической монографии А.А. Харкевича [146], а также в работах Винера, Калмана, Котельникова, Финка и других выдающихся специалистов. Не останавливаясь подробнее на истории вопроса, отметим, что сложился общепризнанный методологический подход к проблеме фильтрации помех. Он состоит в том, что сначала при сделанных предположениях и допущениях о свойствах помех и сигналов оценивается потенциально достижимая помехоустойчивость. Затем предлагаются те или иные конструкции фильтров или алгоритмы обработки сигналов (линейные или нелинейные), вычисляется их реальная помехоустойчивость и сравнивается с потенциально достижимой. Если они совпадают, то это служит доказательством оптимальности предложенных методов, если же нет, то получается объективная оценка степени помехоустойчивости.

Далее будем следовать этой классической схеме, рассматривая задачу оптимальной фильтрации помех по чебышевскому критерию. Количественно оценив предельно возможный уровень ослабления помех, покажем, что применение стрип-метода в ряде практически важных случаев обеспечивает достижение потенциально возможных оценок. Следовательно, стрип-метод является в этих случаях оптимальным на множестве всех возможных алгоритмов фильтрации при выбранном критерии.

Прежде чем перейти к более точной постановке задачи, выскажем еще одно соображение общего характера. Потенциальная эффективность ослабления помех не зависит от используемых методов, а полностью определяется имеющейся априорной информацией о сигналах и помехах. Если такая информация отсутствует, то борьба с помехами невозможна в принципе. Чем больше объем априорной информации, тем выше возможности по ослаблению помех. Если, например, известны частотные спектры сигнала и помехи, то потенциальная эффективность фильтрации определяется степенью разнесенности или перекрытия этих спектров. Известно, что оптимальная фильтрация по среднеквадратическому критерию в этом случае обеспечивается фильтрами Винера и Калмана. Если априорно известна форма передаваемого сигнала и речь идет о его выделении (обнаружении) на фоне помех, то оптимальное качество обнаружения по критерию отношения сигнал/шум обеспечивают так называемые согласованные фильтры.

Таким образом, объем априорных сведений о свойствах сигналов и помех (вместе с выбранным критерием оценки помехоустойчивости) полностью определяет потенциальные возможности по ослаблению помех и, как следствие, оптимальные алгоритмы обработки.

В рассматриваемой ниже постановке задачи ограничимся весьма скудной априорной информацией о сигналах и помехах, а именно, будем считать известными только их длительности (протяженности во времени). Как и в главе 1, длительность передаваемого сигнала будем обозначать T , а длительность помехи h или d . При этом форма передаваемого сигнала, форма помехи, а также их спектры считаются априорно неизвестными и могут быть любыми. Единственная имеющаяся информация (в простейшем случае однократных импульсных помех) описывается неравенством

$$\frac{T}{h} \geq n \quad \text{или} \quad nh \leq T,$$

где n – известное число (как правило, будем считать его целым).

Другими словами априорно известна лишь относительная длительность помехи – она не должна поражать более, чем $1/n$ -ую часть сигнала.

В качестве минимизируемого критерия возьмем чебышевскую норму помехи в восстановленном сигнале, т.е. ее амплитуду (максимальное по модулю значение на интервале $[0, T]$). При этом предполагается, что передача и восстановление сигнала производится в соответствии с общей схемой, показанной на рис. 1.7, а операторы кодирования (предыскажения, преобразования) и декодирования (восстановления) удовлетворяют двум дополнительным условиям:

- являются изометрическими (не изменяют энергии сигнала и помехи);

– при отсутствии помех в канале связи обеспечивают точное восстановление передаваемого сигнала $x'(t) = x(t)$.

Заметим, что классические фильтры Винера и Калмана не удовлетворяют ни одному из этих условий.

В главе 1 отмечалось, что стрип-метод может применяться как эффективное средство для борьбы с импульсными помехами в канале связи. Основная идея при этом состоит в "растягивании" короткой импульсной помехи вдоль сигнала без изменения ее энергии, что приводит к уменьшению амплитуды помехи. Пример такого "растягивания" помехи приведен на рис. 1.11, где в качестве импульсной помехи рассматривалось полное пропадание сигнала на участке длительностью $h = \frac{T}{n}$, где T – длительность сигнала, n – целое число.

Если общая энергия помехи остается неизменной, то ее амплитуда в пределе может быть уменьшена в \sqrt{n} раз, поэтому, чем больше n (чем короче помеха), тем большего ослабления амплитуды можно добиться. Здесь можно провести образное сравнение с равномерным размазыванием кусочка масла по бутерброду.

В настоящей главе будет показано, что для определенного класса помех стрип-метод обеспечивает максимально возможное уменьшение их амплитуды на множестве всех линейных фильтров. Чтобы доказать это, нужно дать более строгое определение рассматриваемым импульсным помехам и сформулировать критерий, характеризующий эффект ослабления помех.

Дадим определение однократной импульсной помехи, полагая что задана длительность сигнала T и целое число n , равное числу участков, на которое условно разбивается интервал $[0, T]$.

Определение 1. Импульсная помеха $f(t)$ называется однократной, если ее продолжительность (время существования) не превышает длительности участка сигнала $h = T/n$.

Примечание 1. Если помеха $f(t)$ по своей продолжительности не превышает h , но поражает два соседних участка сигнала (находится на их "стыке"), она остается однократной.

Примечание 2. Если помеха $f(t)$ представляет собой "пакет" импульсов, но общая продолжительность "пакета" (от начала первого до окончания последнего импульса) не превышает h , она остается однократной.

Примечание 3. Если помеха $f(t)$ представляет собой серию импульсов суммарной длительности h , которые поражают разные участки сигнала, но при совмещении всех n участков импульсы не перекрываются, то она остается однократной.

Аналогичным образом вводится понятие кратных импульсных помех.

Определение 2. Импульсная помеха $f(t)$ называется многократной, если она представляет собой один или несколько импульсов и его продолжительность (или их суммарная продолжительность) превышает длительность участка сигнала $h = T/n$. При этом форма импульсов и расположение их на интервале $[0, T]$ произвольны и априорно неизвестны.

Пример двукратной помехи такого рода для $n = 7$ приведен на рис. 2.1,а.

Примечание 1. Если многократная помеха $f(t)$, представляющая собой один импульс, занимает по своей продолжительности r участков длительностью h , то она называется r -кратной.

Примечание 2. Если многократная помеха $f(t)$ представляет собой несколько импульсов одинаковой или различной продолжительности, то ее кратность определяется наибольшим числом импульсов, которые перекрываются при совмещении начальных точек всех участков длительностью h .

Обозначим множество однократных импульсных помех, введенных *определением 1*, через N_1 , а множество r -кратных импульсных помех, введенных *определением 2*, через N_r .

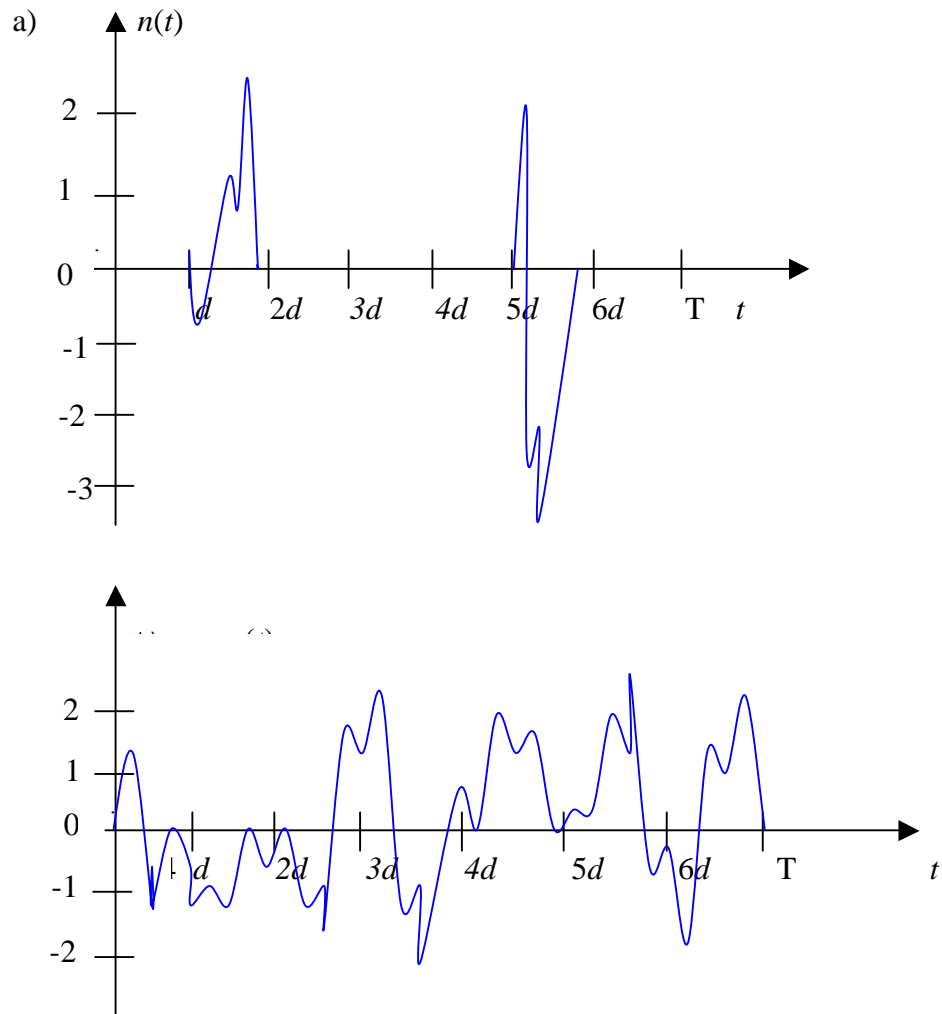


Рис. 2.1. Двукратная помеха (а) и результат ее обработки (б) чебышевским фильтром с матрицей (1.33)

2.2. Постановка задачи

Будем считать, что передача сигнала по каналу связи происходит в соответствии с блок-схемой рис. 1.7. Отвлекаясь от вопросов технической реализации блоков этой схемы и выполняя математическую формализацию, представим ее в виде последовательного соединения трех блоков, показанных на рис. 2.2.

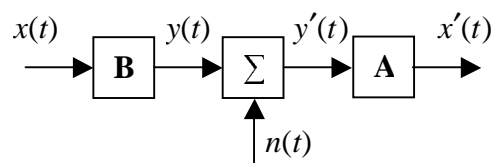


Рис. 2.2. Упрощенная блок-схема реализации стрип-метода

Аналоговый сигнал $x(t)$, предназначенный для передачи, преобразуется с помощью предсказывающего линейного оператора B в сигнал $y(t) = Bx(t)$, $0 \leq t \leq T$, который и передаётся по каналу связи. На приёмном пункте получают смесь сигнала с помехой $y'(t) = y(t) + n(t)$, где $n(t)$ – аддитивная помеха, принадлежащая заданному классу помех N . Восстановление сигнала производят с помощью обратного оператора $A=B^{-1}$: $x'(t) = Ay'(t)$. Для помехи $m(t)$ в

восстановленном сигнале имеем:

$$m(t) = \hat{x}(t) - x(t) = A[y(t)+n(t)] - x(t) = An(t), \quad (2.1)$$

т.е. помеха $m(t)$ не зависит от передаваемого сигнала.

Потребуем, чтобы преобразующий оператор B был неособенным (невырожденным) и не менял энергии преобразуемого сигнала (был изометрическим):

$$\int_0^T x^2(t)dt = \int_0^T y^2(t)dt. \quad (2.2)$$

Поскольку оператор A также будет изометрическим, то из (2.1) следует, что обратное преобразование не изменит энергию помехи:

$$\int_0^T m^2(t)dt = \int_0^T [A \cdot n(t)]^2 dt = \int_0^T n^2(t)dt, \quad (2.3)$$

т.е. оптимизация системы связи по среднеквадратическому критерию невозможна. Поставим задачу оптимизации системы по равномерному (чебышевскому) критерию, когда минимизируется максимальное значение ошибки. Использование такого критерия целесообразно в ряде практически важных случаев таких, как передача и хранение телевизионного сигнала, запись сигнала на магнитный носитель и др.

Чебышевская норма функции $f(t)$, $0 \leq t \leq T$ определяется [156], как

$$\|f(t)\| = \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)|. \quad (2.4)$$

Качество фильтрации будем характеризовать отношением чебышевских норм помех $n(t)$ и $m(t)$, взятым для наихудшего случая

$$J = \max_{n \in N_r, n \neq 0} \frac{\|m(t)\|}{\|n(t)\|} = \max_{n \in N_r, n \neq 0} \frac{\|A \cdot n(t)\|}{\|n(t)\|}, \quad (2.5)$$

где максимум берется по всем помехам $n(t) \in N_r$. Число J указывает гарантированный уровень ослабления амплитуды помехи.

С математической точки зрения критерий (2.5) можно рассматривать как норму оператора A , согласованную с чебышевской нормой функции $n(t) \in N_r$. Наилучшее качество фильтрации обеспечит оператор A с минимальной нормой (2.5), поскольку он будет преобразовывать помеху $n(t)$ таким образом, чтобы, не меняя энергии, минимизировать её наибольшее по абсолютной величине значение.

Физический смысл минимизации критерия J при сохранении энергии помехи состоит в равномерном распределении помехи вдоль интервала $[0, T]$. Наибольший эффект это дает для кратковременных помех, например помех, связанных с кратковременным пропаданием сигнала, импульсных помех и т.п. "Растягивание" таких помех во времени в результате фильтрации приводит к примерно одинаковым по амплитуде малым ошибкам на всей протяженности сигнала.

Таким образом, формальная постановка задачи оптимальной чебышевской фильтрации сводится к следующему [106, 107]. На интервале $[0, T]$ задано множество N_r , r -кратных помех $n(t)$. В соответствии с *определением 2* они отличны от нуля не более, чем на r произвольно расположенных подынтервалах этого интервала, причем длительность каждого подынтервала не превышает известной величины d . Расположение подынтервалов на интервале $[0, T]$ и поведение помех внутри подынтервалов априорно неизвестны. Кроме того, на множестве \bar{A} линейных обратимых операторов (фильтров), осуществляющих изометрическое отображение помех $n(t)$, $0 \leq t \leq T$ в помехи $m(t)$, $0 \leq t \leq T$, задан критерий (2.5), сопоставляющий каждому оператору $A \in \bar{A}$ определенное число J (норму оператора).

Требуется:

- найти точную нижнюю границу критерия (2.5) на множестве операторов \bar{A} , т.е. решить задачу оценки потенциальной помехоустойчивости чебышевского фильтра;
- указать, при каких r, d, T возможно уменьшение уровня помех в смысле критерия (2.5), т.е. вывести условие эффективности чебышевской фильтрации;

- найти оператор A из множества \bar{A} , для которого достигается нижняя граница критерия (2.5), т.е. решить задачу синтеза оптимального чебышевского фильтра.

2.3. Оценка потенциальной помехоустойчивости в случае однократных помех

Обозначим точную нижнюю границу критерия (2.5) на множестве операторов $A \in \bar{A}$, где \bar{A} – множество невырожденных изометрических операторов, осуществляющих отображение функций $n(t) \in L_2(0, T) \rightarrow m(t) \in L_2(0, T)$, через J_0 . Величина

$$J_0 = \min_{A \in \bar{A}} \max_{n \in N, n \neq 0} \frac{\|A \cdot n(t)\|}{\|n(t)\|} \quad (2.6)$$

характеризует потенциальную помехоустойчивость чебышевской фильтрации. Оператор A , для которого $J = J_0$, назовем оптимальным чебышевским фильтром. Очевидно, что $0 < J_0 \leq 1$, причем случай $J_0 = 1$ означает, что уменьшение амплитуды помехи (погрешности) невозможно.

Знание величины J_0 , зависящей, в общем случае, от длительности сигнала и помех, а также кратности помех $J_0 = J_0(r, d, T)$, важно с двух точек зрения. Во-первых, это дает возможность сравнивать помехоустойчивость реальных фильтров с принципиально достижимой помехоустойчивостью и оценивать неиспользованные резервы. Во-вторых, оказывается возможным априорно определять эффективность применения чебышевской фильтрации, очерчивая тем самым область целесообразного использования таких фильтров. Чебышевскую фильтрацию будем называть эффективной, если $J_0 < 1$, и неэффективной, если $J_0 = 1$.

Найдем оценку величины J_0 в случае однократной помехи $r = 1$. Поскольку оператор A линеен, достаточно ограничиться рассмотрением помех $n(t)$ с единичной нормой (это не скажется на отношении амплитуд помех). В этом случае формула (2.6) принимает вид

$$J_0 = \min_{A \in \bar{A}} \max_{n \in N_1, n \neq 0} \|m(\tau)\|_\infty, \quad (2.7)$$

где N_1 - множество функций (однократных помех) $n(t)$, определенных на интервале $[0, T]$ и равных нулю везде, кроме подынтервала длительностью d .

Среди различных линейных изометрических преобразований однократных помех оптимальным в смысле критерия (2.5) будет преобразование, переводящее помеху $n(t)$ в помеху $m(t)$, абсолютная величина которой постоянна ("растягивание" или "размазывание" помехи вдоль длительности восстановленного сигнала).

Для доказательства этого оценим минимум $\|m(t)\|_\infty$ на множестве всех функций $m(t)$, удовлетворяющих ограничению

$$\int_0^T m^2(t) dt = \int_0^T [A \cdot n(t)]^2 dt = \int_0^T n^2(t) dt = c_1, \quad (2.8)$$

где c_1 - константа.

Подставим под знак интеграла вместо функции $m(t)$ максимальное значение ее модуля:

$$\left(\|m(t)\|_\infty\right)^2 \cdot T \geq c_1; \quad (2.9)$$

откуда

$$\|m(t)\|_\infty \geq \sqrt{\frac{c_1}{T}}. \quad (2.10)$$

Знак равенства в (2.10) достигается для функций $m(t)$, абсолютная величина которых на интервале $[0, T]$ постоянна:

$$|m(t)| = q, \quad q = \sqrt{\frac{c_1}{T}}. \quad (2.11)$$

Поэтому для J_0 можно записать:

$$J_0 \geq \max_{n \in N_1, n \neq 0} q. \quad (2.12)$$

Знак неравенства отражает тот факт, что в множестве линейных изометрических операторов A может не существовать оператора указанного вида. Выясним, для какой помехи $n(t) \in N_1$ величина $q = \sqrt{\frac{c_1}{T}}$, представляющая собой чебышевскую норму помехи $m(t)$, достигает максимума, т.е. найдем наилучшую однократную помеху.

Для однократной помехи длительностью d и максимальной величины $|n(t)| = 1$ с учетом (2.8) можно записать:

$$c_1 = \int_0^T n^2(t) dt = d, \quad q = \sqrt{d/T}. \quad (2.13)$$

Следовательно, потенциальная помехоустойчивость чебышевской фильтрации в случае однократных помех определяется неравенством

$$J_0 \geq \max_{n \in N_1, \|n\|_\infty = 1} \sqrt{c_1/T} = \sqrt{d/T}. \quad (2.14)$$

Далее будет показано, что знак равенства в соотношении (2.14) достигим, доказательством чего служит пример стрип-оператора на основе матриц Адамара. Таким образом, для однократных помех имеем точную нижнюю оценку коэффициента ослабления помех

$$J_0 = \sqrt{d/T}. \quad (2.15)$$

Из (2.15) видно, что в случае однократных помех с длительностью $d < T$ возможна эффективная чебышевская фильтрация. Ослабление амплитуды помехи пропорционально корню квадратному из относительной длительности помехи, т.е. чем меньше длительность помехи при фиксированном интервале $[0, T]$, тем больше выигрыш в потенциальной помехоустойчивости. Если, например, относительная длительность помехи равна $1/4$ (помеха поражает не более четверти сигнала), то $J_0 = 0,5$, т.е. амплитуда помехи может быть уменьшена вдвое.

2.4. Оценка потенциальной помехоустойчивости в случае кратных помех

Перейдем к оценке величины J_0 в случае r -кратной помехи. Представим такую помеху как сумму r не перекрывающихся однократных помех

$$n(t) = n_1(t) + \dots + n_r(t) \quad (2.16)$$

описанного вида. Вследствие линейности фильтра помеха на его выходе будет равна

$$m(t) = m_1(t) + \dots + m_r(t), \quad (2.17)$$

где $m_i(t)$ – реакция на помеху $n_i(t)$.

В соответствии с минимаксным подходом для минимизации суммы необходимо минимизировать каждое из слагаемых.

Разделим множество операторов \bar{A} на два подмножества A' и A'' . В первое из них включим операторы, которые не перекрывающимся во времени помехам $n_i(t)$ сопоставляют не перекрывающиеся помехи $m_i(t)$. В это подмножество входят, в частности, тождественный оператор, оператор циклического сдвига функции, а также стрип-операторы, осуществляющие "разрезание" интервала $[0, T]$ на участки с последующей их перестановкой. В подмножество A'' войдут все остальные операторы, т.е. операторы, которые не перекрывающимся помехам $n_i(t)$ могут сопоставлять перекрывающиеся помехи $m_i(t)$.

Если найти нижние границы

$$J'_0 = \min_{A \in A'} \max_{n \in N_r} \frac{\|An(t)\|_\infty}{\|n(t)\|_\infty}, \quad J''_0 = \min_{A \in A''} \max_{n \in N_r} \frac{\|An(t)\|_\infty}{\|n(t)\|_\infty} \quad (2.18)$$

отдельно для подмножеств A' и A'' , то для величины J_0 можно записать

$$J_0 = \min(J'_0, J''_0). \quad (2.19)$$

Операторы $A \in A'$ принципиально не могут производить "растягивание" помехи, поэтому уменьшение амплитуды помех $m_i(\tau)$ по сравнению с помехами $n_i(t)$ невозможно и

$$J_0' = 1. \quad (2.20)$$

Для операторов $A \in A''$ возможно уменьшение амплитуды помех $m_i(t)$ путем растягивания $n_i(t)$ вдоль интервала $[0, T]$, как это было показано для однократных помех. Учитывая (2.15), получим:

$$J_0'' = \min_{A \in A''} \max_{n \in N_r, \|n\|_\infty=1} \|m(t)\|_\infty \geq r \sqrt{\frac{d}{T}}. \quad (2.21)$$

С учетом (2.19 – 2.21) получим:

$$J_0 = \min\left(r \sqrt{\frac{d}{T}}, 1\right). \quad (2.22)$$

Интересно отметить, что в тех случаях, когда эффективная чебышевская фильтрация r -кратных помех возможна, соответствующий оптимальный фильтр совпадает с оптимальным фильтром для однократных помех. Это важное обстоятельство существенно облегчает решение задачи чебышевской фильтрации, во многом сводя ее к исследованию случая $r = 1$.

Из оценки (2.21) следует, что выигрыш в помехоустойчивости возможен только при

$$r \sqrt{\frac{d}{T}} < 1, \quad (2.23)$$

а случай $dr^2 = T$ является критическим.

Введем в рассмотрение интенсивность помех ν , равную отношению суммарной длительности помех к длительности сигнала:

$$\nu = dr / T. \quad (2.24)$$

Тогда условие эффективной фильтрации (2.23) можно записать в виде

$$r \nu < 1. \quad (2.25)$$

Таким образом, ослабление уровня помех в смысле критерия (2.5) при сохранении энергии сигнала возможно только в том случае, если произведение кратности помех на их интенсивность меньше единицы.

Физический смысл этого условия состоит в том, что увеличение числа некоррелированных импульсов помех при постоянной их интенсивности делает помеху "более случайной" и затрудняет ее фильтрацию. Наоборот, чем меньше кратность помехи, тем она "более детерминирована". Пусть, например, при постоянной интенсивности $\nu = 0,5$ в одном случае $r = 2$, а в другом $r = 1$. Это означает, что в первом случае имеют место два импульса помехи длительностью $T / 4$ каждый, причем взаимное расположение их неизвестно. Во втором случае имеется помеха длительностью $T / 2$ и ее можно рассматривать как два импульса длительностью $T / 4$, расположенные рядом. Ясно, что во втором случае априорно известно больше информации о помехе, чем в первом, что, в конечном счете, и позволяет осуществлять более эффективную фильтрацию.

Эффективная чебышевская фильтрация помех типа белого шума, действующего на всем протяжении сигнала, невозможна, поскольку для таких помех $\nu = 1$ и условие (2.25) не выполняется. Эффективная фильтрация становится возможной в том случае, когда помехой поражена только часть сигнала, чем и вызвано использование рассматриваемой модели помех.

Формулы (2.22) и (2.25) дают ответ на два из трех поставленных вопросов. Они, в частности, позволяют делать вывод о принципиальных возможностях чебышевской фильтрации для различных видов помех. Например, для случая, изображенного на рис. 1.13,а, $d = T / 7$, $r = 2$, т.е. интенсивность помех $\nu \cong 0,29$. Проверка условия (2.25) дает $r \nu \cong 0,58$, т.е. эффективная чебышевская фильтрация возможна. Наибольшая гарантированная степень ослабления амплитуды помехи определяется величиной

$$J_0 = \min\left(2\sqrt{\frac{1}{7}}, 1\right) = \sqrt{\frac{4}{7}} \cong 0.76.$$

Это означает, что при любой форме импульсов (рис. 1.13,а) оптимальный чебышевский фильтр уменьшит амплитуду помехи не менее, чем в $1/J_0 = 1,3$ раза.

2.5. Синтез оптимального чебышевского фильтра

Перейдем к решению третьей из поставленных задач – построению фильтра, помехоустойчивость которого достигает потенциально возможной величины J_0 (2.5). Будем производить поиск оператора оптимальной фильтрации в рамках стрип-метода, т.е. не на всем множестве \bar{A} линейных изометрических операторов, а на некотором его подмножестве A_S , которое опишем следующим образом.

Разобьем интервал $[0, T]$ на k равных участков длительностью $h = T/k$ и обозначим отрезок функции $n(t)$; $(i-1)h \leq t \leq ih$, принадлежащий i -му участку, через $n_i(s)$; $0 \leq s \leq h$.

Образуем из полученных функций $n_i(s)$ вектор-функцию $N(s) = [n_1(s), \dots, n_k(s)]^T$, где символ T обозначает операцию транспонирования. Тем самым совершен переход от одномерной функции $n(t)$, определенной на интервале $[0, T]$ к k -мерной вектор-функции $N(s)$, определенной на интервале $[0, T/k]$. Подчеркнем, что это не приближенный, а точный переход, поскольку в качестве компоненты вектора N выступают не отсчеты функции $n(t)$ в виде констант, а ее изменяющиеся во времени участки длительностью $h = T/k$.

Аналогично одномерную функцию $m(t)$ представим в виде вектор-функции

$$M(s) = [m_1(s), \dots, m_k(s)]^T, \quad 0 \leq s \leq h, \quad (2.26)$$

где $m_i(s)$ – отрезок функции $m(t)$, принадлежащий i -му участку разбиения.

Соотношение

$$m(\tau) = x'(\tau) - x(\tau) = A \cdot [y(\tau) + n(\tau)] - x(\tau) = A \cdot n(\tau) \quad (2.27)$$

представим в виде

$$M(s) = A \cdot N(s), \quad (2.28)$$

где $A = [a_{ij}]_{1,k}$ – квадратная числовая матрица.

Класс преобразований, описываемых соотношением (2.28), достаточно широк. В частности, при $k \rightarrow \infty$ можно получить дифференциальные операторы, а также интегральные операторы Фредгольма и Вольтерра.

Выясним, какой должна быть матрица A для обеспечения изометричности оператора. В соответствии с условием изометричности:

$$\int_0^T n^2(t) dt = \int_0^T m^2(t) dt = \int_0^T [An(t)]^2 dt, \quad (2.29)$$

имеем:

$$\int_0^c N^T(s) \cdot N(s) ds = \int_0^c N^T(s) \cdot A^T \cdot A \cdot N(s) ds. \quad (2.30)$$

Отсюда $A^T \cdot A = E$, т.е. A – ортонормальная матрица и ее элементы, в частности, должны удовлетворять соотношениям:

$$\sum_{j=1}^k a_{ij}^2 = 1; \quad i = 1, \dots, k. \quad (2.31)$$

Таким образом, в рассматриваемое множество операторов фильтрации A_S входят все операторы, описываемые соотношением (2.28), где A – числовая ортогональная матрица.

Норма вектор-функции $N(s)$, соответствующая чебышевской норме функции $n(t)$, будет иметь вид

$$\|n(s)\|_{\infty} = \max \|n_i(s)\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq k} \max_{0 \leq s \leq h} |n_i(s)|. \quad (2.32)$$

В соответствии с определением функций $n(t)$ при любом $0 \leq s \leq h$ не более, чем p компонент вектор-функции $N(s)$ будут отличны от нуля.

Величина p зависит от числа r импульсов помехи на интервале $[0, T]$ и от числа k участков разбиения. Множеству N_r помех $n(t)$, определенному ранее, будет соответствовать множество N_p вектор-функций $N(s)$. В множество N_p входят все вектор-функции, у которых при любом s не более, чем p компонент отличны от нуля.

Оптимизационная задача сводится теперь к поиску ортогональной матрицы A , минимизирующей критерий (2.5), который можно переписать в виде:

$$J = \max_{N(s) \in N_p, N \neq 0} \frac{\|AN(s)\|_\infty}{\|N(s)\|_\infty}. \quad (2.33)$$

Найдем сначала значение этого критерия при фиксированной матрице A . Для этого обозначим через j_1, j_2, \dots, j_p текущие номера ненулевых компонент вектора $N(s)$, а через A_1, A_2, \dots, A_k – столбцы матрицы A .

$$\begin{aligned} \|AN(s)\|_\infty &= \left\| A_{j_1} n_{j_1}(s) + \dots + A_{j_p} n_{j_p}(s) \right\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq k} \left| a_{ij_1} n_{j_1}(s) + \dots + a_{ij_p} n_{j_p}(s) \right|_\infty = \\ &= \max_{1 \leq j \leq k} \|n_j\|_\infty \max_{1 \leq i \leq k} \left(|a_{ij_1}| + \dots + |a_{ij_p}| \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Учитывая, что индексы j_1, \dots, j_p могут при разных s принимать любые значения от 1 до k , для максимального значения функционала (2.33) получим:

$$J = \max_{N(s) \in N_p, N(s) \neq 0} \frac{\|AN(s)\|_\infty}{\|N(s)\|_\infty} = \max_{1 \leq i \leq k} \max_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq k} \left(|a_{ij_1}| + \dots + |a_{ij_p}| \right) = U(A). \quad (2.35)$$

Отметим, что максимум отношения в формуле (2.35) достигается для векторов $N(s)$, у которых модули p ненулевых компонент равны между собой. Величина $U(A)$ может быть вычислена для любой матрицы. Для этого надо в каждой строке матрицы выделить p элементов, сумма модулей которых имеет наибольшее значение, а затем выбрать из полученных сумм максимальную:

$$U(A) = \max_{j_1, \dots, j_p} \left(|a_{ij_1}| + \dots + |a_{ij_p}| \right) \quad i = 1, \dots, k.$$

Можно показать, что функционал $U(A)$ удовлетворяет условиям позитивности, однородности и неравенству треугольника и, следовательно, может рассматриваться, как норма матрицы A .

Поэтому задача отыскания оптимальной матрицы A при фиксированном k сводится к нахождению среди всех ортогональных матриц размеров $(k \times k)$ той, у которой норма $U(A)$ минимальна.

Решение этой задачи дается следующей теоремой.

Теорема 3. Среди квадратных матриц порядка k , элементы которых удовлетворяют условию (2.31), наименьшей нормой $U(A)$ (2.35) обладают матрицы с равными по абсолютной величине элементами, либо матрицы, в каждой строке которых все элементы, кроме одного, равны нулю.

Доказательство. Рассмотрим класс всех квадратных матриц k -го порядка, у которых евклидова норма каждой строки равна единице. Будем искать в этом классе "оптимальную" матрицу A (не обязательно неособенную), минимизирующую функционал (2.35):

$$U(A) = \max_{1 \leq i \leq k} \max_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq k} \left(|a_{ij_1}| + \dots + |a_{ij_p}| \right).$$

Отметим, что функционал U , вычисленный для каждой строки оптимальной матрицы

$$U_i(A) = \max_{j_1, \dots, j_p} \left(|a_{ij_1}| + \dots + |a_{ij_p}| \right); \quad i = 1, \dots, k \quad (2.36)$$

имеет одно и то же значение.

В противном случае строку с наибольшим значением U_i можно было бы заменить на строку с меньшим значением U_i , получив матрицу с меньшим U , что противоречит предположению об оптимальности исходной матрицы. Таким образом, задачу оптимизации можно решать для отдельной i -й строки. Расположим элементы этой строки, взятые по модулю, в порядке убывания и обозначим их $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Элементы α_i удовлетворяют двум условиям:

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k \quad (2.37)$$

$$\alpha_1^2 + \dots + \alpha_k^2 = 1. \quad (2.38)$$

Будем искать на поверхности сферы (2.38) точку, для которой сумма $U = \alpha_1 + \dots + \alpha_p$ минимальна. Покажем, что в этой точке должно выполняться равенство:

$$\alpha_p = \alpha_{p+1} = \dots = \alpha_k. \quad (2.39)$$

Действительно, если $\alpha_p > \alpha_{p+1}$, то можно найти точку, где значения $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \dots, \alpha_k$ будут больше с сохранением условия (2.37). Тогда из (2.38) следует, что первые p элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ уменьшатся, что, в свою очередь, приведет к уменьшению критерия U . Однако это невозможно, поскольку в исходной точке критерий был минимален. Следовательно, (2.38) можно переписать в виде:

$$\alpha_1^2 + \dots + \alpha_{p-1}^2 + (k-p+1)\alpha_p^2 = 1. \quad (2.40)$$

Таким образом, осуществлен переход от k -мерной задачи к p -мерной, т.е. размерность задачи снижена на $(k-p)$.

Теперь она формулируется следующим образом: требуется минимизировать критерий

$$U = \alpha_1 + \dots + \alpha_p \quad (2.41)$$

при ограничениях:

$$\alpha_1^2 + \dots + \alpha_{p-1}^2 + b\alpha_p^2 - 1 = 0, \quad b = (k-p+1), \quad (2.42)$$

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_p \geq 0. \quad (2.43)$$

Геометрическая интерпретация поставленной задачи заключается в следующем. Уравнение (2.42) описывает поверхность эллипсоида вращения, "сплюснутого" вдоль координатной оси α_p . Для двумерного случая вид эллипсоида (эллипса) показан на рис. 2.3.

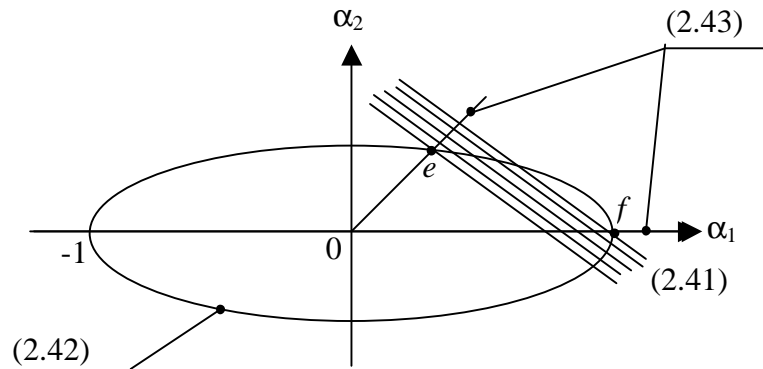


Рис. 2.3. Вид эллипса (2.42)

Неравенство $\alpha_i \geq 0$ выделяет часть поверхности эллипсоида, лежащую в первом ортанте (на рис. 2.3 – в первом квадранте). Остальные неравенства (2.37) задают многогранный угол в первом ортанте, еще более ограничивая выделяемую часть поверхности эллипсоида. На рис. 2.3 это часть эллипса между биссектрисой первого квадранта и осью α_1 . Уравнение (2.41) задает семейство гиперплоскостей, ортогональных биссектрисе первого ортанта. Точка касания

плоскости с поверхностью эллипсоида в первом ортанте обращает функционал (2.41) в максимум. Минимальное же значение функционала получается на границе пересечения поверхности эллипсоида с многогранным углом (2.43).

Из рис. 2.3 видно, что экстремальными точками могут быть точки e или f . Если эллипсоид "сплюснут" сильно, то минимум достигается в точке e . В противном случае U минимально в точке f . Для точки, соответствующей точке e , имеем $a_1 = a_2 = \dots = a_k$, т.е. все элементы матрицы A равны по абсолютной величине. Для точки, соответствующей точке f , имеем $a_1 = 1; a_2 = \dots = a_k = 0$, т.е. в каждой строке матрицы A один элемент равен 1 (или -1), остальные – нулю.

Таким образом, в зависимости от величины $b = k - p + 1$ достижение минимума функционала (2.35) обеспечивают либо матрицы с равными по абсолютной величине элементами, либо матрицы, в каждой строке которых все элементы, кроме одного, равны нулю, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Минимально возможное значение U_0 нормы (2.35) на множестве квадратных матриц, удовлетворяющих условию (2.31), равно

$$U_0 = \min\left(\frac{p}{\sqrt{k}}, 1\right). \quad (2.44)$$

Действительно, для матриц с равными по модулю элементами норма (2.35) равна p/\sqrt{k} , а для матриц, в каждой строке которых все элементы, кроме одного, нулевые, норма $U = 1$. Оптимальной же, согласно теореме, является одна из этих матриц.

Величина U_0 показывает, во сколько раз может быть уменьшена чебышевская норма помехи при использовании операторов фильтрации, принадлежащих подмножеству A_S . Из (2.44) сразу же вытекает, что при $k < p^2$ эффективная фильтрация помех на подмножестве операторов A_S невозможна. Оптимальным в этом случае является тождественное преобразование.

Следствие 2. Среди ортогональных матриц минимальной нормой (2.44) обладают матрицы Адамара или матрицы перестановки. Ни для каких других ортогональных матриц норма (2.44) недостижима.

Матрицами перестановки здесь названы матрицы, получаемые из единичной матрицы произвольной перестановкой строк и (или) столбцов с возможным изменением знаков отдельных элементов.

Это следствие дает частичное решение поставленной задачи поиска оптимальных ортогональных матриц при фиксированном k . Оказывается, что если $k < p^2$, то решением являются матрицы перестановки, при этом $U_0 = 1$. Если же $k > p^2$ и $k = 1, 2$ или кратно 4, то решение доставляют матрицы Адамара, при этом $U_0 = p/\sqrt{k}$. Наконец, в тех случаях, когда $k > p^2$, но матриц Адамара не существует, норма U_0 (2.44) недостижима.

Вопрос о том, чему равна минимальная норма в этом случае и для каких матриц она достигается, требует дополнительного исследования. Например, анализ случая $k = 3, p = 1$ показал, что минимальная норма равна 2/3; это на 15,5 % хуже оценки, получаемой по формуле (2.44). Такой нормой обладает матрица

$$A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следствие 3. Если число T/d целое и существует матрица Адамара размеров $(T/d) \times (T/d)$, то величина $U_0 = U_0(k)$ достигает наименьшего значения при $k = T/d$.

Действительно, выбирая $k = T/d$, получим $p = r$ (напомним, что r – кратность помехи, а p – максимальное число компонент вектор-функции N , одновременно не равных нулю). После подстановки в формулу (2.44), имеем

$$U_0 = \min\left(r\sqrt{\frac{d}{T}}, 1\right).$$

Но это значение совпадает с оценкой потенциальной помехоустойчивости (2.22), т.е. является теоретически минимально возможным.

Следовательно, выбор $k = T / d$ является оптимальным. Тем самым доказано, помимо прочего, что при k , кратных четырем, оценка потенциальной помехоустойчивости достижима, т.е. формула (2.22) дает точную нижнюю границу помехоустойчивости для n , кратных четырем. Для других k эта оценка будет давать заниженную (недостижимую) границу, поэтому возникает задача ее уточнения для разных k (четных, нечетных, простых и т.п.).

Один из доказанных результатов относится к случаю, когда k четно, но не кратно четырем. В этом случае точная нижняя граница определяется формулой

$$U_0 = \min\left(\frac{P}{\sqrt{k-1}}, 1\right). \quad (2.45)$$

Она достигается на множестве так называемых C -матриц. C -матрицей (Conference-Matrix) называется любая симметричная матрица C порядка k с нулями на главной диагонали и $+1$ и -1 на остальных местах, удовлетворяющая условию $CC^T = (k-1)E$. Например, при $k=6$ C -матрица имеет вид

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.6. Квазиоптимальное предсказание

Решение задачи в остальных случаях (когда T/d - дробное или нечетное целое) неизвестно. В качестве субоптимального (квазиоптимального) решения можно рекомендовать выбор ближайшего $k < T/d$, при котором существует матрица Адамара, по следующим причинам.

Во-первых, максимальная длительность помехи d на практике бывает известна лишь приближенно. Это позволяет подбирать ее численное значение так, чтобы T/d было целым и кратным 4, тем более, что часто длительность интервала T тоже можно варьировать. Во-вторых, даже если используется субоптимальная фильтрация, когда в качестве k берется ближайшее число меньше, чем T/d , при котором существует матрица Адамара, то проигрыш в помехоустойчивости по отношению к оптимальному фильтру сравнительно невелик.

Действительно, в наихудшем случае вместо потенциальной помехоустойчивости $J_0 = \frac{r}{\sqrt{T/d}}$

получим помехоустойчивость $J_1 = \frac{r}{\sqrt{T/d-4}}$, откуда

$$\frac{J_1}{J_0} \leq \sqrt{\frac{T}{T-4d}} \approx 1 + 2\frac{d}{T}. \quad (2.46)$$

Если учесть, что кроме матриц Адамара можно использовать C -матрицы, то оценка может быть улучшена:

$$\frac{J_1}{J_0} \leq \sqrt{\frac{T}{T-3d}} \approx 1 + 3\frac{d}{T}.$$

Пусть, например, $T/d = 14,5$. Ближайшие k , для которых существуют матрицы Адамара, равны 12 и 16. Выбирая $k = 12$, получим $J_1 / J_0 \leq \sqrt{14,5/12} < 1,1$, т.е. уменьшение помехоустойчивости по сравнению с оптимальной фильтрацией составляет 10 %.

Выбирая $k = 14$ и используя C -матрицу, получим $J_1 / J_0 \leq \sqrt{14,5/13} < 1,056$, т.е. помехоустойчивость будет отличаться от потенциально достижимой на 5,6 %.

Поэтому подмножество A_S множества \bar{A} линейных изометрических неособенных операторов вполне достаточно для целей практического синтеза оптимальных чебышевских фильтров.

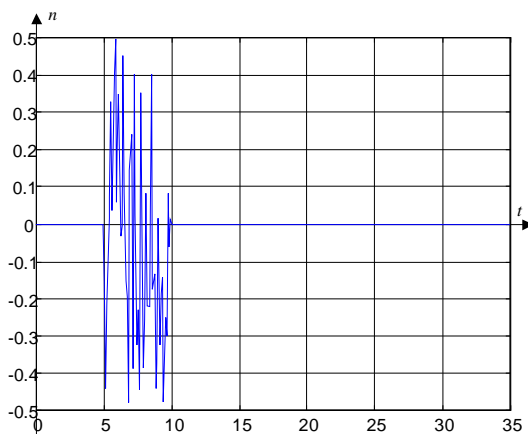
Отметим, что потенциальная помехоустойчивость, определяемая формулой (2.22), характеризует гарантированное ослабление помехи для ее *наихудшего* вида. Средний выигрыш в помехоустойчивости будет более значительным.

Пример 2.1. Рассмотрим пример фильтрации двукратной помехи $n(t)$, изображенной на рис. 2.1,а, с помощью укороченной матрицы Адамара седьмого порядка (1.33). На рис. 2.1,б показан результат воздействия чебышевского фильтра на эту помеху. Видно, что фильтрация ослабила амплитуду помехи в 1,4 раза (при $J_0 = 1,32$).

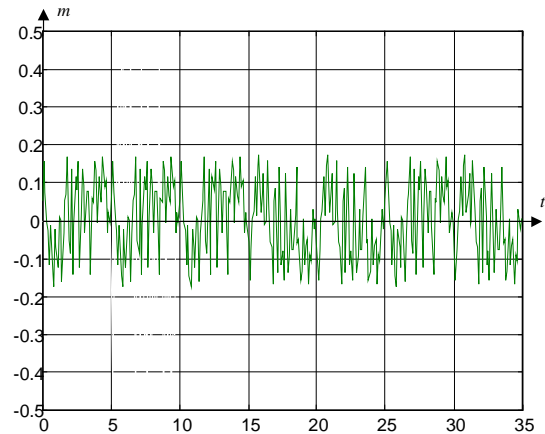
Пример 2.2. Рассмотрим действие того же фильтра на однократную помеху. Длительность помехи равна 1/7 рассматриваемого временного интервала (рис. 2.4,а). Она формировалась с помощью функции **rand** пакета MATLAB в виде отрезка случайного процесса с равномерным распределением. Из рис. 2.4,б видно, что амплитуда помехи после преобразования уменьшилась примерно в 2,6 раза за счет "растягивания" помехи по всей длительности сигнала.

На рис. 2.4,в, г показаны графики, которые наблюдаются в двумерной плоскости $n(t), m(t)$ (сигналы помехи до и после фильтрации) в случае однократной и двукратной помех. Отношение вертикального и горизонтального размеров графиков характеризуют эффективность чебышевской фильтрации в каждом случае.

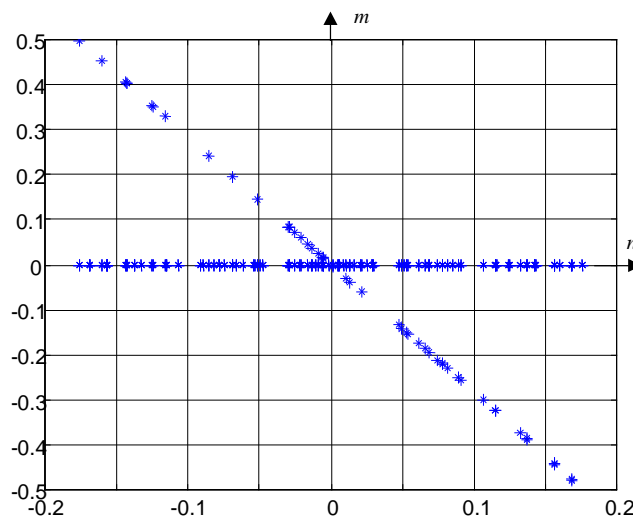
а)



б)



в)



г)

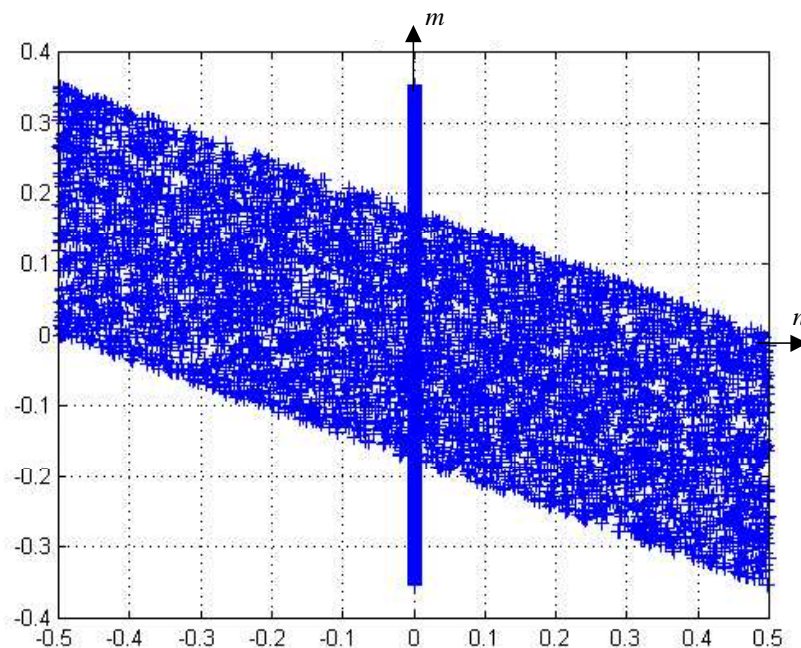


Рис. 2.4. Действие фильтра с матрицей (1.33) на импульсные помехи

Из изложенного выше следует [108, 110, 127], что для получения равномерного распределения однократной импульсной помехи по длительности выходного сигнала все элементы матрицы A должны быть равны по абсолютной величине. Среди ортогональных матриц, сохраняющих мощность сигнала и осуществляющих "вращательное" преобразование [11], такому требованию удовлетворяют матрицы Адамара [6, 16, 38, 72, 103, 105, 110, 117, 118]. Известны методы построения таких матриц для $n = 4m$; $m = 1, 2, \dots$ до $k = 256$) [50] и далее до $n = 1000$ за исключением нескольких случаев [72, 121].

Элементами нормированной матрицы Адамара являются вещественные числа вида $\pm 1/\sqrt{n}$, при этом ее строки (столбцы) ортогональны между собой, а транспонированная матрица равна обратной. Следует отметить, что любую матрицу Адамара можно привести к "нормальной" форме, когда элементы первой строки и первого столбца положительны, а оставшаяся часть (без этого "окаймления") представляет собой матрицу, получающуюся путем циклической перестановки элементов одной из строк, т.е. циркулянту.

Из неортогональных матриц необходимо отметить матрицу вида:

$$A = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

которая при $n = 4$ совпадает с одной из модификаций матрицы Адамара. Другие примеры матриц, применение которых дает результаты, близкие к выполнению требования равенства ее элементов по абсолютной величине, приведены в приложении.

Как уже отмечалось, выбор критерия оптимизации и тип априорной информации во многом предопределяют способ решения задачи и получаемые результаты. Так, использование среднеквадратичного критерия в задачах фильтрации, приводящее к фильтру Винера [60] или его разновидностям, требует априорной информации об энергетических спектрах сигнала и помехи, осуществляя подавление помех именно на основе использования этой информации. Применение минимаксного критерия приводит к рассмотренному оптимальному чебышевскому фильтру, требующему минимума априорной информации о сигнале и помехах – нужно знать только их длительности. При этом смысл фильтрации сводится к возможно более равномерному

распределению помехи вдоль длительности сигнала без изменения энергии сигнала и помехи. Иногда преобразования такого типа называют вращательными [11, 31, 38].

Более подробное сопоставление признаков фильтров, соответствующих среднеквадратичному и минимаксному критериям, приведено в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Сравнение фильтров Винера и Чебышева

| Сравниваемые признаки | Фильтр Винера | Фильтр Чебышева |
|--|--|---|
| Вид критерия | Среднеквадратичный | Минимаксный |
| Вид сигнала и помехи | Стационарные случайные функции | Финитные функции |
| Априорная информация о сигнале и помехе | Энергетические спектры или корреляционные функции сигнала и помехи | Длительность сигнала и помехи |
| Физический смысл фильтрации | Ослабление спектра помехи | Распределение помехи вдоль длительности сигнала |

Она может помочь сделать обоснованный выбор при решении конкретной прикладной задачи в пользу того или иного метода фильтрации.

2.7. Введение избыточности в стрип-методе линейных предсказаний

В предыдущих подразделах исследованы требования, предъявляемые к выбору матриц прямого и обратного преобразований сигнала в стрип-методе линейных предсказаний. При этом использовались квадратные числовые матрицы. Дополнительные возможности борьбы с импульсными помехами и повышения помехоустойчивости каналов связи появляются с применением в стрип-методе не квадратных, а прямоугольных матриц прямого преобразования, позволяющих ввести в передаваемый сигнал информационную избыточность. На приемном конце канала введенную информационную избыточность можно использовать как для уменьшения мощности помех в восстановленном сигнале $x'(t)$, не интересуясь формой и моментом появления помехи, так и для решения задач обнаружения, локализации, идентификации и коррекции помех.

Следует подчеркнуть некоторые особенности предлагаемого подхода. Во-первых, он использует идеи метода избыточных переменных [141], отличающегося тем, что повышение помехоустойчивости и надежности систем достигается не традиционным резервированием аппаратуры, а введением в сигнал дополнительной информации.

Во-вторых, стрип-метод линейных предсказаний и коррекции помех является аналогом методов кодирования и декодирования, но не цифровых, а непрерывных (континуальных) сигналов.

В-третьих, область применения рассматриваемого метода достаточно широка и включает передачу электрических сигналов по каналам связи (в частности, телевизионным), регистрацию сигналов измерительной информации и т.д.

Рассмотрим подробнее возможности использования информационной избыточности в рамках стрип-метода [94-98, 104, 108, 109, 111, 123, 127-129].

Снижение мощности помех в восстановленном сигнале

В стрип-методе с избыточностью [104] матрица A в преобразовании (1.5) характеризуется размером $(m \times n)$, где $m > n$. В результате одномерный предсказанный сигнал

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t - \tau) + \dots + y_m[(t - (m-1)\tau)], \quad 0 \leq t \leq T' \quad (2.48)$$

имеет уже длительность $T' = m\tau > T$ и содержит $k = m - n$ избыточных участков.

Теперь не все строки матрицы A будут линейно-независимыми; k ее строк всегда могут быть представлены как линейные комбинации остальных.

Оператор обратного линейного преобразования в этом случае целесообразно описывать псевдообратной матрицей A^+ размера $(n \times m)$ [47]:

$$A^+ = (A^T \cdot A)^{-1} A^T. \quad (2.49)$$

Использование матрицы A^+ , как известно [47], эквивалентно применению метода наименьших квадратов [75] и приводит к максимальному (при заданной матрице A) уменьшению среднеквадратического отклонения восстановленного сигнала $x'(t)$. Это соответствует оптимизации согласно критерию приближения в среднеквадратичном в пространстве L_2 суммируемых в квадрате функций. Метрика ρ_2 этого пространства имеет следующий вид:

$$\rho_2(x', x) = \sqrt{\int_0^T |x'(t) - x(t)|^2 dt}, \quad (2.50)$$

а наилучшее приближение достигается при:

$$\rho_2^x(x', x) = \sqrt{\min_{A^+} \int_0^T |S^{-1} A^{-1} A y'(t) - x(t)|^2 dt}. \quad (2.51)$$

Суммарный уровень помех при этом снижается в $\sqrt{\frac{n+k}{n}} = \sqrt{\frac{m}{n}}$ раз. Отметим, что действие оператора, описываемого матрицей A^+ , позволяет уменьшать мощность любых, в том числе и неимпульсных помех при условии их центрированности.

В качестве примера в [127] рассмотрено действие оператора A , представляющего собой прямоугольную матрицу размером 12×4 :

$$A = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T. \quad (2.52)$$

Матрица A , соответствующая выражению (2.52), представляет собой четыре столбца, "вырезанные" из матрицы Адамара порядка $n = 12$, которая записана в нормальной форме. Таким образом, число избыточных участков $k = m - n = 8$, и преобразованный сигнал $y(t)$ имеет в три раза бóльшую длительность $T' = 3T$ по сравнению с исходным сигналом $x(t)$. Восстановленный сигнал $x'(t)$, полученный с помощью псевдообратной матрицы A^+ (в данном случае $A^+ = A^T$), имеет длительность T . Выигрыш в помехоустойчивости по сравнению с безыбыточным преобразованием составляет $\sqrt{\frac{n+k}{n}} \cong 1,7$ раз.

Обнаружение, локализация, идентификация и коррекция помех

Применение рассматриваемого стрип-метода является более эффективным [104, 108] при условии предварительной коррекции импульсных помех. Введение информационной избыточности позволяет зафиксировать факт появления помехи (задача обнаружения), определить ее временное положение, т.е. номер участка (задача диагностики), а также амплитуду и форму помехи (задача идентификации). Это дает возможность решить задачу коррекции (устранения, исправления, исключения) помехи.

Алгоритм коррекции помехи основан на следующем. Поскольку любые k компонент сигнала $y(t)$ являются линейными комбинациями остальных, то имеют место k соотношений

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{n+k} b_{ij} \cdot y_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (2.53)$$

где b_{ij} - числовые коэффициенты.

При появлении помехи сигналы рассогласования Δ_i становятся отличными от нуля. Они содержат определенную информацию о месте и величине помехи.

Из общих положений теории кодирования [152] следует, что для исправления ошибок кратности r необходимо не менее $2r$ избыточных компонент, т.е. $k > 2r$. В рамках метода избыточных переменных доказано, что при обработке аналоговой информации достаточно всего $k = r + 1$ избыточных компонент, чтобы определить место и величину практически всех r -кратных помех.

Рассмотрим случай однократной помехи $r = 1$ (поражен только один участок сигнала); тогда $k = r + 1 = 2$. Сформируем два сигнала рассогласования Δ_1 и Δ_2 (2.53) и образуем $n+2$ их линейные комбинации:

$$\Delta'_i = b_{2i} \cdot \Delta_1 - b_{1i} \cdot \Delta_2 = \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 \\ b_{1i} & b_{2i} \end{vmatrix}; \quad i = 1, 2, \dots, n + 2. \quad (2.54)$$

Оказывается, что каждое из рассогласований Δ'_i инвариантно к искажениям одного из участков сигнала $y(t)$. Действительно, если в результате искажения помехой сигнал y_j превращается в $y_j + \delta y_j$, то Δ_1 и Δ_2 окажутся, соответственно, равными

$$\Delta_1 = -b_{1j} \cdot \delta y_j; \quad \Delta_2 = -b_{2j} \cdot \delta y_j. \quad (2.55)$$

Тогда для их линейных комбинаций получаем:

$$\Delta'_i = \delta y_j \cdot \begin{vmatrix} b_{1j} & b_{2j} \\ b_{1i} & b_{2i} \end{vmatrix}; \quad i = 1, 2, \dots, n + 2. \quad (2.56)$$

Отсюда видно, что, если ни один из определителей второго порядка не равен нулю,

$$\begin{vmatrix} b_{1j} & b_{2j} \\ b_{1i} & b_{2i} \end{vmatrix} \neq 0; \quad i \neq j, \quad (2.57)$$

то все сигналы рассогласования, кроме Δ'_i , будут отличны от нуля. На основании этого и определяется номер искаженного участка. Величина помехи находится из соотношения (2.55).

Рассмотрим частный случай предискажения сигнала, когда преобразованный сигнал получается в результате добавления к исходному сигналу двух избыточных участков. Матрица A при этом имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Здесь исходный сигнал остается без изменений, в результате чего прямое и обратное преобразования значительно упрощаются. Дополнительные участки формируются в соответствии с формулами:

$$y_{n+1}(t) = \sum_{j=1}^n a_j x_j(t), \quad (2.59)$$

$$y_{n+2}(t) = \sum_{j=1}^n b_j x_j(t).$$

Поскольку в данном случае $x_j(t) = y_j(t)$; $j = 1, 2, \dots, n$, соотношения (2.53) принимают вид:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n - y_{n+1} = 0, \\ \Delta_2 &= b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_n y_n - y_{n+2} = 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Коэффициенты a_j и b_j можно выбрать, например, таким образом:

$$a_j = -1; \quad b_j = -j; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.61)$$

Тогда для сигналов рассогласования получаем:

$$\begin{aligned} -\Delta_1 &= y_1 + y_2 + \dots + y_n + y_{n+1} = 0, \\ -\Delta_2 &= y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n + y_{n+2} = 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Номер участка, пораженного помехой, определяется отношением контрольных сигналов:

$$N = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}. \quad (2.63)$$

Чтобы избежать возможного деления на нуль, равенство (2.63) удобнее переписать в форме

$$\Delta_2 = N\Delta_1.$$

На плоскости (Δ_1, Δ_2) оно задает n прямых, проходящих через начало координат, при этом N – угловой коэффициент наклона прямых.

Например, при поражении первого участка получим: $\Delta_1 = \Delta_2 = \delta y_1$; $N = 1$; при поражении второго участка $\Delta_1 = \delta y_2$, $\Delta_2 = 2\delta y_2$; $N = 2$ и т.д. вплоть до n -го участка.

Для коррекции помехи достаточно вычесть из пораженного участка, номер которого уже определен, сигнал рассогласования Δ_1 , так как в случае однократной ошибки он совпадает с помехой: $\Delta_1 = \delta y_N$.

Пример 2.3. Рассмотрим пример формирования избыточного сигнала с помощью матрицы (2.58) и его последующей обработки с нормированными коэффициентами (2.61). Вычисления будем проводить в пакете MATLAB с помощью программы **redund**, текст которой приводится ниже.

Программа **redund**

```

формирование массивов времени 0 ≤ t ≤ 8 и 0 ≤ tt < 1
pi*t/8); % исходный сигнал (5 гармоник)
figure;plot(t,x),grid
y1=x(1:100);y2=x(101:200);y3=x(201:300);y4=x(301:400);
702:801); % стрип-преобразование исходного сигнала
y9=(y1+y2+y3+y4+y5+y6+y7+y8)/4;
y10=(y1+2*y2+3*y3+4*y4+5*y5+6*y6+7*y7+8*y8)/20; % формирование избыточных участков
y=[x, y9, y10]; % избыточный сигнал длительностью
10 с.
dx=(sin(pi*t).^2).*(t>1&t<2); % помеха на втором участке
figure;plot(t,dx),grid % и ее график
ye=[x+.5*dx, y9, y10]; % избыточный сигнал с помехой
T=[t, t(end)+tt, t(end)+tt(end)+tt]; % массив времени 0 ≤ T < 10
% графики правильного и искаженного избыточных сигналов

```

```

y2=ye(101:200);
d1=(y1+y2+y3+y4+y5+y6+y7+y8)-4*y9;
d2=(y1+2*y2+3*y3+4*y4+5*y5+6*y6+7*y7+8*y8)-20*y10;    % сигналы рассогласования
% графики сигналов рассогласования  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ 
% траектория в плоскости ( $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ )

```

График исходного сигнала $x(t)$ показан на рис. 2.5, он получен суммированием пяти синусоидальных компонент:

$$x(t) = \sin 2\pi t + \sin \pi t + \sin \frac{\pi}{2}t + \sin \frac{\pi}{4}t + 0,3 \sin \frac{\pi}{8}t, \quad 0 \leq t \leq 8.$$

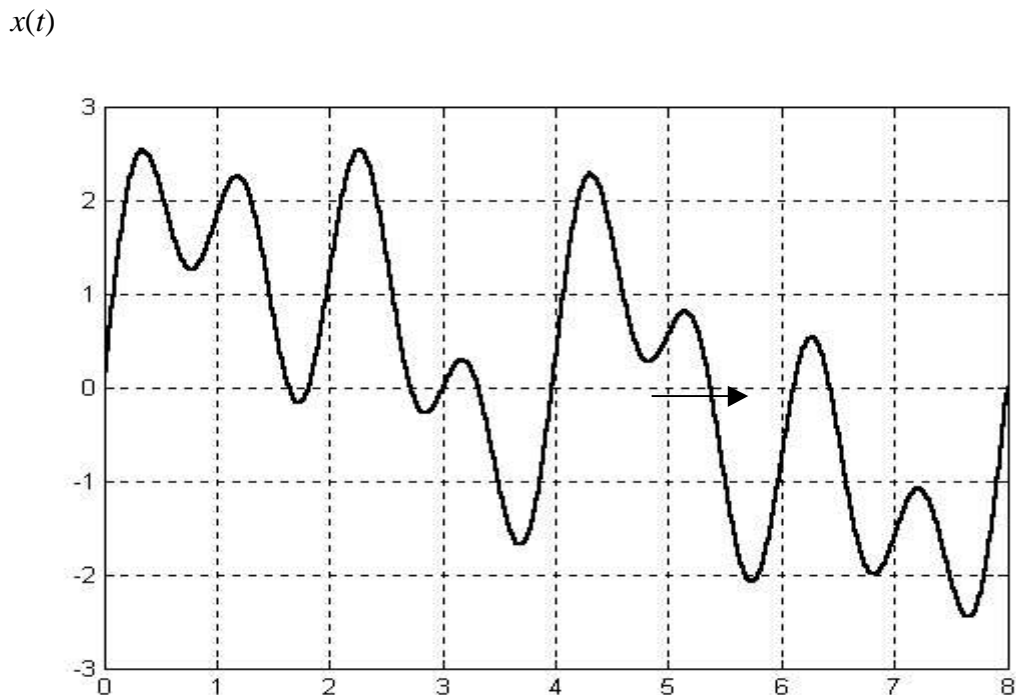


Рис. 2.5. Исходный сигнал $x(t)$

Стрип-преобразование этого сигнала получено путем "разрезания" его на 8 равных частей y_1, \dots, y_8 длительностью 1 с каждая (рис. 2.6).

Избыточные участки получались по формулам

$$y_9 = (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8)/4,$$

$$y_{10} = (y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 + 5y_5 + 6y_6 + 7y_7 + 8y_8)/20.$$

Далее из "коротких" сигналов y_1, \dots, y_{10} формировался "избыточный" скалярный сигнал $y(t)$ длительностью 10 с и к нему добавлялась помеха, искажающая второй участок. Форма этой помехи представлена на рис. 2.7, избыточный сигнал с помехой y^* и без нее y показан на рис. 2.8 (помеха добавлялась с коэффициентом 0,5). Из рис. 2.8 видно, что помеха незначительно исказила передаваемый сигнал и обнаружить ее действие "на глаз" весьма затруднительно.

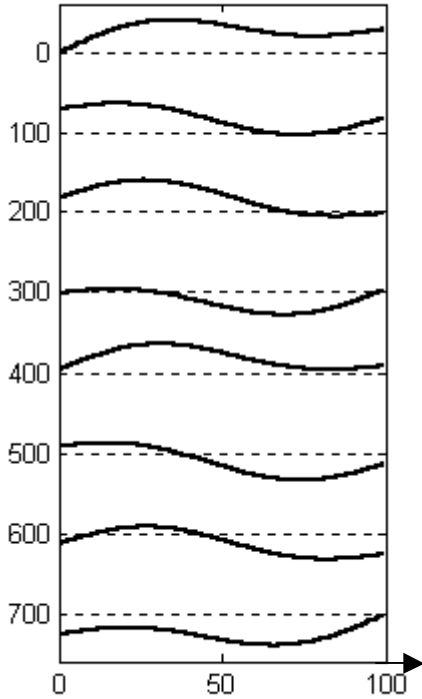


Рис. 2.6. Strip-преобразование исходного сигнала

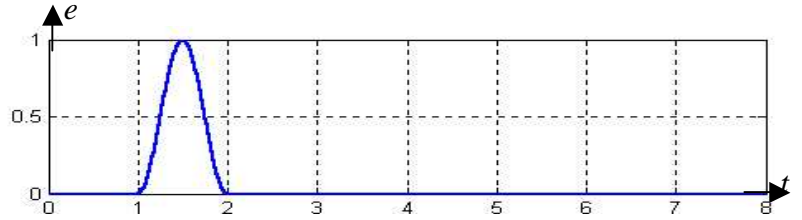


Рис. 2.7. График импульсной помехи

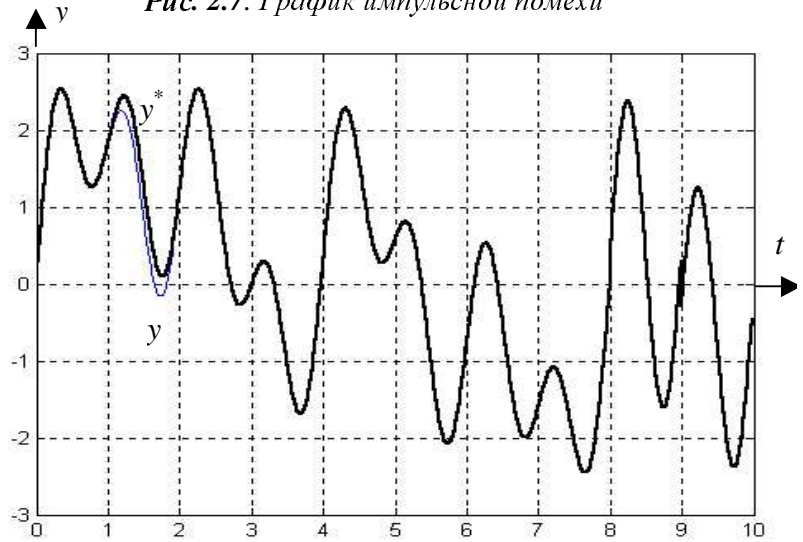


Рис. 2.8. Избыточный сигнал (y – исходный, y^* – при искажении второго участка)

Для определения номера искаженного участка и величины искажения найдем контрольные сигналы (сигналы рассогласования) Δ_1, Δ_2 :

$$\Delta_1 = \sum_1^8 y_i - 4y_9; \quad \Delta_2 = \sum_1^8 iy_i - 20y_{10}.$$

Графики контрольных сигналов в зависимости от времени представлены на рис. 2.9,а. Их форма повторяет форму помехи (рис. 2.7), а соотношение амплитуд равно двум. Это означает, что номер ошибки равен $N=2$, что соответствует действительности.

К тому же выводу можно прийти на основании рис. 2.9,б, где воспроизведена плоскость рассогласований (Δ_1, Δ_2).

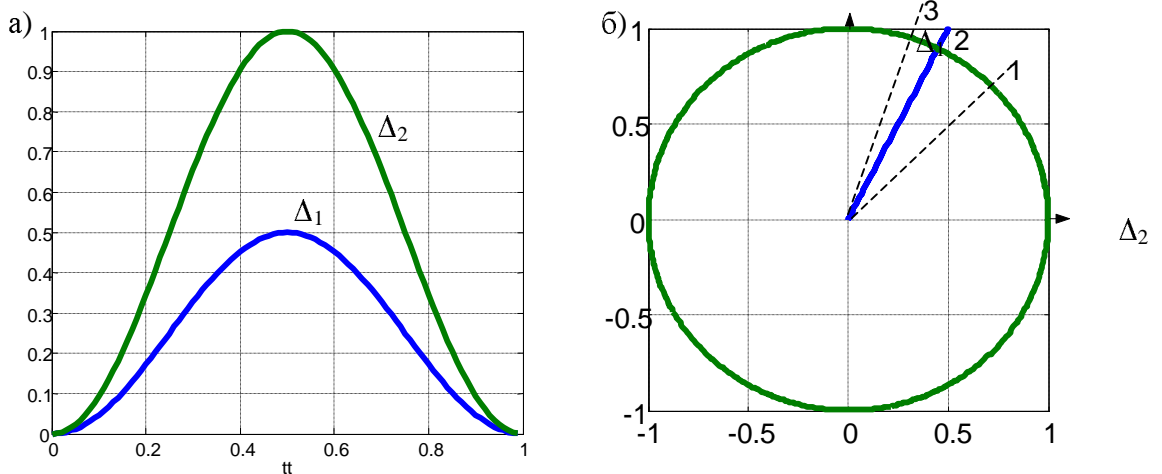


Рис. 2.9 Графики контрольных сигналов Δ_1 и Δ_2 (пример 2.3): а) в зависимости от времени; б) на плоскости рассогласований Δ_1, Δ_2 .

Угловым коэффициентом наклона прямой равен 2, откуда вновь заключаем, что $N=2$. Пунктиром на этом рисунке показаны направления прямых при искажении первого или третьего участков, т.е. для помех $N=1$ или $N=3$. Ввиду малого угла между прямыми 2 и 3 точная диагностика помех может оказаться затруднительной. Еще труднее будет различить помехи с большими номерами, например $N=7$ и $N=8$.

Это связано с тем, что выбор коэффициентов a_i и b_i (2.61) не вполне удачен, поскольку не учитывает следующие факторы.

Во-первых, для получения одинаковой в среднем мощности на каждом участке необходимо, чтобы нормы всех строк матрицы A равнялись единице. Во-вторых, следует обеспечить максимальное угловое расстояние между прямыми $A_2 = NA_1$.

Для учета первого фактора при формировании участков y_9, y_{10} были введены нормирующие множители $1/4$ и $1/20$. Чтобы учесть второй фактор, нужно изменить коэффициенты a_i и b_i по сравнению с (2.61). Один из вариантов такого изменения приводится ниже.

Пример 2.4. Рассмотрим тот же исходный сигнал, что и в предыдущем примере (см. рис. 2.5), но избыточные участки будем теперь получать по формулам

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_5 - y_6 + y_7 - y_8 - 4y_9, \\ \Delta_2 &= y_1 + y_2 + 2(y_3 + y_4) + 3(y_5 + y_6) + 4(y_7 + y_8) + 10y_{10}.\end{aligned}$$

Их графики для помехи, изображенной на рис. 2.7, отличаются только знаками $\Delta_1(t) = -\Delta_2(t)$ (рис. 2.10,а), откуда следует, что помехой искажен второй участок.

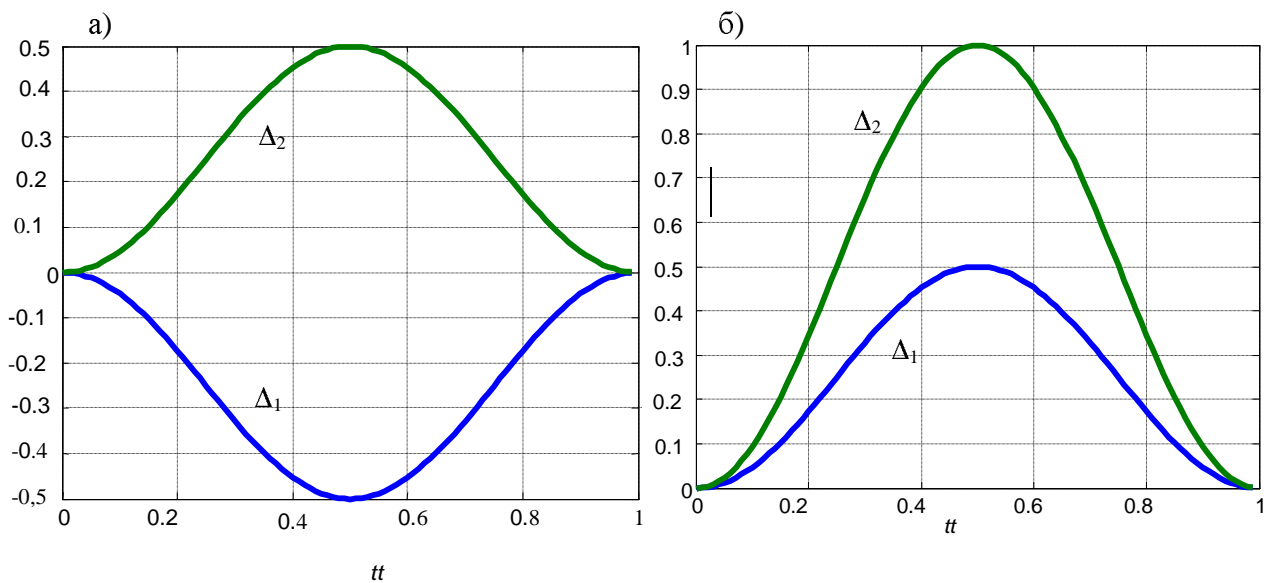


Рис. 2.10. Контрольные сигналы Δ_1 и Δ_2 (пример 2.4): а – при искажении второго участка; б - при искажении третьего участка

Рис. 2.10,б относится к случаю искажения третьего участка:

$$dx=(\sin(\pi*t).^2).*(t>2\&t<3); y3=xe(201:300).$$

Здесь контрольные сигналы удовлетворяют соотношению $\Delta_2 = 2\Delta_1$, как это и должно быть. Сигнал $y(t)$ для этого случая представлен на рис. 2.11.

Из рис. 2.12 видно, что угловые расстояния между прямыми на плоскости рассогласований увеличились по сравнению с рис. 2.9,б из предыдущего примера. Это приводит к улучшению различимости однократных помех, т.е. к улучшению качества диагностики.

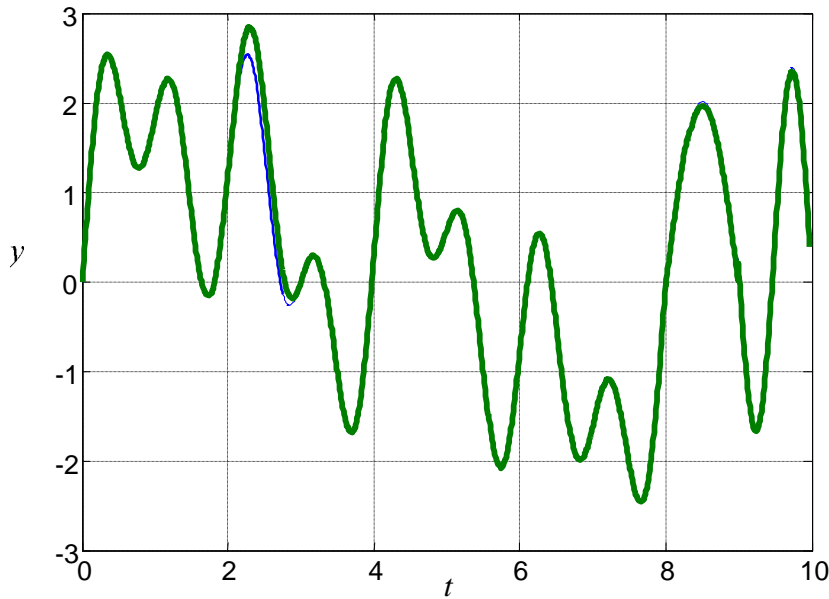


Рис. 2.11. Избыточный сигнал $y(t)$ при искажении третьего участка (пример 2.4)

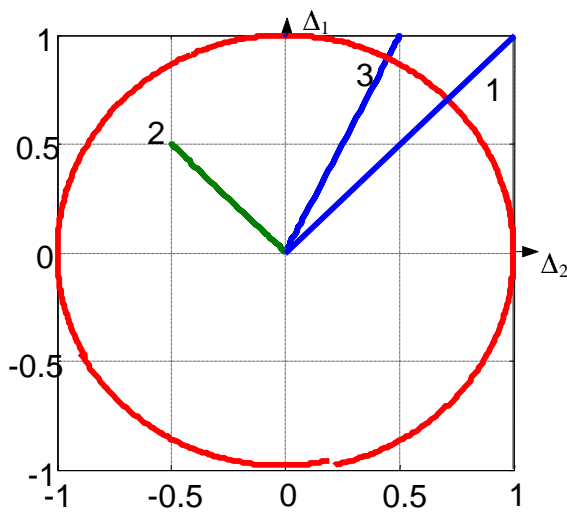


Рис. 2.12. Прямые на плоскости рассогласований (пример 2.4)

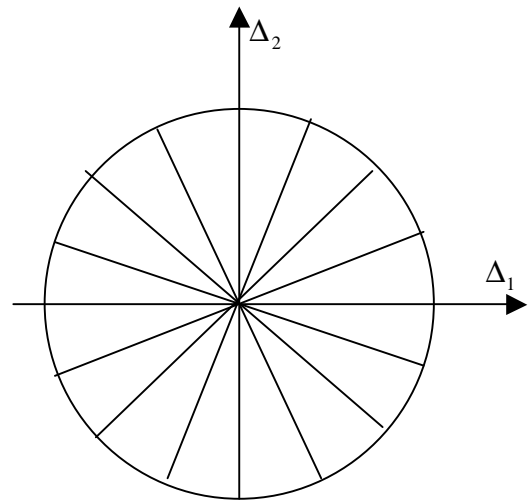


Рис. 2.13. Равномерное расположение прямых при $n=6$

Оптимальным с точки зрения различимости однократных помех будет равномерное распределение прямых по квадрантам плоскости (Δ_1 и Δ_2). Оно достигается при следующих значениях коэффициентов b_j :

$$b_{1j} = \cos \frac{\pi \cdot j}{n+2}, \quad b_{2j} = \sin \frac{\pi \cdot j}{n+2}. \quad (2.64)$$

При этом обеспечивается равенство углов между любыми соседними прямыми.

Пример такого расположения прямых для $n=6$ приведен на рис. 2.13; направления прямых задаются диагоналями правильного восьмиугольника. Признаком одной из 8 возможных однократных помех будет попадание изображающей точки (Δ_1, Δ_2) на соответствующую прямую.

В качестве одного из примеров практического применения описанного стрип-метода рассмотрим использование введения избыточности при передаче видеосигнала [130]. Причинами появления импульсных помех зачастую являются прерывания связи, замирания в канале и т.д., приводящие к кратковременным пропадающим сигнала. Помехи такого вида встречаются при записи сигнала телевизионного изображения на видеомагнитофон. Здесь выпадение сигнала обусловлено нарушением контакта между магнитной головкой и лентой за счет ее дефектов, склеек и динамики вакуумного прижима [53, 126].

Эффективным средством ослабления таких помех является использование информационной избыточности, содержащейся в сигнале. Например, при воспроизведении видеозаписи применяют замену сигнала, соответствующего "выпавшей" строке, задержанным сигналом предыдущей строки. В этом случае используется естественная избыточность видеосигнала. Если сигнал не содержит естественной избыточности, то его можно ввести специально для повышения его помехозащищенности, применяя описанный выше способ.

Выбор критерия, в соответствии с которым оценивается качество принятого видеосигнала, в значительной степени предопределяет процедуру его обработки. В настоящее время наибольшее распространение получили три критерия: среднеквадратический, приводящий к методу наименьших квадратов [75] и оптимальной фильтрации; среднемодульный, приводящий к методу наименьших модулей [49] и минимаксный (чебышевский).

Особенности зрительного восприятия качества изображения накладывают определенные ограничения на выбор критерия качества передачи видеосигнала. Известно [71], что среднеквадратический критерий дает оценку, плохо согласующуюся с оценкой зрителя, поскольку помехи, коррелированные с изображением, учитываются им в той же мере, что и некоррелированные. В то же время коррелированные помехи типа ложных контуров значительно более заметны, чем аддитивный шум.

Применение стрип-метода линейных предсказаний, оптимального в смысле чебышевского критерия, приводит к распределению импульсной помехи по полю изображения. Вследствие этого яркие и темные точки, появляющиеся на изображении из-за действия импульсных помех, преобразуются в расплывшиеся дефекты типа "муара", который практически не мешает восприятию осмысленного изображения. Однако при больших амплитудах помех этот метод (без введения избыточности) становится малоэффективным, так как амплитуды распределенных помех остаются сравнительно большими.

Помехи типа пропадания сигнала изменяют, по сути дела, амплитуду сигнала, поэтому при борьбе с ними целесообразно применение критериев, близких к критерию, используемому в методе наименьших модулей. Для алгоритмов обработки по методу наименьших модулей характерно игнорирование сигналов с большой амплитудой помех и замена их сигналами, имеющими меньший уровень помех. Применительно к передаче сигнала с введенной информационной избыточностью это будет означать определение искаженного участка сигнала и восстановление этого участка сигнала на основе избыточной информации.

Будем рассматривать видеосигнал длительностью T , соответствующей временному интервалу, занимаемому строкой, полукадром или кадром телевизионного изображения. Этот сигнал можно представить в виде участков длительностью h , которая больше или равна длительности элемента разложения. Полагаем, что пропадания сигнала случаются достаточно редко, не чаще r раз за интервал T (r - кратные помехи), а длительность каждого пропадания не превосходит h . Объем вводимой избыточности определим, как относительное увеличение длительности сигнала Θ / T .

Оценим объем избыточности, исходя из количества информации, которую должен нести дополнительный участок сигнала. Для обнаружения наличия помехи требуется минимальная информация, в пределе равная одному биту. Поэтому длительность Θ_1 дополнительного участка может быть очень малой: $\Theta_1 \ll h$.

При определении номера искаженного участка, если помеха однократна, требуемое количество информации составляет $\log_2 n$ бит, где n - число участков. Для r -кратной помехи это количество возрастает до $\log_2 \sum_{i=1}^r C_n^i$, где C_n^i - число сочетаний из n по i . При этом длительность дополнительного участка $\Theta_2(r)$ в несколько раз больше, чем Θ_1 , но по-прежнему остается меньше длительности участка: $\Theta_2 < h$.

Для коррекции r -кратной помехи необходимо знать номера искаженных участков (это требует увеличения длительности сигнала на Θ_2) и правильные значения сигнала на r пораженных участках (это требует дополнительного увеличения длительности сигнала на величину rh). Таким образом, $\Theta_3(r) = \Theta_2(r) + rh$, откуда

$$rh < \Theta_3(r) \leq (r + 1)h. \quad (2.65)$$

Из (2.65) следует, что для исправления r -кратных помех к исходному сигналу, состоящему из n участков, надо добавить дополнительный сигнал, состоящий из $(r + 1)$ участка. Это соответствует введению избыточности объемам $(r + 1) / n$.

Объем вводимой избыточности может быть существенно уменьшен при решении задачи обнаружения помехи без ее исправления. Один из простых способов введения избыточности состоит в следующем. Дополнительный сигнал y_{n+1} формируют путем интегрирования исходного видеосигнала в пределах от 0 до T :

$$y_{n+1} = \int_0^T p_1(t) \cdot x(t) dt, \quad (2.66)$$

где: $p_1(t)$ - некоторая весовая функция.

Замечание 1. Для (2.66) при любой $p_1(t)$ не будут обнаруживаться помехи, ортогональные функции $p_1(t)$, так как для них скалярное произведение $(p_1(t), Ay) = 0$.

Таким образом, избыточный сигнал представляет собой короткий участок напряжения постоянного тока. В то же время он несет в себе информацию обо всем исходном сигнале, поскольку имеет вид скалярного произведения в функциональном пространстве. Если задаться весовой функцией $p_1(t) = 1 / T$, то $y_{n+1} = \overline{x(t)}$ и обнаружение ошибки на приемном конце канала связи производится сравнением среднего значения принятого сигнала в интервале $[0, T]$ и избыточного. К недостаткам такого контроля относится то, что он не позволяет обнаруживать централизованные помехи.

Промежуточный вариант введения избыточности получается при использовании двух участков дополнительного сигнала, получаемых по формулам:

$$y_{n+1} = \int_0^T p_1(t) \cdot x(t) dt, \quad y_{n+2} = \int_0^T p_2(t) \cdot x(t) dt. \quad (2.67)$$

Формулы (2.66) и (2.67) соответствуют математическому термину "момент функции $x(t)$ с весом $p(t)$ ". Таким образом, они иллюстрируют контроль и диагностику помех по моментам передаваемого сигнала. В случае (2.67) можно определить место появления помехи без ее исправления, но объем вводимой избыточности сводится к минимуму.

Замечание 2. При использовании многоканальных систем связи или аппаратуры магнитной записи стрип-метод существенно упрощается в связи с тем, что отпадает необходимость в применении стрип-оператора S , осуществляющего "разрезание" сигнала при прямом преобразовании и оператора "склеивания" S^{-1} при обратном преобразовании сигнала.

Замечание 3. Выигрыш в повышении помехоустойчивости при использовании стрип-метода линейных предискажений с сохранением "объема" передаваемого сигнала (т.е. произведения его динамического диапазона, полосы занимаемых частот и времени существования T) достигается ценой задержки сигнала на время T при прямом и обратном преобразованиях, а также за счет затраты дополнительных материально - технических (аппаратурных) и энергетических (мощность, потребляемая аппаратурой на приемном и передающем пунктах канала связи) ресурсов.

Замечание 4. Стрип-метод линейных предискажений, предназначенный для "кодирования" и "декодирования" аналоговых сигналов с успехом может быть применен для засекречивающей аппаратуры связи, имеющей дело с передачей речевых сообщений.

Возможности применения стрип-метода в стеганографии

В последнее время одним из популярных направлений в области передачи и хранения информации является криптография и один из ее разделов – стеганография. Стеганография представляет собой передачу секретного сообщения в "невинной" оболочке (контейнере). Так,

например, можно передавать секретный текст, спрятанный в другом тексте, который является открытым для всех. Это направление в передаче компьютерной информации приобретает все большее развитие и распространение. Продемонстрируем возможность применения стрип-метода для создания алгоритма, который позволял бы "прятать" текстовое сообщение внутри музыкального фрагмента.

Для решения этой задачи передаваемое секретное сообщение сначала представляется в виде N -мерной вектор-функции. Это достигается с помощью стрип-преобразования, в результате которого исходный одномерный сигнал длительности T "нарезается" на N одинаковых по длительности частей и из них формируется вектор; его элементами являются одномерные сигналы длительности $h = T/N$.

Далее полученный вектор умножается на матрицу Адамара, элементы которой равны плюс или минус единице, а строки и столбцы образуют ортогональные векторы. Нормированная матрица Адамара N -го порядка удовлетворяет соотношению $H_N H_N^T = I_N$. На практике удобнее использовать не саму матрицу Адамара, а получаемую ее усечением циклическую матрицу.

После того, как вектор сообщения умножается на матрицу Адамара, он преобразуется обратно в одномерный вид. Преобразованное сообщение аддитивно добавляется (суммируется) к передаваемому музыкальному фрагменту. Вследствие этого добавления фрагмент меняется очень незначительно и это изменение практически незаметно (во всяком случае для человека с не абсолютным слухом).

Сообщение передается по каналу связи и адресат на приемном конце преобразует полученный музыкальный фрагмент со "спрятанным" сообщением в вектор-функцию, умножая ее на обратную матрицу Адамара. Полученный результат опять приводится к одномерному виду. Сам музыкальный фрагмент превратится при этом в бессмысленное сочетание звуков, а сообщение "проявится" и станет осмысленным. В результате этих действий адресат может прослушать сообщение на фоне музыки, искаженной преобразованием Адамара.

Данный алгоритм был реализован в пакете MATLAB. Для проверки его работоспособности задавалось исходное "секретное" сообщение (произнесенная мужским голосом фраза "Грузите апельсины бочками") и музыкальное сопровождение (фрагмент гимна Австралии). В процессе выполнения алгоритма пользователю предлагалось прослушать как передаваемый музыкальный фрагмент вместе со "спрятанным" сообщением, так и конечный результат работы – декодированное речевое сообщение на фоне музыки, искаженной преобразованием Адамара.

3. СТРИП-МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Многие задачи преобразования информации и анализа данных связаны с обработкой и передачей изображений. В качестве примеров можно привести сканирование и анализ земной поверхности со спутников, рентгенографию и ее применение в медицине, исследование биологических и химических процессов и другие. От качества изображений зависит точность получаемых результатов.

В данном разделе исследуется возможность использования стрип-метода для хранения и помехоустойчивой передачи изображений. При этом используются матричные преобразования исходного изображения перед передачей, в процессе которых фрагменты изображения перемешиваются и накладываются друг на друга. Преобразованное изображение передается по каналу связи, где оно искажается импульсной помехой. Ее действие может приводить, например, к полной потере отдельных фрагментов изображения. При получении сигнала на приемном конце выполняется обратное преобразование, в результате которого происходит восстановление изображения. Если обеспечить равномерное распределение импульсной помехи по всей площади изображения (без изменения ее энергии), то произойдет значительное ослабление амплитуды помехи и будет достигнуто приемлемое качество всех участков восстановленного изображения.

3.1. Двумерное стрип-преобразование

Первый этап стрип-метода преобразования одномерных сигналов состоял в "разрезании" исходного сигнала на n участков одинаковой длительности и формировании из них n -мерного вектора X . На втором этапе этот вектор подвергался изометрическому преобразованию путем умножения на ортогональную матрицу A размера $n \times n$: $Y = AX$.

Аналогично, первый этап стрип-преобразования двумерных сигналов (изображений) состоит в разбиении исходного изображения P на N одинаковых по размеру прямоугольных фрагментов, как это показано на рис. 3.1.

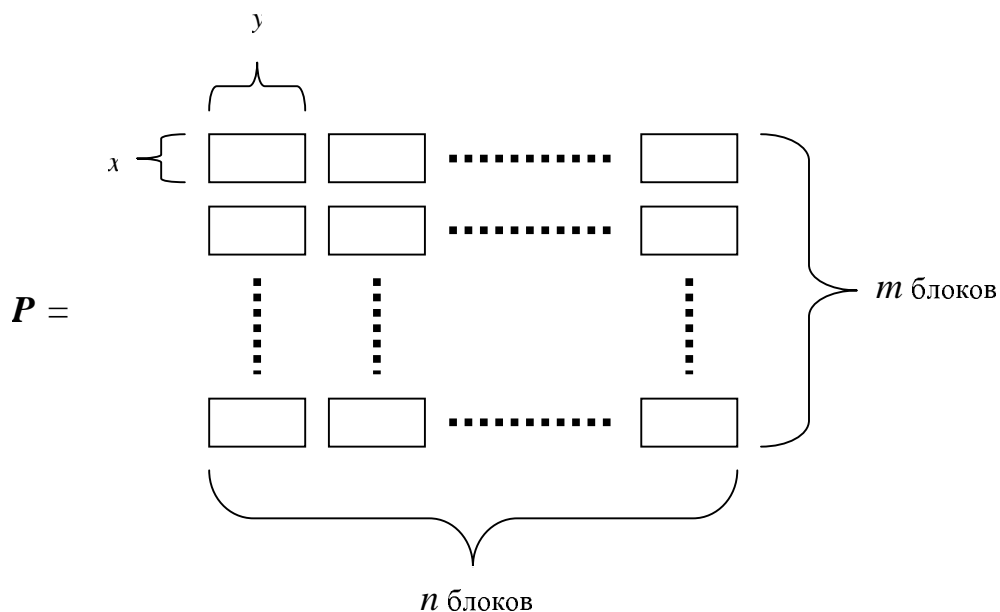


Рис. 3.1. Представление изображения в виде блочной матрицы P

Обозначим число горизонтальных и вертикальных полосок, на которые условно разрезается изображение, через m и n ; тогда $N = m \cdot n$.

Далее осуществляется линейное комбинирование фрагментов. При этом возможны два подхода – векторный и матричный.

При первом (векторном) подходе из полученных фрагментов формируется N -мерный блочный вектор X , который, как и в одномерном случае, подвергается изометрическому преобразованию путем умножения на ортогональную матрицу A размера $N \times N$: $Y = AX$. Будем

называть этот вариант, полностью аналогичный одномерному случаю, односторонним стрип-преобразованием.

Главный его недостаток – слишком большая размерность матрицы A и связанные с этим вычислительные затраты.

При втором (матричном) подходе исходное изображение, разбитое на фрагменты, рассматривается как блочная матрица X размера $m \times n$. Здесь возможны три варианта изометрического преобразования этой матрицы с целью "перемешивания" ее фрагментов:

а) умножение на ортогональную $m \times m$ матрицу B слева: $Z_1=BX$ (левостороннее матричное преобразование);

б) умножение на ортогональную $n \times n$ матрицу A справа $Z_2=XA$ (правостороннее матричное преобразование);

в) одновременное умножение на матрицу B слева и на матрицу A справа $Z=BXA$ (двустороннее матричное преобразование).

Все перечисленные варианты представлены на рис. 3.2.

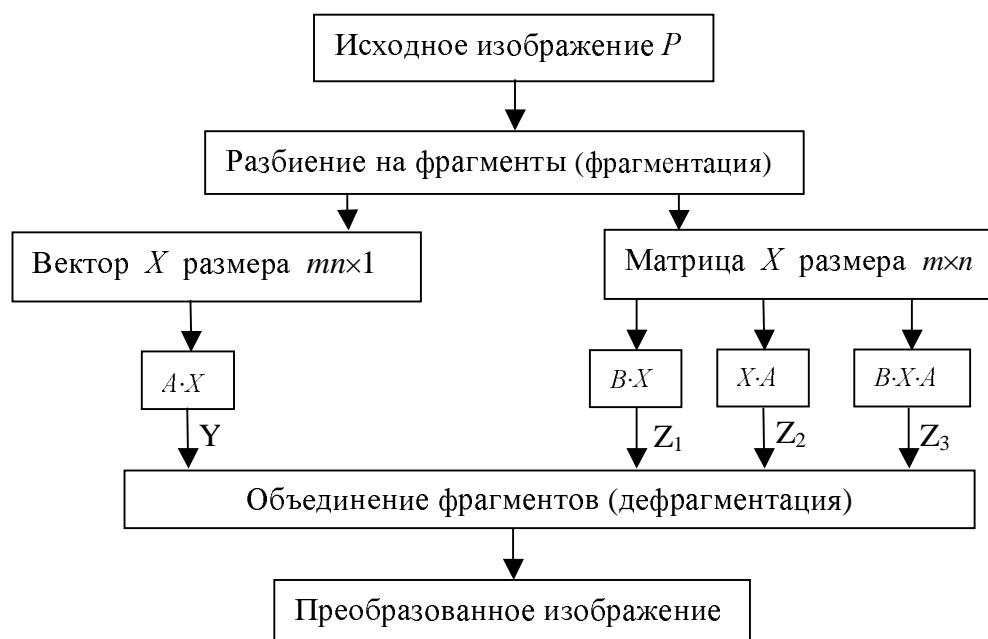


Рис. 3.2. Варианты двумерного стрип-преобразования

Основной интерес представляют первый и последний варианты преобразования, поскольку они обеспечивают наиболее полное "перемешивание" фрагментов изображения: каждый фрагмент преобразованного изображения содержит информацию обо всех mn фрагментах исходного изображения P .

В двух других вариантах $Z_1=BX$ и $Z_2=XA$ происходит линейное комбинирование только горизонтальных или только вертикальных полосок, на которые "разрезано" исходное изображение.

Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только два варианта преобразования:

– одностороннее стрип-преобразование

$$Y = AX, \quad (3.1)$$

где X – блочный вектор размера $m \times n$, A – ортогональная матрица порядка m ;

– двустороннее стрип-преобразование

$$Z = BXA, \quad (3.2)$$

где X – блочная матрица размеров $m \times n$, B и A – ортогональные матрицы порядков m и n .

Соответственно обратные преобразования, выполняемые при восстановлении изображения на приемном конце канала связи, описываются формулами:

$$X = A^{-1}Y, \quad (3.3)$$

для одностороннего преобразования и

$$X = A^{-1}ZB^{-1}, \quad (3.4)$$

для двустороннего преобразования.

Опишем эти два варианта подробнее.

Схема передачи изображения с использованием одностороннего стрип-преобразования показана на рис. 3.3.

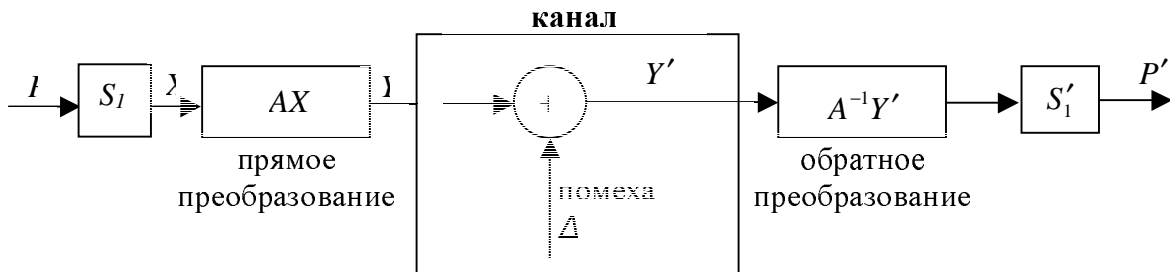


Рис. 3.3. Передача изображений с использованием одностороннего преобразования

На нем через P и P' обозначены исходное и восстановленное изображения, а через S и S^{-1} – прямой и обратный стрип-операторы, осуществляющие фрагментацию и дефрагментацию изображения.

В канале связи к вектору $Y=AX$ добавляется импульсная помеха Δ , в результате чего на выходе канала имеем вектор-изображение $Y'=Y+\Delta$. На приемном конце выполняется обратное одностороннее стрип-преобразование для получения вектора X' . Оно описывается формулой

$$X' = A^{-1}Y' = A^{-1}(Y + \Delta) = A^{-1}Y + A^{-1}\Delta = X + A^{-1}\Delta. \quad (3.5)$$

Полученный вектор X' представляется в виде суммы вектора X и вектора помехи Δ , над которым выполнено обратное преобразование. На последнем этапе вектор X' преобразуется в матрицу размера $m \times n$, описывающую восстановленное изображение P с добавленной к нему помехой $\Delta' = A^{-1}\Delta$.

Как уже отмечалось, основным недостатком одностороннего стрип-преобразования – слишком большой размер матрицы A , равный $m \times m$ (число элементов этой матрицы равно квадрату числа фрагментов, на которые разбито изображение). Матрицы B, A , используемые при двустороннем стрип-преобразовании, имеют существенно меньшие размеры (при $m=n$ общее число их элементов равно удвоенному числу фрагментов изображения). Это облегчает их формирование и хранение.

Блок-схема передачи изображения с использованием двустороннего преобразования показана на рис. 3.4.

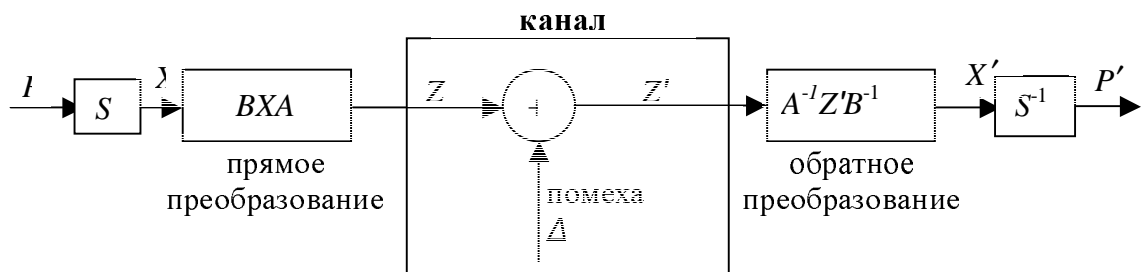


Рис. 3.4. Передача изображений с использованием двустороннего стрип-преобразования

В канал связи передается изображение $Z=BXA$, полученное в результате двустороннего стрип-преобразования исходного изображения P . В канале к нему добавляется импульсная помеха Δ (блочная матрица размера $m \cdot n$), в результате чего на выходе канала имеем изображение $Z'=Z+\Delta$. На приемном конце изображение Z' подвергается обратному двустороннему

преобразованию для получения матрицы результирующего изображения P' . Оно описывается формулой

$$P' = A^{-1}Z'B^{-1} = A^{-1}(Z + \Delta)B^{-1} = A^{-1}ZB^{-1} + A^{-1}\Delta B^{-1} = P + A^{-1}\Delta B^{-1}. \quad (3.6)$$

В соответствии с формулой (3.6) получатель увидит исходное изображение P с добавленной к нему в канале помехой, к которой применено обратное двустороннее преобразование.

При использовании данного метода удобно взять матрицы A и B равными, так как это упростит вычисления, а также сэкономит память, если применять метод на практике. Тогда уравнение (3.2) примет вид:

$$Z = AXA, \quad (3.7)$$

где A – ортонормированная матрица.

Уравнение (3.6) упростится:

$$P' = P + A^T \Delta A^T. \quad (3.8)$$

Для дальнейшего упрощения преобразования удобно использовать симметричную матрицу A . В этом случае обратное преобразование совпадет с прямым и исчезнет необходимость отдельно хранить или вычислять обратную матрицу. Помеха на выходе системы будет определяться формулой $\Delta' = A\Delta A$.

В равенствах (3.1)-(3.5) и других формулах этого раздела производится умножение обычных числовых матриц A , B на блочные матрицы X , Y , Z , элементами которых являются фрагменты изображений. При этом используются следующие правила.

1. *Сложение блоков (фрагментов)* Сложение отдельных блоков (фрагментов) матриц изображений производится путем суммирования соответствующих элементов блоков. Эта операция аналогична сложению двух матриц одинакового размера.
2. *Умножение фрагмента на число* Операция производится путем умножения каждого пикселя фрагмента на число. При этом изменяется яркость фрагмента в целом. Операция аналогична умножению матрицы на число.
3. *Умножение блочной матрицы на числовую матрицу* Такое умножение производится аналогично обычному перемножению числовых матриц по правилу "строка на столбец" с учетом использования первых двух операций.

Заметим, что все изложенное выше относилось к случаю черно-белых изображений. Технически такие изображения представляются в виде матрицы, которая состоит из отдельных пикселей (значений яркости). Именно эта матрица и подвергается фрагментации при стрип-преобразовании. В случае цветных изображений ситуация несколько усложняется. Один из стандартных способов представления цветных изображений – использование трехслойной матрицы RGB. Каждый пиксель изображения кодируется значением яркости красного (R), зеленого (G) и синего (B) цветов. В этом случае стрип-преобразованию подвергается отдельно каждый из трех слоев матрицы изображения.

3.2. Выбор оптимальных матриц преобразования

В результате разбиения исходного изображения на фрагменты, показанного на рис. 3.1, получается блочная матрица, содержащая $m \times n$ блоков. Элементы этой матрицы являются прямоугольными и имеют размер $x \cdot y$. Все фрагменты имеют одинаковый размер. В тех случаях, когда число пикселей в строке или столбце матрицы исходного изображения не делится нацело на m или n , необходимо добавить пиксели справа или снизу изображения. Они не должны исказить или излишне контрастировать изображение.

Деление изображения на фрагменты позволяет значительно сократить вычислительные затраты. Чем крупнее фрагменты, тем меньше размер матрицы преобразования A . Размер фрагмента изображения следует выбирать, исходя из ожидаемого размера импульсной помехи, то есть линейных размеров искажаемого участка изображения. Наилучшим вариантом будет выбор

размера фрагмента, равного максимальному размеру помехи. Это позволит наиболее равномерно распределить помеху по изображению на выходе системы. Выбранный размер фрагмента будет определять размеры матрицы преобразования.

Для максимального ослабления амплитуды импульсной помехи надо добиваться равномерного распределения помехи по изображению в результате применения обратного преобразования на приемном конце канала связи. Это позволит восстановить информацию об искаженных или "потерянных" фрагментах. Возникает задача определения вида матрицы преобразования \mathbf{A} , которая обеспечит минимизацию амплитуды помехи в восстановленном изображении.

В случае одностороннего стрип-преобразования уровень помехи Δ' в восстановленном изображении определяется формулой (3.5). Если матрица \mathbf{A} симметрична и ортогональна, то получаем равенство

$$\Delta' = A\Delta. \quad (3.9)$$

Аналогичное равенство для двустороннего преобразования получается из формулы (3.8) и имеет вид

$$\Delta' = A\Delta A. \quad (3.10)$$

Предположим, что помеха, действующая в канале связи, искажает только один фрагмент изображения (однократная импульсная помеха). Это означает, что только одна из компонент блочного вектора Δ в равенстве (3.9) или блочной матрицы Δ в равенстве (3.10) может быть отлична от нуля.

В обоих случаях уровень помехи Δ' в восстановленном сигнале будет определяться величиной максимального по модулю элемента ортогональной матрицы \mathbf{A} . Действительно, если в равенстве (3.9) принять, например, $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = \dots = \Delta_N = 0$, то получим $\Delta' = A_1$, где A_1 – первый столбец матрицы \mathbf{A} . Следовательно, амплитуда помехи Δ' будет равна максимальному по модулю элементу первого столбца матрицы \mathbf{A} (а в общем случае – всей матрицы \mathbf{A}).

Аналогично, принимая в равенстве (3.10), например, $\Delta_{11} = 1$, и полагая все остальные $\Delta_{ij} = 0$, получим

$$\Delta' = A_1 \cdot A_1^T = [a_{1i} \cdot a_{1j}]_1^n.$$

В частности, для $n=3$ имеем:

$$\Delta' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix} [a_{11} a_{12} a_{13}]$$

Поэтому максимальный элемент матрицы Δ' будет равен a_M^2 , где a_M – максимальный по модулю элемент первого столбца матрицы \mathbf{A} . При произвольном положении ненулевого элемента в матрице Δ получаем, что a_M – максимальный по модулю элемент матрицы \mathbf{A} .

Поскольку преследуемая цель – предельно ослабить амплитуду помехи, то в обоих случаях приходим к задаче поиска в классе ортогональных матриц той матрицы, у которой максимальный по модулю элемент минимален. Хорошо известное решение этой задачи относится к случаям n , кратных четырем – это нормированные матрицы Адамара. Менее известно решение для четных n , не кратных четырем – это так называемые С-матрицы. Они имеют нулевую диагональ, а их остальные элементы равны ± 1 .

Матрицы Адамара идеально равномерно распределяют однократную импульсную помеху по всей площади изображения, уменьшая ее амплитуду в n раз (при $m \neq n$ – в \sqrt{mn} раз). Лишь немногим уступают им С-матрицы, обеспечивающие ослабление помехи в $n-1$ раз. Для нечетных n общее решение задачи авторам неизвестно. В результате длительных поисков удалось лишь найти оптимальные в указанном смысле ортогональные матрицы для $n=3, 5, 7, 9, 11$. Более

подробная информация об этих и других матрицах, близких к матрицам Адамара, содержится в Приложении, здесь же ограничимся рассмотрением случая $n=3$, когда задача допускает наглядную геометрическую интерпретацию.

Временно снимем требование нормированности столбцов матрицы A и будем искать матрицу третьего порядка с попарно ортогональными столбцами A_1, A_2, A_3 , элементы которых не превышают по модулю единицы [84, 85]:

$$|a_{ij}| \leq 1, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (A_i, A_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Геометрически это означает, что мы хотим поместить внутрь куба с ребром 2 ортогональный трехмерный крест ("противотанковый еж") максимального размера (рис. 3.5).

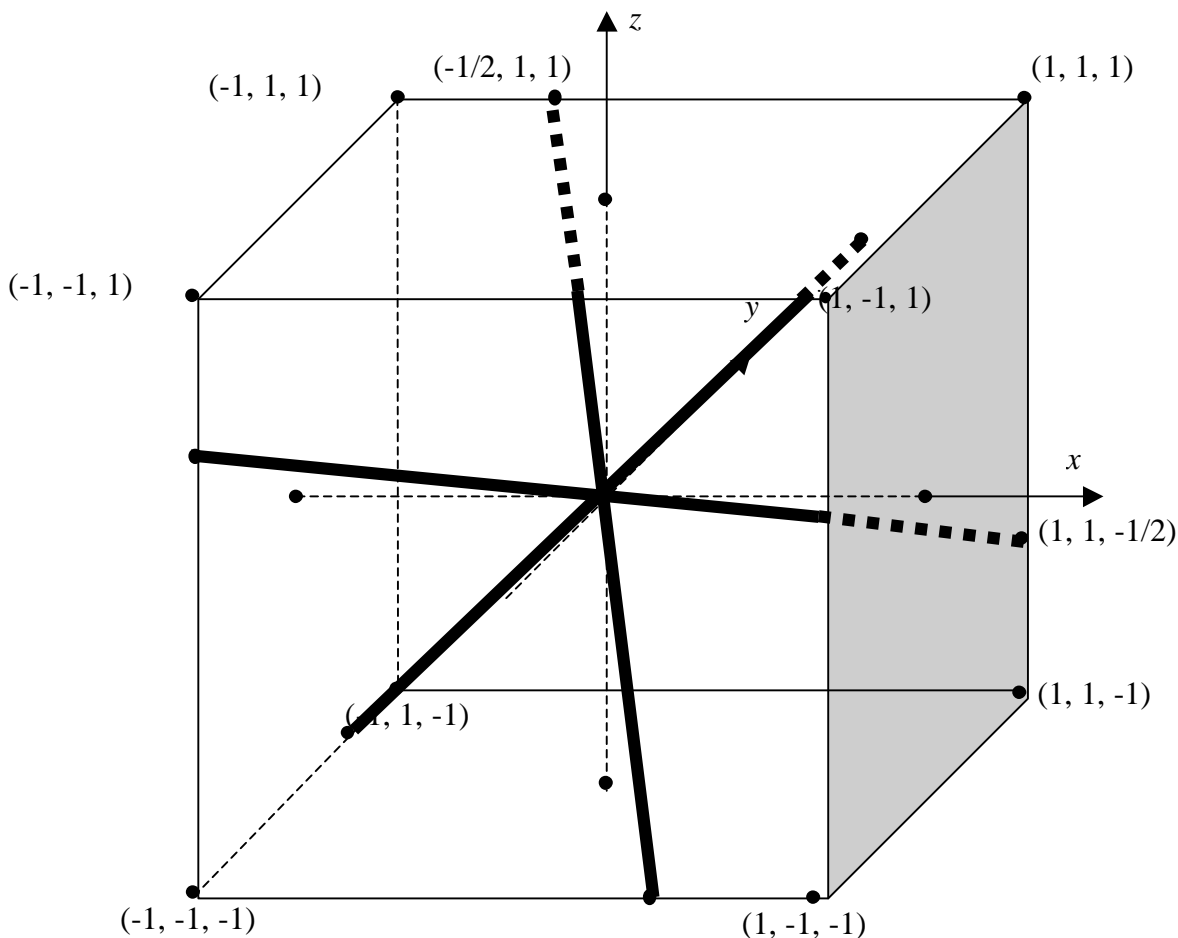


Рис. 3.5. Ортогональный трехмерный крест, вписанный в куб

При этом центры куба и креста находятся в начале координат и допускается пространственное вращение креста, как единого целого. Тогда полуоси креста выступают в качестве векторов-столбцов матрицы A_i , а элементами матрицы A служат декартовы координаты их концов.

Если крест ориентировать по осям координат, то получим единичную матрицу – это наихудший вариант с точки зрения распределения помехи по изображению. Кажется привлекательным ориентировать крест по трем диагоналям куба, но при этом нарушится условие ортогональности (угол между диагоналями куба равен $\arccos \frac{1}{3}$, что составляет около 70°).

Оптимальным оказывается промежуточный вариант, приводящий к итоговой матрице

$$A = \begin{bmatrix} -0,5 & 1 & 1 \\ 1 & -0,5 & 1 \\ 1 & 1 & -0,5 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Именно она является ближайшим аналогом матрицы Адамара при $n=3$.

Таким образом, даже в простейшем случае поиск оптимальной матрицы вызывает определенные трудности. Учитывая приведенную геометрическую интерпретацию и ее аналогию с известным мифом о Прокрусте, многомерный вариант этой задачи может быть назван ортогональной задачей Прокруста. В теории матриц под таким названием известна похожая задача [51], имеющая некоторое отношение к рассматриваемой.

Следует отметить, что для практических приложений вполне можно ограничиться матрицами Адамара и С-матрицами, разбивая исходное изображение на четное число фрагментов по вертикали и горизонтали. Примеры таких разбиений приводятся в следующем разделе.

3.3. Примеры стрип-преобразования изображений

Поясним принцип стрип-преобразования изображений конкретными примерами, выполненными с использованием тулбокса Image Processing пакета MATLAB [57, 121].

Пример 3.1. Правостороннее матричное преобразование, $n=4$.

Возьмем в качестве исходного изображения P фотографию планеты Сатурн (рис. 3.6).

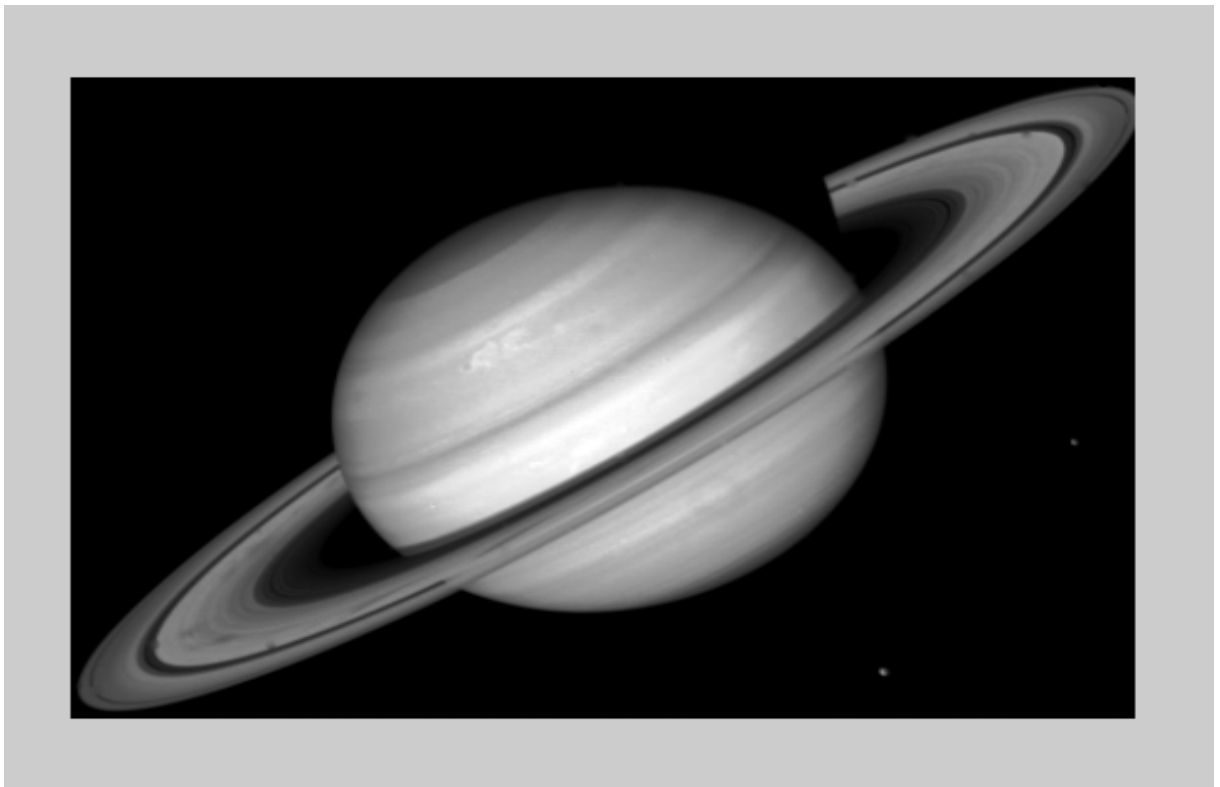


Рис. 3.6. Исходное изображение Сатурна

Поделим эту фотографию на 4 вертикальные полосы. Если количество пикселей в изображении по горизонтали равняется 256, то при таком разбиении ширина каждой полосы будет по $256/4 = 64$ пикселя. Воспользуемся третьим из вариантов стрип-преобразования, представленных на рис. 3.2, получая преобразованное изображение по формуле $Z=XA$. В качестве матрицы A возьмем матрицу Адамара четвертого порядка:

$$[Z_1 \ Z_2 \ Z_3 \ Z_4] = \frac{1}{2} [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

где Z_i – вертикальные полосы преобразованного изображения; X_i – вертикальные полосы исходного изображения;

Преобразованное изображение представлено на рис. 3.7. Оно мало напоминает исходное изображение, хотя его вертикальные полосы представляют собой линейные комбинации полосок исходного изображения.



Рис. 3.7. Изображение Сатурна после правостороннего преобразования

При передаче к изображению Z была добавлена помеха в виде белого квадрата размером 40x50 пикселей. Для восстановления изображения было осуществлено обратное преобразование, его результат показан на рис. 3.8.

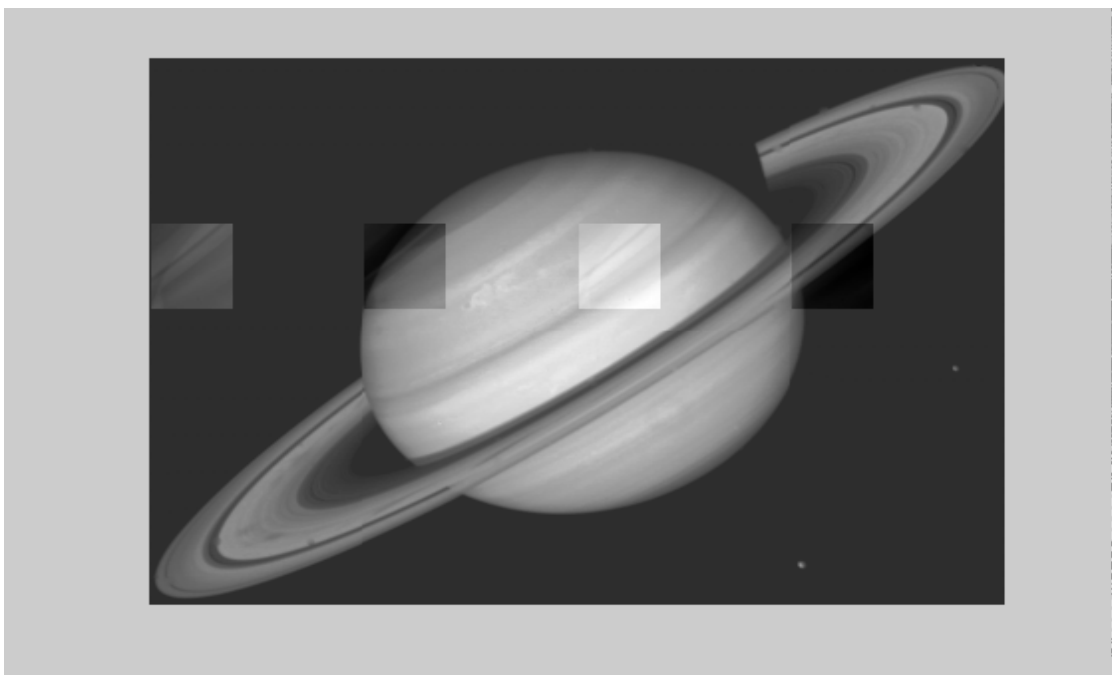


Рис. 3.8. Восстановленное изображение

Как видно, помеха распространилась ("размазалась") по изображению, что привело к ослаблению ее амплитуды в два раза. Однако "размазывание" помехи произошло лишь по горизонтали.

Для того, чтобы помеха равномерно распространилась по всему изображению, надо использовать двустороннее стрип-преобразование.

Пример 3.2. Двустороннее матричное преобразование, $n=4$.

Разобьем теперь фотографию Сатурна (рис. 3.6) на 4 части по вертикали и на 4 – по горизонтали. Полученную блочную матрицу X , содержащую 16 фрагментов, подвергнем двустороннему стрип-преобразованию с помощью той же матрицы Адамара четвертого порядка:

$$Z = \frac{1}{4} AXA. \quad (3.12)$$

Передаваемое изображение Z показано на рис. 3.9.

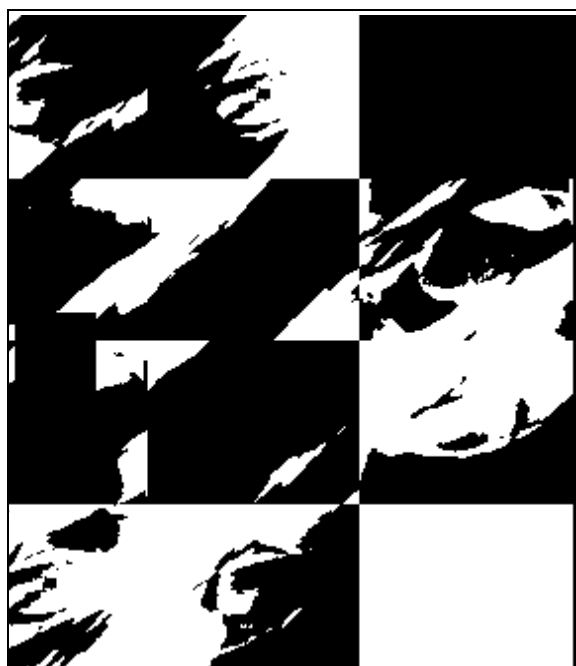


Рис. 3.9. Изображение Сатурна после двустороннего стрип-преобразования

Каждый из 16 фрагментов передаваемого изображения Z (рис. 3.9) несет информацию о всех 16 фрагментах исходной фотографии. При передаче к этому изображению была добавлена та же помеха (в виде белого квадрата 40x50 пикселей), что и в примере 3.1. При восстановлении изображения по формуле $X' = AZ'A/4$ помеха равномерно распространилась по всему рисунку и стала малозаметной. Об этом можно судить по увеличенной части восстановленного изображения (рис. 3.10), на которой еле видны слабые контуры "квадратика" помехи в каждом из 16 фрагментов изображения.

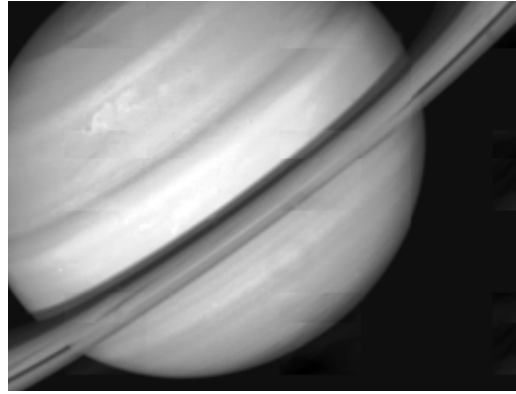
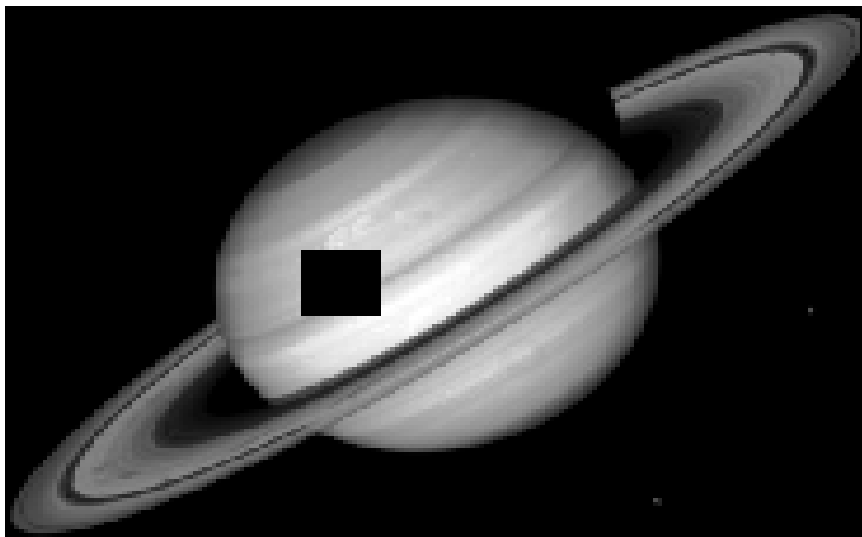
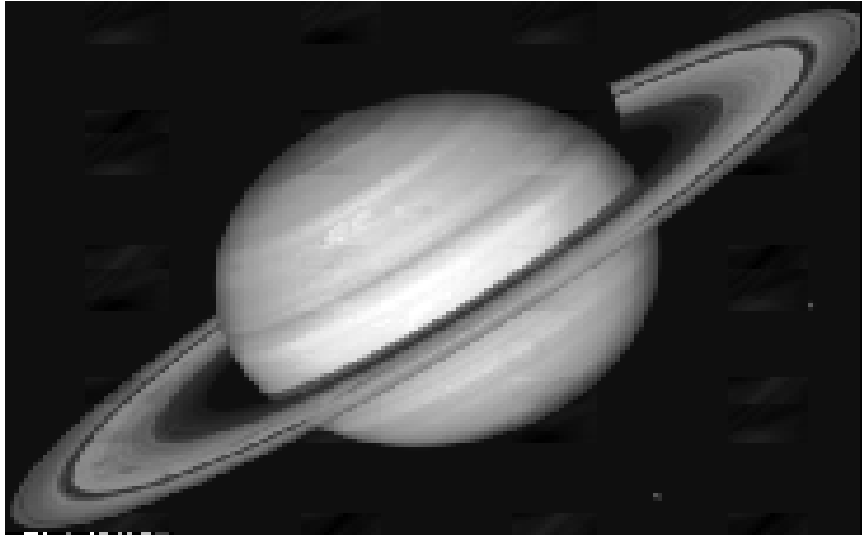


Рис. 3.10. Увеличенная часть восстановленного изображения

За счет того, что помеха равномерно распределена по всем 16 фрагментам изображения, ее амплитуда уменьшилась в 4 раза.

На рис. 3.11,а показано восстановленное изображение Сатурна; на рис. 3.11,б – как бы оно выглядело без использования стрип-метода.

а)



б)

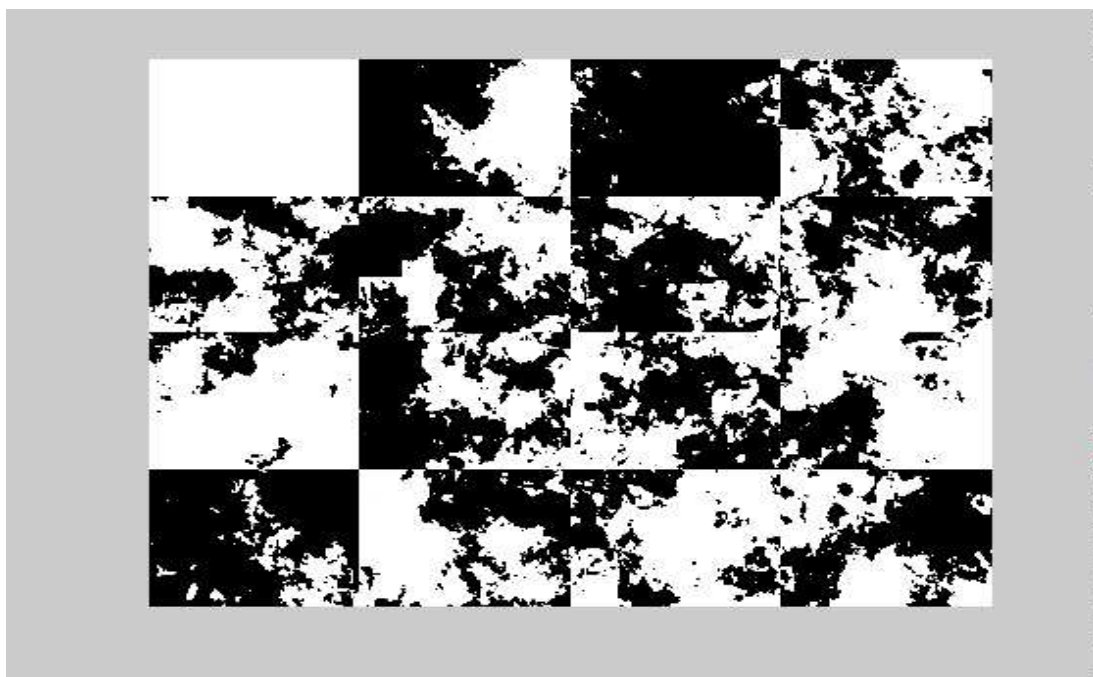
Рис. 3.11. Принятое изображение Сатурна: а - с использованием стрип-метода (помеха почти не видна); б - без использования стрип-метода (помеха видна отчетливо)

Пример 3.3. Двустороннее матричное преобразование, $n=4$.

Возьмем в качестве исходного изображения черно-белую фотографию букета цветов (рис. 3.12,а). Разбив его на $4 \times 4 = 16$ участков, выполним двустороннее стрип-преобразование (3.12) с матрицей Адамара четвертого порядка. Полученное изображение показано на рис. 3.12,б.



а)



б)

Рис. 3.12. Изображение букета цветов: а – исходное; б) результат его двустороннего преобразования матрицей Адамара 4-го порядка

Добавим к нему однократную помеху в виде черного прямоугольника размеров 30x30 пикселей (она расположена во втором диагональном фрагменте на рис. 3.12,б). После обратного преобразования эта помеха равномерно распределилась по всем фрагментам рисунка и почти не видна на восстановленном изображении (рис. 3.13,а). На рис. 3.13,б показано, как выглядело бы изображение на приемном конце без использования стрип-метода при наличии той же помехи.

а)



б)

Рис.3.13. Принятое изображение букета с использованием стрип-метода (а) и без него (б)

Пример 3.4. Одностороннее стрип-преобразование, $N=64$.

Рассмотрим черно-белое изображение, приведенное на рис. 3.14. Разобьем его на $8 \times 8 = 64$ фрагмента (формат шахматной доски) и сформируем из них вектор X размера 64×1 . Выполним одностороннее стрип-преобразование по формуле (3.1) с нормированной матрицей Адамара 64-го порядка (рис. 3.15). При передаче этого изображения по каналу связи к нему была добавлена импульсная помеха, полностью искажившая левый верхний фрагмент изображения (рис. 3.16).



Рис. 3.14. Исходное изображение

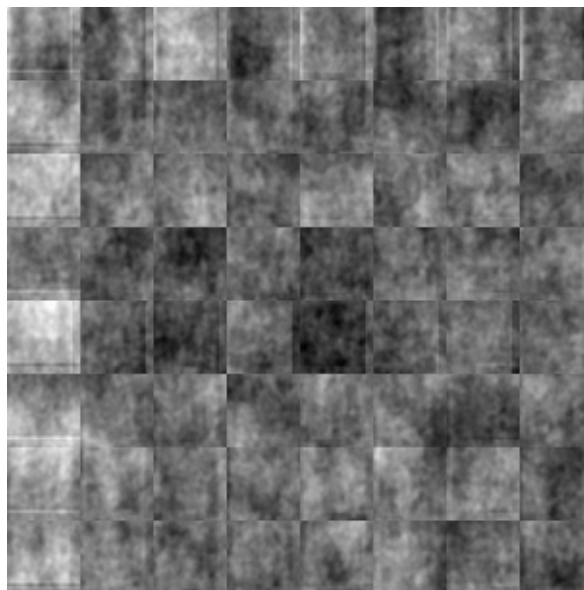


Рис. 3.15. Изображение после стрип-преобразования

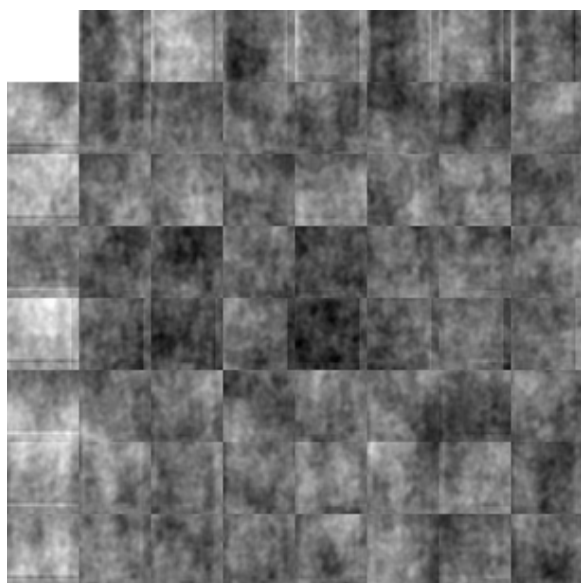


Рис. 3.16. Изображение с помехой



Рис. 3.17. Восстановленное изображение

На приемном конце в результате обратного преобразования с матрицей Адамара 64-го порядка помеха равномерно распределилась по всему изображению. Восстановленное изображение показано на рис. 3.17. Оно несколько хуже по качеству, чем исходное, но представляет собой целостную картину без пропажи отдельных фрагментов.

Пример 3.5. Двустороннее стрип-преобразование, $N=144$, двукратная помеха.

Возьмем то же исходное изображение (см. рис. 3.14) и выполним его двустороннее преобразование (3.7) с ортонормированной матрицей Адамара 12-го порядка. Пусть во время передачи по каналу связи к нему добавляется двукратная импульсная помеха, в результате

которой пропадают два фрагмента передаваемого изображения (два квадратика черного цвета на рис. 3.18).

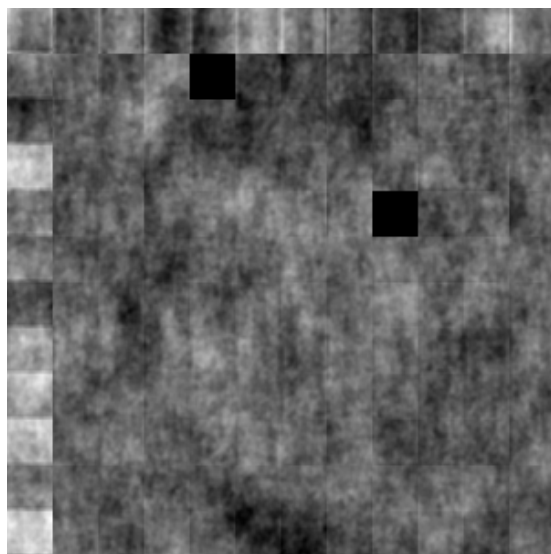


Рис. 3.18. Изображение с двукратной помехой



Рис. 3.19. Восстановленное изображение

На приемном конце производится обратное преобразование изображения с матрицей Адамара 12-го порядка, благодаря чему помеха распределяется по всему изображению. Восстановленное изображение показано на рис. 3.19; в нем нет пропавших фрагментов. Для улучшения его качества можно применить сглаживающие методы – например медианную фильтрацию.

Приведенные примеры показывают, что стрип-метод передачи изображений достаточно эффективен в условиях импульсных помех даже при не очень больших значениях n .

3.4. Определение критической кратности помех

Будем оценивать эффективность стрип-метода при передаче изображений коэффициентом ослабления амплитуды помехи. Как уже отмечалось, максимальное ослабление однократных помех обеспечивается при использовании матриц Адамара. Если исходное изображение разбивается на n^2 фрагментов, то при двустороннем стрип-преобразовании помеха на выходе определяется формулой $\Delta' = A\Delta A$. Если A – нормированная матрица Адамара порядка n , то однократная импульсная помеха Δ_1 равномерно распределится по всей площади изображения, что гарантирует уменьшение ее амплитуды в n раз:

$$J = \max_{\Delta \in \Delta_1} \frac{\|\Delta'\|}{\|\Delta\|} = \frac{1}{n}.$$

Здесь через Δ_1 обозначено множество помех, искажающих только один из n^2 фрагментов передаваемого изображения (однократные импульсные помехи), а в качестве нормы используется, как и в главе 2, амплитуда помехи (чебышевская норма).

Очевидно, что при увеличении кратности помех эффективность стрип-метода будет падать и при некоторой кратности r коэффициент J достигнет значения единицы или превысит его. Назовем минимальное значение r , при котором это произойдет, критической кратностью помех, а стрип-преобразование, при котором $J \geq 1$ – неэффективным.

Пример 3.6. Рассмотрим низкочастотную помеху в виде серого фона $\Delta = const$ (рис. 3.20,а), добавляемого в канале связи к передаваемому сообщению. В данном примере был взят фон с яркостью, равной 125 [в пакете MATLAB действует шкала оттенков серого от 0 (черный) до 255 (белый)].

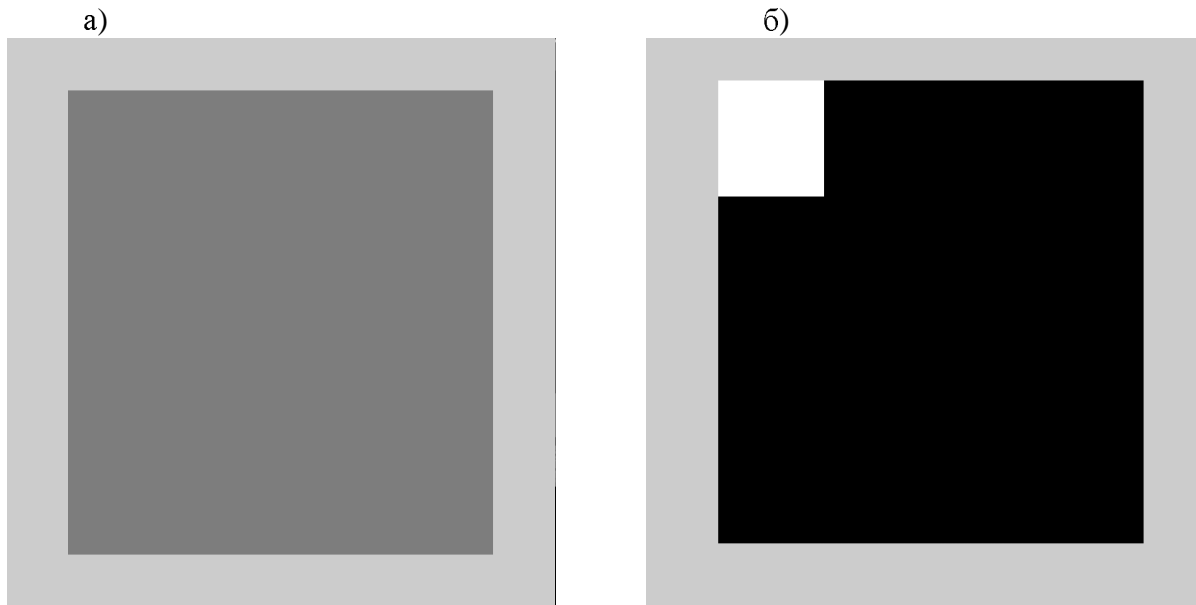


Рис. 3.20. Помеха в виде серого фона (а) и ее стрип-преобразование (б)

Эта помеха имеет максимально возможную кратность $r = n^2$. Результат ее двустороннего стрип-преобразования по формуле (3.10) с помощью матрицы Адамара 4-го порядка показан на рис. 3.20,б. Видно, что преобразованная помеха Δ' равна нулю везде, кроме одного фрагмента (белый квадратик слева вверху). Таким образом, низкочастотная помеха Δ превратилась в импульсную помеху Δ' , причем ее амплитуда возросла. Очевидно, что стрип-преобразование помех такого рода неэффективно.

Поэтому так же, как и в одномерном случае, возникает задача определения критической кратности помех. Приведем ее решение для случая двустороннего стрип-преобразования $Z=AXA$, полагая, что A – нормализованная симметричная матрица Адамара порядка n .

Пусть $\Delta \in \Delta_k$, где Δ_k – множество всех k -кратных помех. Рассмотрим случай $k \leq n$ (число искаженных фрагментов изображения не превышает числа фрагментов в одной его строке). Такой помехе будет отвечать матрица Δ , содержащая k ненулевых элементов; обозначим их через x_1, x_2, \dots, x_k . В результате умножения $\Delta' = A\Delta A$ получим матрицу Δ' с элементами вида

$$\Delta'_{ij} = (\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_k) \cdot \frac{1}{n}.$$

Пусть максимальная из величин $|x_i|$ равна единице, тогда все элементы матрицы Δ' не будут превышать единицы по абсолютной величине. Максимально возможное значение Δ'_{ij} достигается при $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 1$ и равно k/n . Таким образом, для коэффициента ослабления помех имеем $J = k/n$. При $k = n$ он становится равным единице, следовательно критическая кратность помех при двустороннем преобразовании равна n .

Пример 3.7. Рассмотрим четырехкратную помеху вида:

$$\Delta = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix},$$

где $|x_i| \leq 1$.

В результате двустороннего преобразования с матрицей Адамара 4-го порядка получим матрицу Δ' :

$$\Delta' = A \cdot \Delta \cdot A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Максимально возможная амплитуда помехи после преобразования

$$M = \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} (|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|) / 4.$$

Очевидно, что правая сторона этого равенства принимает максимальное значение, равное 1, при $|x_1|=|x_2|=|x_3|=|x_4|=1$. Это означает, что если амплитуды частот помехи равны, то ослабления помехи не произойдет.

Рассматривая аналогичным образом одностороннее стрип-преобразование с матрицей Адамара порядка $N=n^2$ убеждаемся, что и в этом случае критическая кратность помехи равна n (корню квадратному из размера матрицы Адамара).

Если же одностороннее или двустороннее преобразование выполняется не с помощью матрицы Адамара, а с любой другой, критическая кратность помехи уменьшается.

Пример 3.8. Определим критическую кратность помехи для двустороннего преобразования с ортонормированной C -матрицей 6-го порядка:

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим пятикратную помеху вида:

$$\Delta = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

где $|x_i| \leq 1$.

Максимально возможная амплитуда после преобразования будет определяться по формуле:

$$M = \max_{x_1, \dots, x_5} (|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5|) / 5.$$

Правая часть достигает максимума $M=1$ при $|x_1|=|x_2|=|x_3|=|x_4|=|x_5|=1$. В этом случае ослабления помехи после преобразования не произойдет. В то же время для четырехкратной помехи M будет меньше единицы при любых x_1, x_2, x_3, x_4 . Поэтому, критическая кратность помехи равна пяти.

Таким образом, для стрип-преобразований с C -матрицами критическая кратность помехи равна $n-1$, где n – порядок C -матрицы. Это на единицу ниже, чем для преобразования с матрицами Адамара.

3.5. Корневые изображения двустороннего стрип-преобразования

Пусть исходное изображение X разбито на $n \times n$ одинаковых участков. Выполним его двустороннее стрип-преобразование в соответствии с формулой

$$Y = AXA, \quad (3.13)$$

где A – ортогональная матрица, например, нормированная матрица Адамара.

Поставим задачу отыскания изображений, которые инвариантны по отношению к преобразованию (3.13), т.е. переводятся им в то же изображение (с точностью до постоянного множителя):

$$AXA = \lambda X. \quad (3.14)$$

Такие изображения будем называть собственными или корневыми изображениями преобразования (3.13). Отыскание корневых изображений для заданной матрицы A является важной задачей. Если помеха в канале связи совпадает с корневым изображением используемого преобразования, то при обратном преобразовании она останется неизменной, и эффекта "размазывания" помехи по изображению добиться не удастся. При отыскании корневых изображений можно считать, что элементами матрицы X служат не фрагменты исходного изображения, а вещественные числа. Это упрощает исследование и приводит к следующей задаче линейной алгебры.

Задача о корневых матрицах. Для заданной невырожденной квадратной матрицы A найти все матрицы X и числа λ , удовлетворяющие соотношению (3.14).

Такая формулировка напоминает алгебраическую проблему отыскания собственных значений матрицы A , поэтому будем называть пару (λ, X) *корневым числом и корневой матрицей* матрицы A . Дадим решение поставленной задачи для ортогональных матриц A .

Займемся сначала определением корневого числа λ . Перейдем в равенстве (3.14) к определителям:

$$|A| \cdot |X| \cdot |A| = \lambda^n |X| \Rightarrow \lambda^n = |A|^2.$$

Если матрица A ортогональна, то $|A| = \pm 1$ и $\lambda^n = 1$. Следовательно, имеем n корневых чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, равных корням из 1. Все они расположены на единичной окружности в комплексной плоскости. Среди них только два вещественных: $\lambda = 1$ (изображение не меняется) и $\lambda = -1$ (изображение заменяется негативом). Других вещественных корней не существует.

Более того, если матрица A ортогональна и симметрична (а дальше мы будем рассматривать именно такие матрицы), то значениями $\lambda = \pm 1$ исчерпывается все множество корневых чисел. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 4. Минимальный полином ортогональной симметричной матрицы $A \neq \pm E$, независимо от ее размера, имеет вид $\lambda^2 - 1$.

Для доказательства достаточно заметить, что все собственные числа ортогональной матрицы лежат на единичной окружности, а все собственные числа симметричной матрицы вещественны. Вместе эти условия означают, что часть собственных чисел матрицы A равны 1, а остальные равны -1 . Поскольку симметричные матрицы диагонализуемы, то минимальный полином равен $(\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Исключения составляют единичная матрица E (у нее все собственные числа равны 1) и матрица $-E$ (у нее все собственные числа равны -1). Минимальные полиномы этих двух матриц равны $\lambda - 1$ и $\lambda + 1$ соответственно.

Добавим, что у симметричных матриц Адамара количество положительных и отрицательных собственных чисел одинаково и равно $n/2$. Соответствующие им собственные векторы образуют два ортогонально дополнительных подпространства размерности $n/2$ каждое.

Перейдем к отысканию корневых матриц преобразования (3.13). Из доказанного выше следует, что достаточно рассмотреть два случая, вытекающих из соотношения (3.14) при $\lambda = +1$ и $\lambda = -1$:

$$AXA = X, \quad AXA = -X.$$

Остановимся на каждом из них, начав с позитивных корневых матриц.

Случай $\lambda = 1$. Если матрица A ортонормальна и симметрична, то $A^{-1} = A$ и соотношение (3.2) примет вид $AX=XA$. Это означает, что матрицы A и X коммутативны. Отсюда следует, что их собственные векторы совпадают, а матрица X может быть представлена в виде полинома от матрицы A :

$$X = c_1 E + c_2 A + c_3 A^2 + \dots + c_m A^{m-1}, \quad (3.15)$$

где c_i – произвольные вещественные числа, m – порядок минимального полинома матрицы A .

Согласно *теореме 4* для ортогональных симметричных матриц $m=2$, поэтому для них формула (3.15) принимает вид

$$X = c_1 E + c_2 A. \quad (3.16)$$

Соответствующие корневые матрицы представляют собой линейную комбинацию единичной матрицы и матрицы A .

Пример 3.9. Пусть A – матрица Адамара порядка 4. Тогда в соответствии с формулой (3.16) имеем:

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = c_2 \begin{bmatrix} c & 1 & 1 & 1 \\ 1 & c & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & c \end{bmatrix}, \quad c = \frac{c_1 - c_2}{c_2}.$$

Для другого варианта матрицы Адамара четвертого порядка получаем:

$$X = c_1 E + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & c_2 & c_2 & c_2 \\ c_2 & c_1 + c_2 & -c_2 & -c_2 \\ c_2 & -c_2 & c_1 - c_2 & -c_2 \\ c_2 & -c_2 & c_2 & c_1 - c_2 \end{bmatrix}.$$

Обе формулы описывают двухпараметрическое множество корневых матриц, инвариантных по отношению к преобразованию (3.13).

Приведем еще два примера сигналов и помех, которые инвариантны к двустороннему стрип-преобразованию.

Пример 3.10. На рис. 3.21, слева, показана "диагональная" помеха, искажающая диагональные блоки изображения, передаваемого по каналу связи. Ей соответствует единичная матрица 16-го порядка. После двустороннего преобразования помехи на приемном конце получим ту же помеху (рис. 3.21, справа).

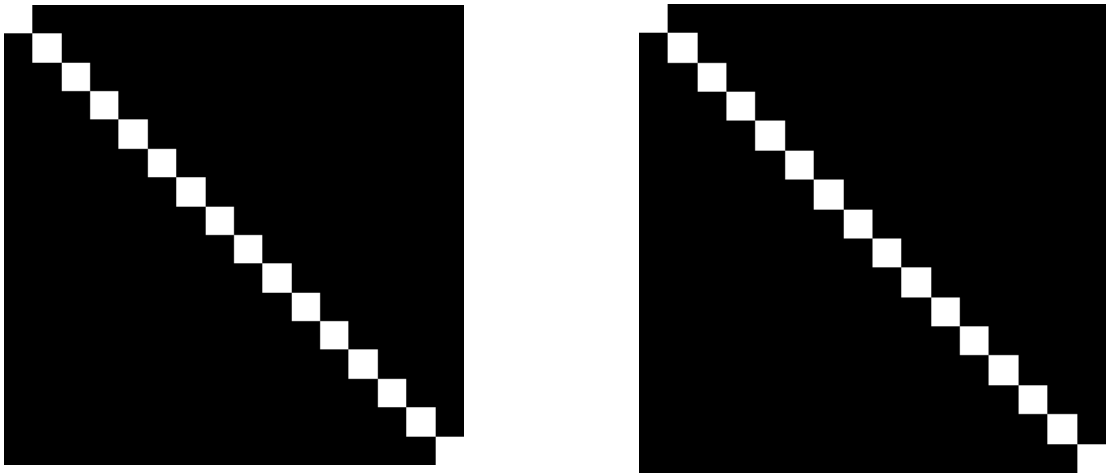


Рис. 3.21. "Диагональная" помеха и результат ее преобразования

Пример 3.11. На рис. 3.22 показано изображение, структура которого соответствует матрице Адамара восьмого порядка

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

а также результат его двустороннего стрип-преобразования с помощью этой матрицы.

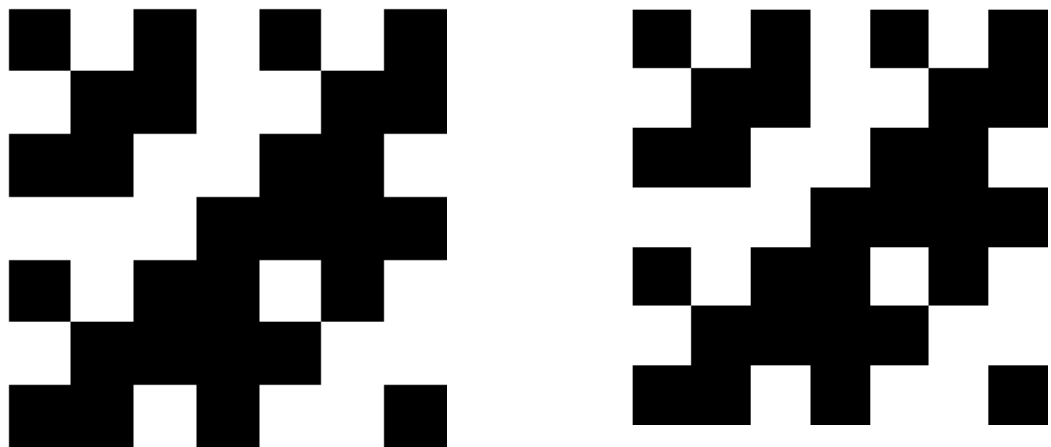


Рис. 3.22. Пример корневой помехи для $n=8$

Видно, что после преобразования изображение не изменилось, т.е. оно является корневым. Формула (3.16) описывает лишь часть корневых матриц. Это видно из следующего примера, в котором приводится корневая матрица X , не являющаяся линейной комбинацией единичной матрицы и матрицы A .

Пример 3.12. Возьмем матрицу X вида:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и преобразуем ее с помощью матрицы Адамара четвертого порядка $Y=AXA/4$:

$$Y = AXA/4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

После преобразования получаем ту же матрицу, т.е. X – это корневая матрица с корневым числом $\lambda=1$. Соответствующее корневое изображение, полученное в MATLAB с помощью команды `imagesc(X)`, показано на рис. 3.23.

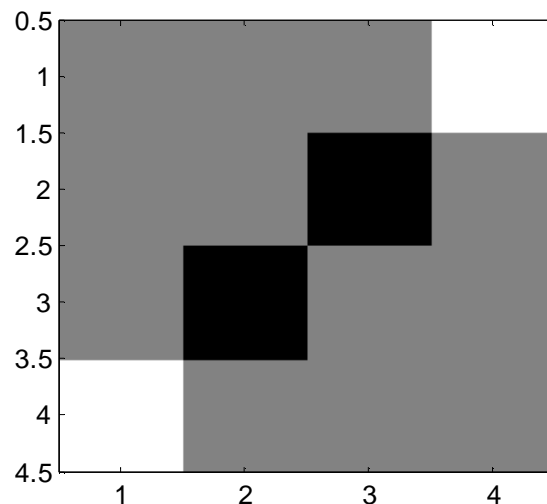


Рис. 3.23. Корневая матрица X , не являющаяся линейной комбинацией матриц A и E (пример 3.12).

Очевидно, что после преобразования помехи на приемном конце получаем ту же помеху.

Этот пример показывает, что формула (3.16) описывает не все решения системы $AX=XA$, а лишь некоторую их часть. Общее решение дается следующей теоремой.

Теорема 5. Пусть A – ортогональная симметричная матрица порядка n , m собственных чисел которой равны 1, и H – ортонормированная матрица ее собственных векторов. Тогда общее решение матричного уравнения $AXA=X$ содержит $m^2 + (n - m)^2$ произвольных постоянных и имеет вид

$$X = H\tilde{X}H^T, \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

где C_1 и C_2 – произвольные квадратные матрицы размеров $m \times m$ и $(n - m) \times (n - m)$ соответственно.

Доказательство. Запишем исходное матричное уравнение в форме $AX=XA$. Это частный случай уравнения Сильвестра [47]. Чтобы найти его общее решение, приведем матрицу A преобразованием подобия к диагональной форме

$$H^T A H = E_0, \quad A = H E_0 H^T, \quad E_0 = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_{n-m} \end{bmatrix},$$

где \mathbf{H} – ортонормальная матрица собственных векторов матрицы \mathbf{A} , \mathbf{E}_m – единичная матрица порядка m .

Это позволяет переписать уравнение $\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{X}\mathbf{A}$ в виде

$$H E_0 H^T X = X H E_0 H^T.$$

Умножая обе части на \mathbf{H}^T слева и на \mathbf{H} справа и обозначая $\tilde{X} = H^T X H$, получаем

$$E_0 \tilde{X} = \tilde{X} E_0. \quad (3.18)$$

Представим матрицу \tilde{X} в блочном виде $\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 & \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 & \tilde{X}_4 \end{bmatrix}$, где размеры диагональных блоков равны m и $n-m$. Выполняя умножение и приравнявая одноименные блоки слева и справа, находим, что $\tilde{X}_2 = 0$, $\tilde{X}_3 = 0$, т.е. $\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{X}_4 \end{bmatrix}$. Возвращаясь к исходному базису и обозначая $C_1 = \tilde{X}_1$, $C_2 = \tilde{X}_4$, получаем соотношения (3.17).

Тем самым найдено множество всех корневых матриц \mathbf{X} , отвечающих корневому числу $\lambda = 1$.

Пример 3.13. Определим корневую матрицу \mathbf{X} для матрицы Адамара 4-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

при заданной матрице \tilde{X} :

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Для нахождения корневой матрицы \mathbf{X} и проверки ее на инвариантность к преобразованию воспользуемся следующей MATLAB-программой:

```
a=hadamard(4); % создаем симметричную матрицу Адамара порядка n = 4
[h,d]=eig(a); % определяем матрицу собственных векторов h матрицы
                Адамара
X1=[2 -3 0 0;1 -4 0 0;0 0 2 0;0 0 1 -2]; %формируем матрицу X1 (это и есть  $\tilde{X}$ )
X=H*X1*H' %определяем корневую матрицу X в соответствии с
           формулой(3.17)
Y=A*X*A/4 % выполняем двустороннее преобразование корневой
           матрицы.
```

В результате получаем следующие матрицы H , X , Y :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} -2.4024 & 0.7559 & 0.0488 & 0.7929 \\ -1.0118 & 0.6583 & -0.6346 & -0.7929 \\ 1.1095 & -3.4630 & -0.7559 & -2.9142 \\ 1.5 & -1.8536 & -1.1464 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -2.4024 & 0.7559 & 0.0488 & 0.7929 \\ -1.0118 & 0.6583 & -0.6346 & -0.7929 \\ 1.1095 & -3.4630 & -0.7559 & -2.9142 \\ 1.5 & -1.8536 & -1.1464 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Корневое изображение, соответствующее матрице X , показано на рис. 3.24. Черному цвету соответствует минимальное значение элементов матрицы X , белому – максимальное.

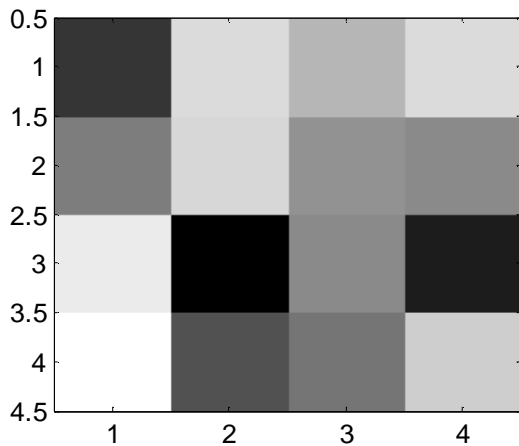


Рис. 3.24. Корневое изображение (пример 3.13)

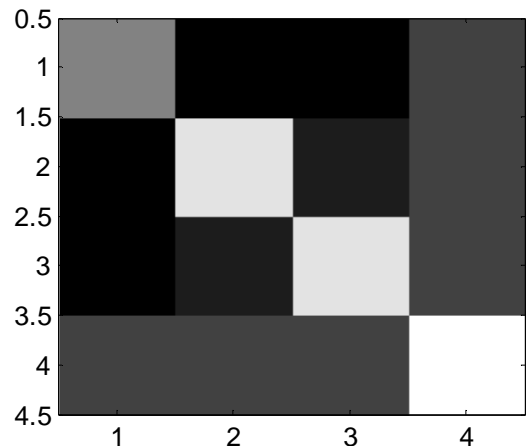


Рис. 3.25. Корневое изображение (пример 3.14)

Пример 3.14. Определим корневую матрицу $X = H\tilde{X}H^T$ для той же матрицы Адамара, выбрав матрицу \tilde{X} вида:

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2.5 & -0.5 & 0 \\ -1 & -0.5 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что матрица X представляет собой корневую матрицу, удовлетворяющую уравнению $AX=XA$. Соответствующее корневое изображение показано на рис. 3.25.

Пример 3.15. Найдем все корневые матрицы для матрицы Адамара 4-го порядка при $\lambda = 1$. Согласно формуле (3.17) матрица \tilde{X} содержит 8 произвольных параметров:

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{bmatrix}.$$

Выполняя в пакете MAPLE преобразование $X = H\tilde{X}H^T$, определяем корневую матрицу X :

$$\begin{aligned}
X = & [3d + e - 2\sqrt{2}g - 2\sqrt{2}f + 8h, 3c\sqrt{2} - 3d - e + 2\sqrt{2}g - \sqrt{2}f + 4h, \\
& -3c\sqrt{2} - 3d - e + 2\sqrt{2}g - \sqrt{2}f + 4h, -3d + 3e - 6\sqrt{2}g] \\
& [3\sqrt{2}b - 3d - e - \sqrt{2}g + 2\sqrt{2}f + 4h, \\
& 6a - 3c\sqrt{2} - 3\sqrt{2}b + 3d + e + \sqrt{2}g + \sqrt{2}f + 2h, \\
& -6a + 3c\sqrt{2} - 3\sqrt{2}b + 3d + e + \sqrt{2}g + \sqrt{2}f + 2h, -3\sqrt{2}b + 3d - 3e - 3\sqrt{2}g] \\
& [-3\sqrt{2}b - 3d - e - \sqrt{2}g + 2\sqrt{2}f + 4h, \\
& -6a - 3c\sqrt{2} + 3\sqrt{2}b + 3d + e + \sqrt{2}g + \sqrt{2}f + 2h, \\
& 6a + 3c\sqrt{2} + 3\sqrt{2}b + 3d + e + \sqrt{2}g + \sqrt{2}f + 2h, 3\sqrt{2}b + 3d - 3e - 3\sqrt{2}g] \\
& [-3d + 3e - 6\sqrt{2}f, -3c\sqrt{2} + 3d - 3e - 3\sqrt{2}f, 3c\sqrt{2} + 3d - 3e - 3\sqrt{2}f, \\
& 3d + 9e]
\end{aligned}$$

Здесь в квадратных скобках стоят строки матрицы X , а отдельные элементы строк разделены запятыми. В частности, взяв $a=1/6$, а остальные семь параметров равными нулю, получим матрицу X с четырьмя ненулевыми элементами, расположенными в ее центре:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Соответствующее корневое изображение приведено на рис.3.26.

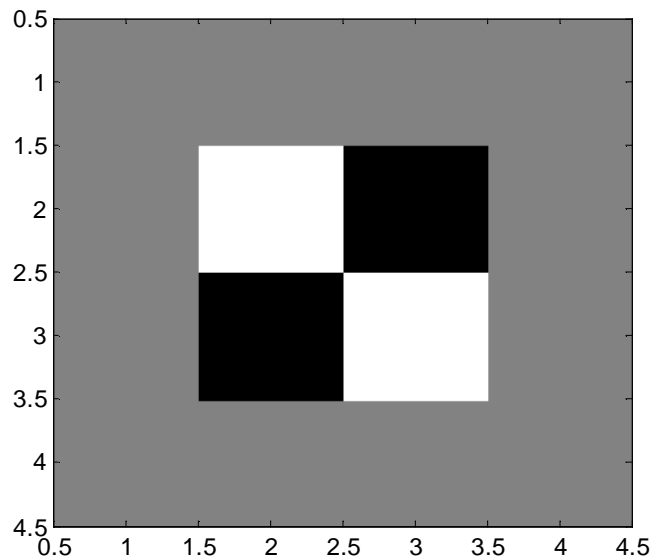


Рис. 3.26. Корневое изображение (пример 3.15)

Перейдем к рассмотрению негативных корневых изображений.

Случай $\lambda = -1$. Все множество корневых изображений в этом случае описывается следующей теоремой.

Теорема 6. Пусть A – ортогональная симметричная матрица порядка n , m собственных чисел которой равны 1, и H – ортонормированная матрица ее собственных векторов. Тогда общее решение матричного уравнения $AHX = -X$ содержит $m^2 + (n - m)^2$ произвольных постоянных и имеет вид

$$X = H\tilde{X}H^T, \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

где C_1 и C_2 – произвольные квадратные матрицы размеров $m \times m$ и $(n - m) \times (n - m)$ соответственно.

Доказательство проводится так же, как и для *теоремы 5*, за исключением того, что в правой части уравнения (3.18) появляется знак минус:

$$E_0\tilde{X} = -\tilde{X}E_0. \quad (3.20)$$

Это приводит к обращению в ноль диагональных блоков матрицы \tilde{X} , которая принимает вид

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получен общий вид матрицы \tilde{X} для случая $\lambda = -1$. Как и в предыдущем случае, она содержит $m^2 + (n - m)^2$ произвольных параметров. Среди возможных вариантов

отметим перестановочную матрицу с единицами на побочной диагонали $\tilde{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Ей

будет отвечать корневая матрица $X = H\tilde{X}H^T = [H_n \dots H_1] \cdot [H_1 \dots H_n]^T$, где H_i – i -й собственный вектор матрицы A .

Пример 3.16. Определим корневую матрицу X для матрицы Адамара 4-го порядка, полагая $\lambda = -1$ и выбрав перестановочную матрицу \tilde{X} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для нахождения матрицы X воспользуемся той же MATLAB-программой, что и ранее. В результате получаем матрицу X , которая масштабированием приводится к целочисленному виду:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Матрица $Y = AXA$ отличается от X только знаком. Соответствующие им изображения (рис. 3.27, а, б) соотносятся, как позитив и негатив.

а)

б)

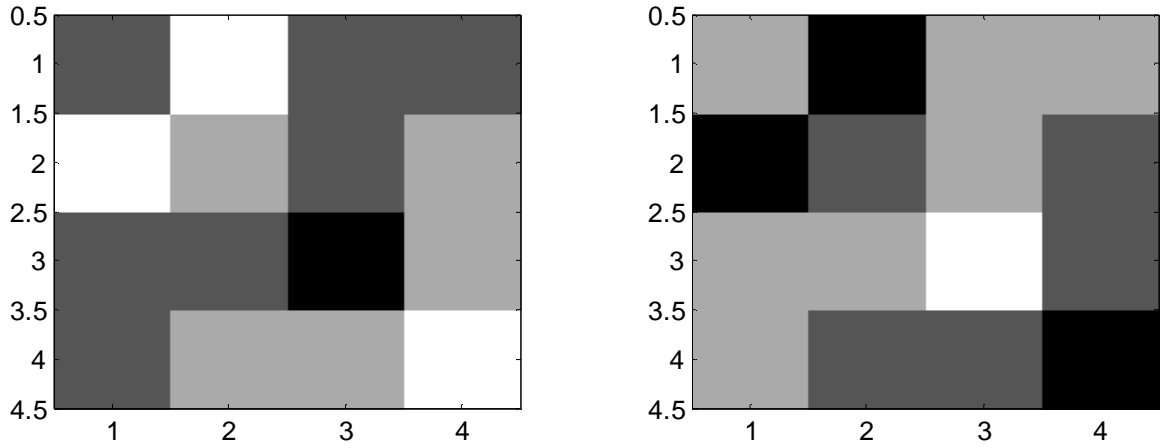


Рис. 3.27. Корневое изображение X (а) и результат его преобразования Y (б) (пример 3.16)

Пример 3.17. Найдем все "негативные" корневые изображения для матрицы Адамара 4-го порядка. Согласно формуле (3.19) матрица \tilde{X} имеет вид:

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ e & f & 0 & 0 \\ g & h & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Она содержит 8 произвольных параметров. Выполняя в пакете MAPLE преобразование $X = H\tilde{X}H^T$, определяем корневую матрицу X :

$X=$

$$\begin{aligned} & [(-2f+4\sqrt{2}h-2c+4\sqrt{2}d)\sqrt{2}, (-2\sqrt{2}e+8g+2f-4\sqrt{2}h+2c+2\sqrt{2}d)\sqrt{2}, \\ & (2\sqrt{2}e-8g+2f-4\sqrt{2}h+2c+2\sqrt{2}d)\sqrt{2}, (2f-4\sqrt{2}h-6c)\sqrt{2}] \\ & [2\sqrt{2}f+4h-4a+2\sqrt{2}c+8\sqrt{2}b-8d, 4e+4\sqrt{2}g-2\sqrt{2}f-4h+4a-2\sqrt{2}c+4\sqrt{2}b-4d, \\ & -4e-4\sqrt{2}g-2\sqrt{2}f-4h+4a-2\sqrt{2}c+4\sqrt{2}b-4d, -2\sqrt{2}f-4h-12a+6\sqrt{2}c] \\ & [2\sqrt{2}f+4h+4a+2\sqrt{2}c-8\sqrt{2}b-8d, 4e+4\sqrt{2}g-2\sqrt{2}f-4h-4a-2\sqrt{2}c-4\sqrt{2}b-4d, \\ & -4e-4\sqrt{2}g-2\sqrt{2}f-4h-4a-2\sqrt{2}c-4\sqrt{2}b-4d, -2\sqrt{2}f-4h+12a+6\sqrt{2}c] \\ & [(-6f+2c-4\sqrt{2}d)\sqrt{2}, (-6\sqrt{2}e+6f-2c-2\sqrt{2}d)\sqrt{2}, (6\sqrt{2}e+6f-2c-2\sqrt{2}d)\sqrt{2}, \\ & (6f+6c)\sqrt{2}] \end{aligned}$$

Правила записи этой матрицы такие же, как и в примере 3.15. Возьмем, например,

$a=1/4$, а остальные семь параметров положим равными нулю. Тогда получим корневую матрицу, у которой первая и последняя строки нулевые:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = -X.$$

Соответствующее корневое изображение приведено на рис. 3.28.

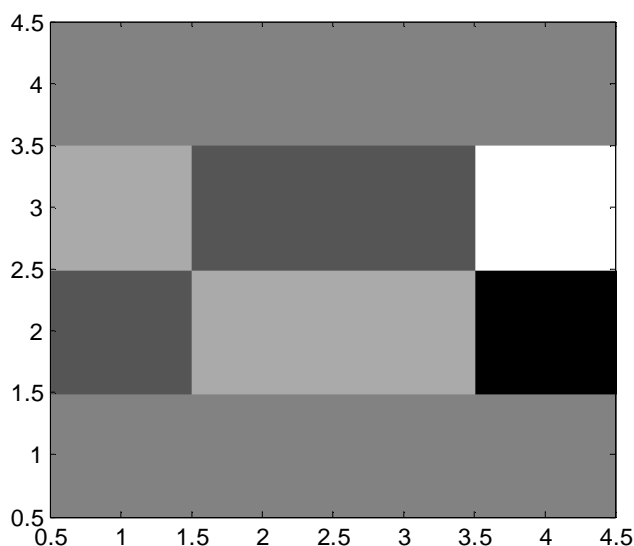


Рис. 3.28. Корневое изображение(пример 3.17)

Таким образом, как "положительные", так и "отрицательные" корневые изображения двустороннего стрип-преобразования с симметричной матрицей Адамара A определяются формулой $X = H\tilde{X}H^T$, где H – ортонормальная матрица собственных векторов матрицы A .

При этом матрица \tilde{X} имеет вид:

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{X}_4 \end{bmatrix}, \text{ если } \lambda = 1; \text{ либо } \tilde{X} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 & 0 \end{bmatrix}, \text{ если } \lambda = -1.$$

В первом случае изображения после преобразования остаются неизменными, а во втором – инвертируются.

Проведенный анализ корневых матриц показывает, что двустороннее стрип-преобразование с симметричной матрицей Адамара обладает большим набором корневых изображений. Это связано с высокой симметрией матриц Адамара, записанных в нормальной форме. В большинстве случаев корневые изображения наследуют эту симметрию.

Для того чтобы уменьшить мощность множества корневых изображений (например, с учетом требований криптографии, стеганографии, защиты информации), следует использовать несимметричные варианты матриц Адамара, а также отказаться от условий $A=B$ и $m=n$, принятых из соображений экономии вычислительных ресурсов.

4. АППАРАТУРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СТРИП - МЕТОДА

4.1. Реализация стрип-метода с использованием магнитной записи-воспроизведения

Для аппаратурной реализации стрип-метода линейных предсказаний, описанного в п. 1.1, необходимо иметь возможность "разрезать" передаваемый сигнал на участки равной длительности и затем одновременно обрабатывать сигналы со всех этих участков для получения их "взвешенных" линейных комбинаций. Другими словами, аппаратура должна позволять задерживать аналоговый электрический сигнал и снимать его с отводов линии задержки. Такая же задача характерна для устройств ввода аналоговых данных в корреляционные анализаторы. Следует отметить, что задержка аналогового сигнала на время, большее единиц миллисекунд, технически реализуется наиболее просто с использованием аппаратуры магнитной записи.

С учетом этого был разработан и создан [54, 55, 67, 89-91, 99, 102, 110, 127] прибор для помехоустойчивого хранения информации, содержащий лентопротяжный механизм и блок электроники. Функциональная схема прибора приведена на рис. 4.1.

В состав устройства входит лентопротяжный механизм 1, 4 с двумя трактами магнитного носителя; $2n$ магнитных головок 9; $2n$ сумматоров Σ с n входами каждый; $2n^2$ блоков умножения на постоянные коэффициенты матриц прямого и обратного преобразования 11 и 12, выполненных на резисторах.

Блок лентопротяжного механизма представляет собой устройство для равномерного транспортирования бесконечной петли магнитной ленты относительно семи универсальных магнитных головок, устанавливаемых вдоль измерительных линеек с нониусами и содержит U – образный замкнутый тракт лентопротяжного механизма, устройства натяжения и устранения перекосов магнитной ленты, синхронный гистерезисный электродвигатель и др. Измерительные линейки используются для грубого "выставления" магнитных головок на равные расстояния вдоль кольца магнитной ленты. Точное выставление головок производится с помощью записи и воспроизведения одиночного служебного импульса по вспомогательному каналу и измерения интервалов задержки электронным частотомером, работающим поочередно в режимах измерения периода и временного интервала.

Блок электроники содержит узлы управления и контроля, в том числе усилители записи и воспроизведения, аттенюаторы, сумматоры, генератор служебных меток и др. Он обеспечивает четыре режима работы прибора:

- режим записи сигнала X и служебных меток;
- прямое преобразование (введение линейных предсказаний);
- обратное преобразование (восстановление или "фильтрация");
- визуализация.

В приборе используется прямая запись сигнала с высокочастотным подмагничиванием.

Работа устройства происходит следующим образом. Исходный сигнал $x(t)$ записан на магнитной ленте 6 блока 1. При протяжке ленты он воспроизводится одновременно с помощью n магнитных головок 9, установленных на равных расстояниях друг от друга. Сигналы $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ от этих головок поступают параллельно через блоки умножения 11 на n входов сумматоров Σ . Таким образом, на выходе i -того сумматора 11 получается сигнал $y_i(t)$, который поступает для записи на соответствующую ему по номеру магнитную головку из головок 9 блока 4, установленных на втором тракте магнитной ленты на равных расстояниях друг от друга. При транспортировании магнитных лент 6 в течение времени, равного $\tau = T/n$, на магнитной ленте 6 блока 4 запишется сигнал $y(t)$. Для обратного преобразования используется блок 3, аналогичный блоку 2 с тем отличием, что весовые коэффициенты в блоках умножения 12 являются элементами обратной матрицы A^{-1} .

Описанное техническое решение защищено авторскими свидетельствами на изобретения [89, 92] и внедрено в приборе для помехоустойчивого хранения информации. Основные технические и метрологические характеристики прибора сведены в табл. 4.1.

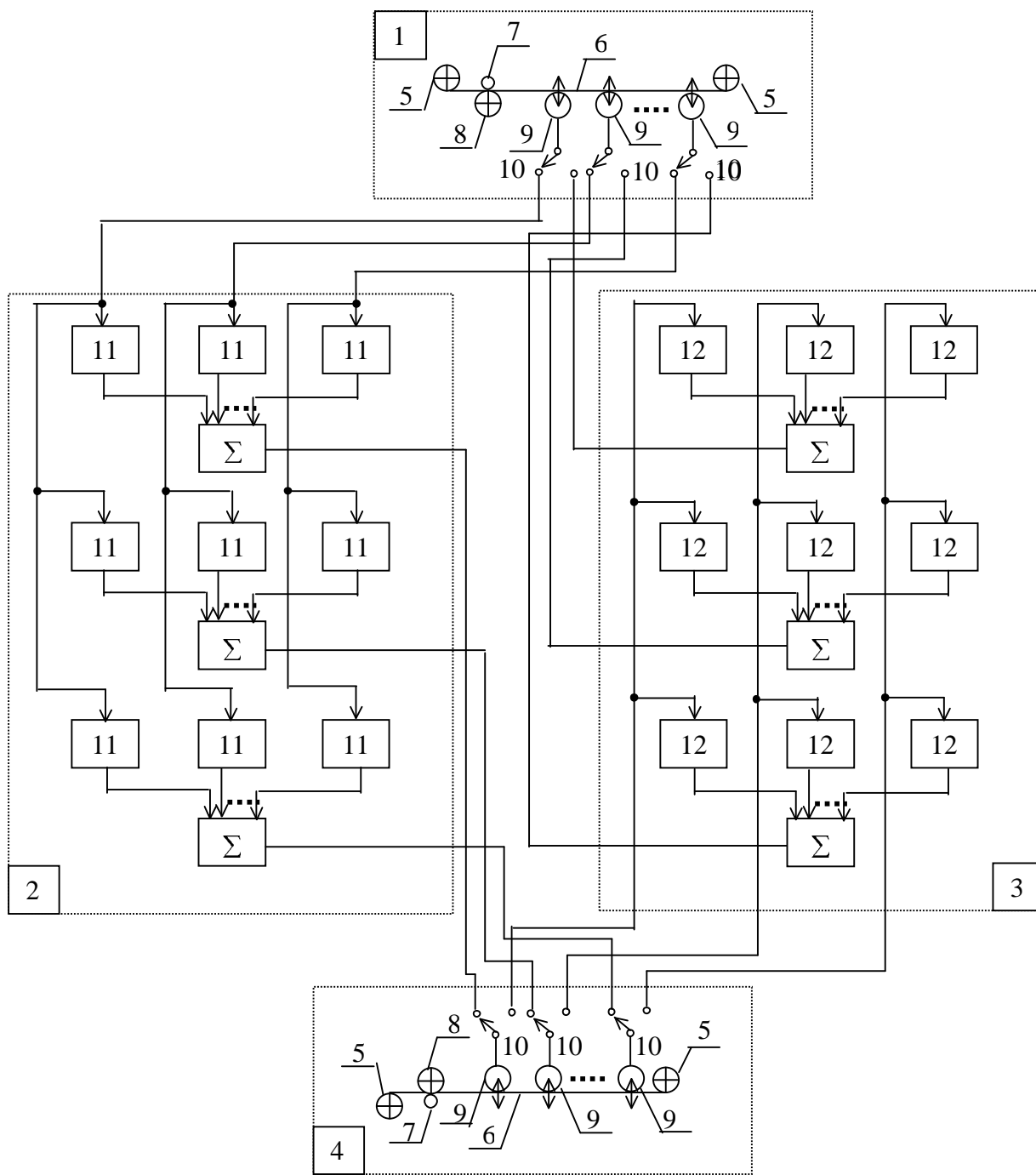


Рис. 4.1. Функциональная схема прибора, реализующего стрип-метод

1, 4 - лентопротяжный механизм блоков записи – воспроизведения; 2, 3 - блоки прямого и обратного линейного преобразования; 5 - кассеты; 6 - магнитная лента; 7 - ведущий вал; 8 - прижимной ролик; 9 - универсальная магнитная головка; 10 - переключатель режима записи – воспроизведения; 11, 12 - блоки умножения на постоянные коэффициенты матриц преобразования; Σ - сумматор.

Технические и метрологические характеристики прибора

| Характеристика | Область значений |
|--|---------------------------|
| Длина кольца магнитной ленты (м) | 3 |
| Скорость транспортирования ленты (мм/с) | 10, 100 |
| Время записи сигнала (с) | 300, 30 |
| Число каналов | 4 |
| Число универсальных магнитных головок | 7 |
| Ширина магнитной ленты типа СД (мм) | 6,25 |
| Порядок матрицы преобразования | до 5 |
| Частотный диапазон сигнала (Гц) | 20 – 10000; 100 – 1000 |
| Амплитудный диапазон сигнала (В) | 3 |
| Входное сопротивление (кОм), не менее | 100 |
| Выходное сопротивление (Ом), не более | 200 |
| Коэффициент колебаний скорости магнитного носителя (%), не более | 1 |
| Предел допускаемой приведенной погрешности преобразования сигнала (%) | 2 |
| Предел допускаемой приведенной погрешности установки интервалов задержки (%) | 0,1 |
| Напряжение питания (В) | 220 ($\pm 10\%$) |
| от сети с частотой (Гц) | 50 |
| Потребляемая мощность (Вт), не более | 35 |
| Габаритные размеры (мм) ЛПМ и БЭ (каждого блока) | 800x400x240 |
| Масса (кг), не более | 26 |
| Время непрерывной работы (ч.), не менее | 8 |

Внешний вид прибора показан на рис. 4.2.

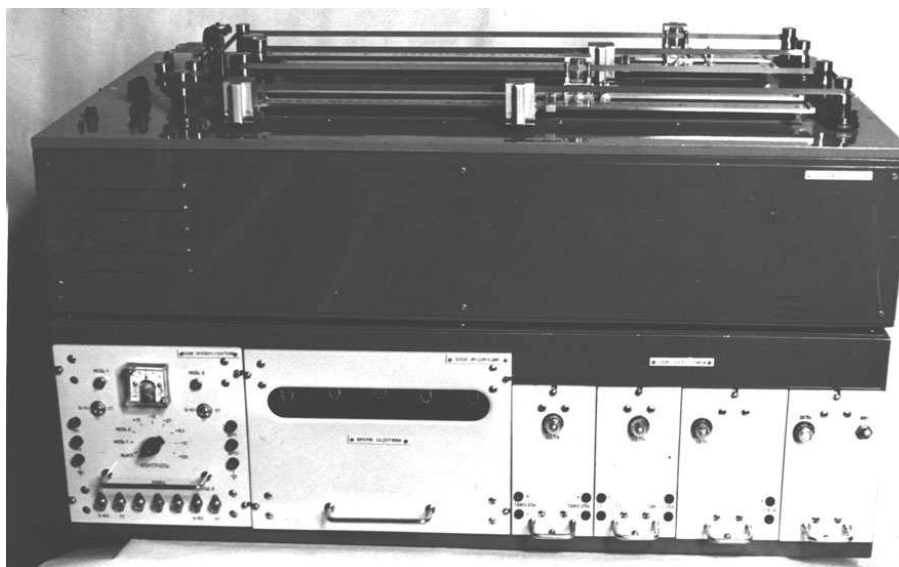


Рис. 2. Внешний вид прибора для помехоустойчивого хранения информации: сверху: лентопротяжный механизм;внизу: блок электроники

Одним из его достоинств является возможность реализации различных матриц прямого и обратного преобразований.

4.2. Реализация стрип-метода с циклической матрицей

Использование циклической матрицы (циркулянты) в качестве матрицы линейного преобразования позволяет существенно упростить техническую реализацию устройства, приведенного на рис. 4.1, уменьшив число необходимых магнитных головок и сумматоров. Функциональная схема такого устройства [92] показана на рис. 4.3.

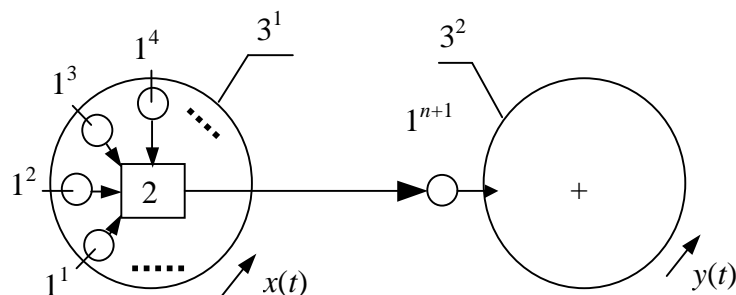


Рис. 4.3. Устройство для стрип-преобразования сигнала с использованием циркулянты:
 1 – магнитная головка; 2 – сумматор с весовыми коэффициентами; 3 – тракт замкнутого кольцевого магнитного носителя.

Устройство состоит из лентопротяжного механизма, в тракт которого заправлено 2 кольца магнитной ленты (или одно кольцо с двумя дорожками), $(n + 1)$ магнитные головки с блоками записи и воспроизведения и сумматора с весовыми коэффициентами его n входов.

Магнитные головки $1^1, \dots, 1^n$ расположены на равных расстояниях вдоль кольца 3^1 . При транспортировании магнитной ленты с записанным на ней сигналом $x(t)$ сигналы с n головок воспроизведения $1^1, \dots, 1^n$ поступают на входы сумматора 2, весовые коэффициенты которого составляют элементы строки используемой циркулянты. Суммарный выходной сигнал $y(t)$ с выхода сумматора 2 подается на магнитную головку записи 1^{n+1} , расположенную на другом кольце магнитной ленты 3^2 (или на другой дорожке того же кольца 3^1). При движении ленты преобразованный сигнал $y(t)$ получается за один оборот кольца. Выполнение условия $x(0) = x(T)$ на практике может быть достигнуто за счет сведения к нулевому или какому-либо постоянному уровню сигнала в начале и в конце записи $x(t)$.

Рассмотренное техническое решение защищено авторским свидетельством на изобретение [92].

Недостатком рассмотренного варианта реализации является то, что с его помощью можно преобразовывать сигнал только конечной длительности T . Этот недостаток устранен в устройстве линейного преобразования сигнала, работающего в двухтактном режиме [93]. Его функциональная схема приведена на рис. 4.4.

Устройство использует циклическую матрицу преобразования (циркулянту) и работает в двухтактном режиме. Оно содержит $(n+3)$ управляемых переключателя 1, синхронизатор 2, две линии задержки 3 и сумматор 4 с весовыми коэффициентами по каждому из n его входов. Синхронизатор управляет работой переключателей 1, перебрасывая их через каждые T секунд. В начальный момент времени исходный сигнал $x(t)$ через переключатели 1^1 и 1^3 поступает на линию задержки 3^2 . Линии задержки 3^1 и 3^2 идентичны и имеют n отводов через равные интервалы времени τ . Таким образом, каждая из них позволяет задержать сигнал $x(t)$ на время T . Линия задержки 3^1 в этот момент времени "закольцована", так как n -ый ее отвод через переключатель 1^2 соединен с ее входом. С отводов линии задержки 3^1 циркулирующий сигнал поступает через переключатели $1^4, \dots, 1^{n+3}$ на сумматор 4 с n входами, весовые коэффициенты которых составляют элементы строки циркулянты.

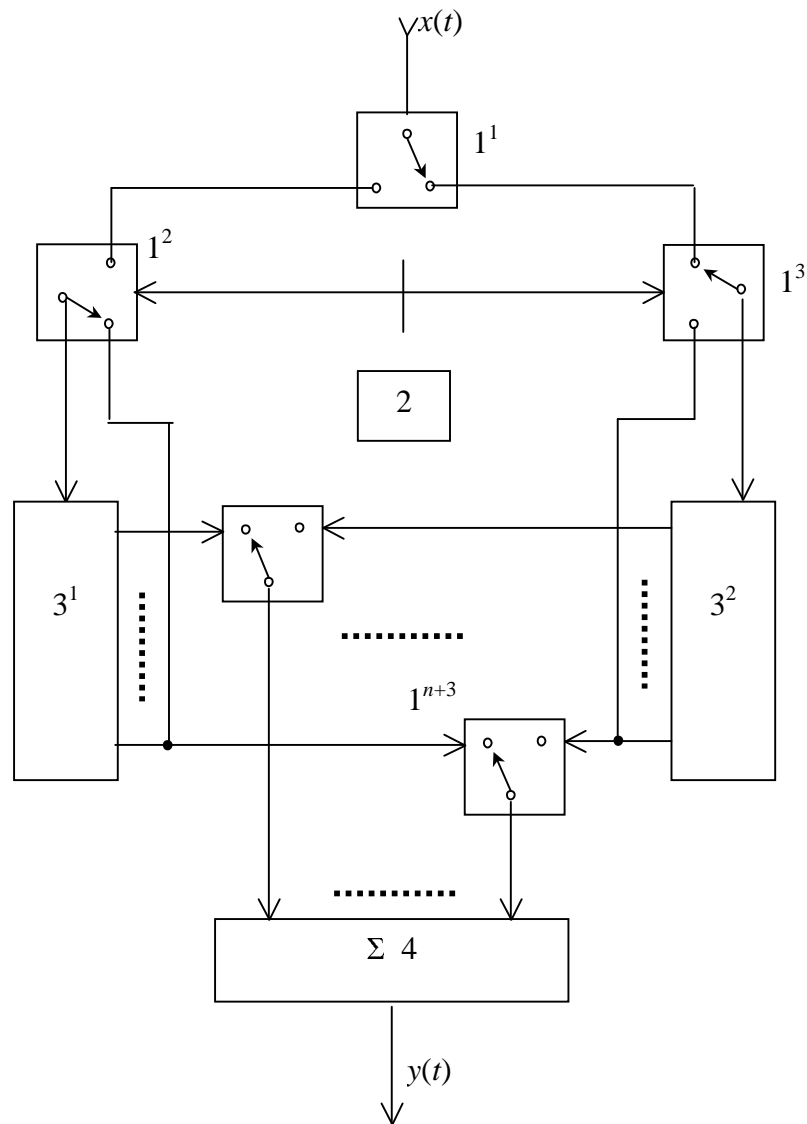


Рис. 4.4. Двухтактное устройство для линейного преобразования сигнала:
 1 – переключатель; 2 – синхронизатор; 3 – линия задержки; 4 – линейный сумматор с весовыми коэффициентами

После переключения линии задержки как бы меняются местами. На выходе сумматора 4 получается преобразованный сигнал $y(t)$, предназначенный для передачи по каналу связи. На приемном пункте сигнал $y(t)$ подвергается обратному преобразованию с использованием аналогичной схемы. Отличие заключается в том, что весовые коэффициенты сумматора 4 берутся равными элементам строки обратной циклической матрицы A^{-1} . Следует отметить, что линии задержки 3 целесообразно выполнять на основе АМЗ с кольцевым носителем.

Новизна технического решения, использованного в рассмотренном устройстве, подтверждена авторским свидетельством на изобретение [92].

4.3. Устройство выравнивания дисперсии

Одним из примеров технической реализации способа выравнивания дисперсии нестационарного сигнала, описанного в п. 1.3, может служить устройство, функциональная схема которого приведена на рис. 4.5.

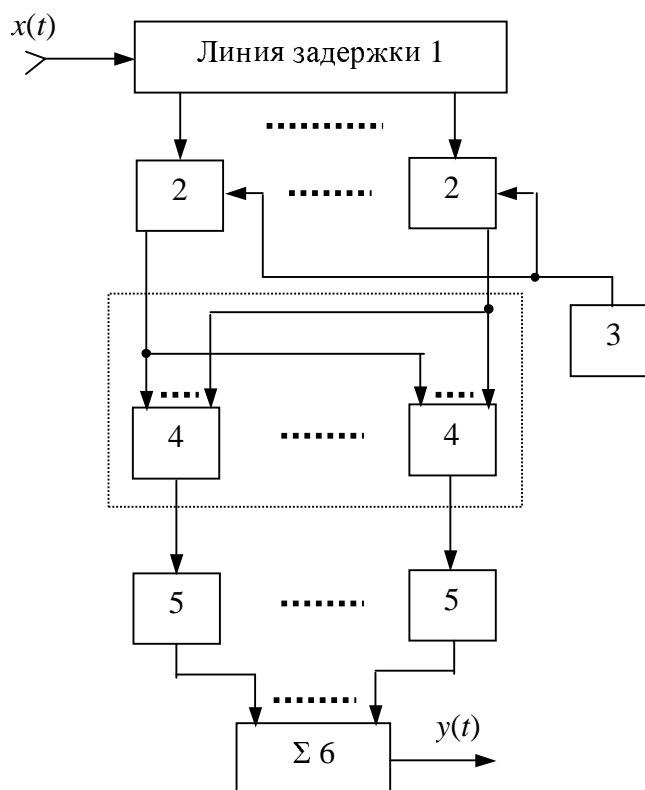


Рис. 4.5. Устройство выравнивания дисперсии нестационарного сигнала: 1, 5 – линия задержки; 2 – управляемый вентиль; 3 – синхронизатор; 4 – сумматор с весовыми коэффициентами; 6 – выходной сумматор.

Исходный сигнал $x(t)$ вводится во входную линию задержки 1, имеющую n отводов через τ . Синхронизатор 3 периодически с периодом T открывает управляемые вентили 2 на время τ , в результате чего на выходе сумматоров 4, выполняющих умножение на матрицу A , образуются составляющие вектор - функции $Y(t)$. При помощи линий задержки 5, осуществляющих задержку сигналов $Y_i(t)$ на время $\tau, 2\tau, \dots, n\tau$ соответственно, и сумматора 6 производится "склеивание" компонент $y_1(\tau), \dots, y_n(\tau)$ в сигнал $y(t)$, предназначенный для передачи по каналу связи. На приемном конце сигнал подвергается обратному преобразованию с помощью аналогичной схемы. Отличие заключается в том, что весовые коэффициенты сумматоров 4 берутся равными коэффициентам обратной матрицы A^{-1} .

Новизна этого технического решения защищена авторским свидетельством на изобретение [90].

4.4. Устройства для введения информационной избыточности

В подразделе 2.7 был описан вариант стрип-метода с введением избыточности в передаваемый сигнал. Пример технической реализации устройства для введения информационной избыточности и ее использования для обнаружения, диагностики, идентификации и коррекции импульсной помехи [130] приведен на рис. 4.6.

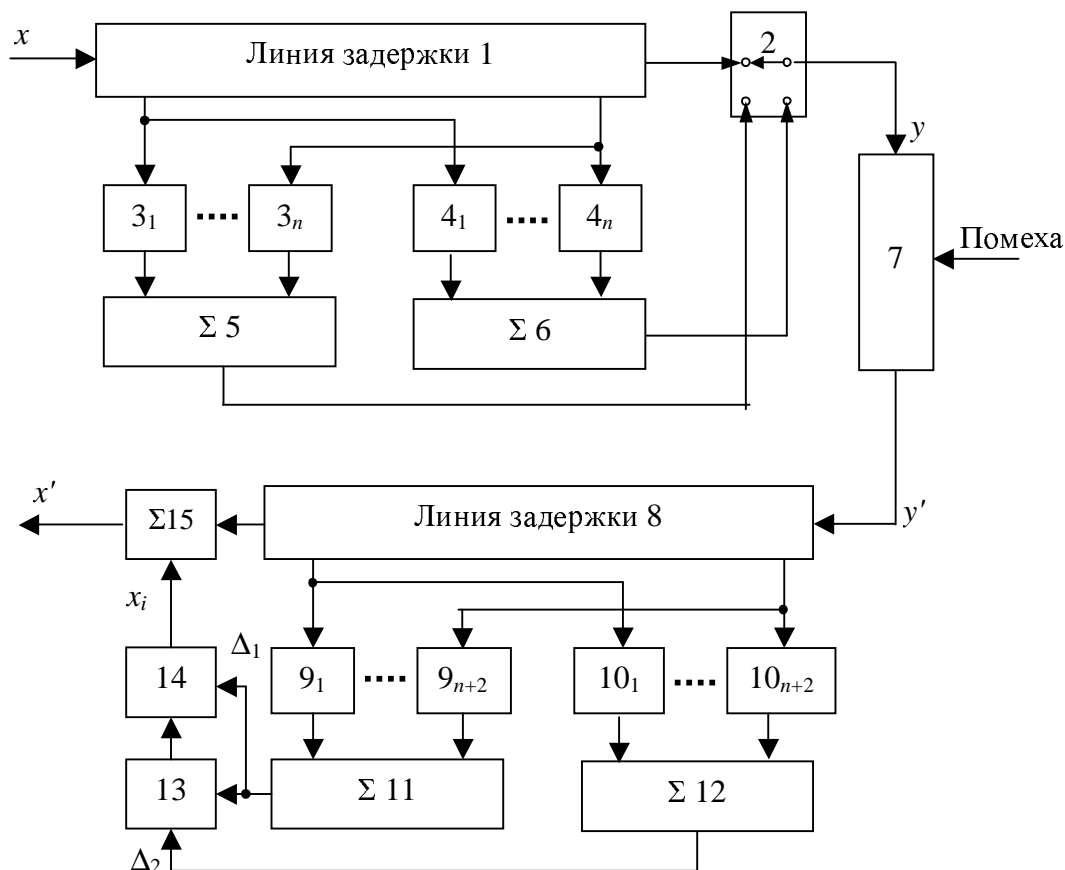


Рис. 4.6. Устройство введения в сигнал информационной избыточности
 1, 8 – линии задержки с отводами; 2 – переключатель; 3, 9 – усилители с коэффициентами передачи b_{1j} ; 4, 10 – усилители с коэффициентами передачи b_{2j} ; 5, 6, 11, 12, 15 – сумматоры; 7 – канал связи; 13 – блок деления; 14 – блок коррекции.

Входной сигнал $x(t)$ длительности T с помощью линии задержки 1 разбивается на n участков равной длительности. Линия задержки 1 с n отводами через T/n , усилители 3_j с коэффициентами усиления a_j и линейный сумматор 5 осуществляют формирование дополнительного участка $y_{n+1}(t)$, а усилители 4_j с коэффициентами усиления b_j и сумматор 6 – участка $y_{n+2}(t)$, которые подаются на переключатель 2. На вход канала связи 7 приходит сигнал $y(t)$, состоящий из сигнала $x(t)$, к которому в конце добавлены два дополнительных участка. На приемном конце сигнал $y'(t)$, пораженный помехой в канале связи 7, поступает на линию задержки 8 с $(n + 2)$ отводами через T/n . С помощью линии задержки 8 и линейных сумматоров 11, 12 определяются контрольные сигналы Δ_1 и Δ_2 . Выходной сигнал блока деления 13 соответствует номеру искаженного участка, коррекция (вычитание) помехи на котором производится блоком коррекции 14 и сумматором 15 с использованием сигнала $\Delta_1 = x_i$.

Предложены различные варианты технической реализации передающей [96-98, 129] и приемной [95, 111] частей этого устройства. Их новизна подтверждена авторскими свидетельствами на изобретение.

Рассмотрим один из вариантов передатчика и приемника. На рис. 4.7 приведена функциональная схема устройства для прямого преобразования аналогового сигнала (передатчика) с введением в него информационной избыточности [95].

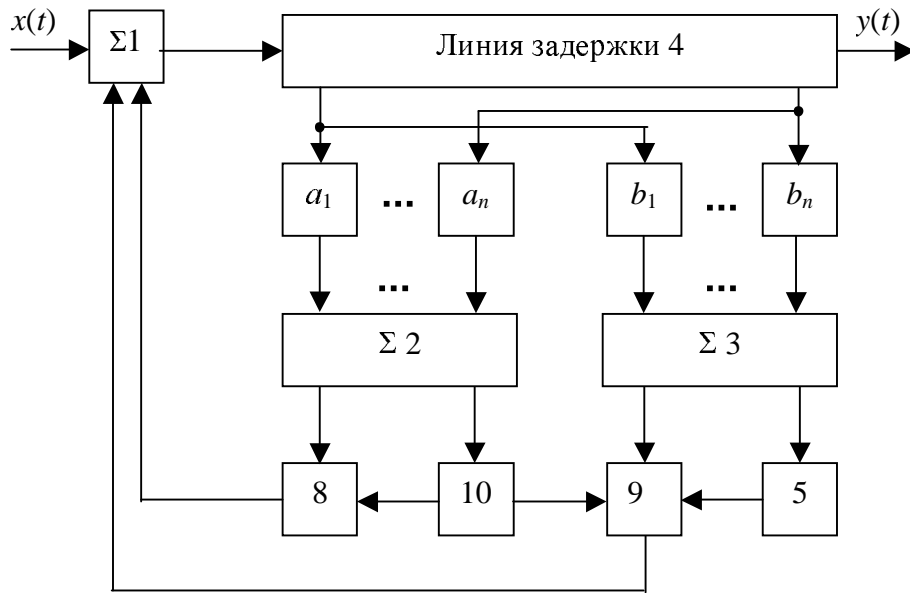


Рис. 4.7. Устройство формирования избыточного сигнала:

1-3 – сумматоры; 4, 5 – линии задержки; усилители с коэффициентами усиления a_1, \dots, a_n ; усилители с коэффициентами усиления b_1, \dots, b_n ; 8, 9 – управляемые вентили; 10 – синхронизатор.

Устройство работает следующим образом. Исходный сигнал $x(t)$ через сумматор 1 поступает на линию задержки 4, которая задерживает его на время T . Интервал задержки между соседними ее отводами составляет T/n . Сигнал с каждого отвода через усилители поступает на входы сумматоров 2, 3. С сумматора 2 сигнал y_{n+1} , полученный как линейная комбинация (взвешенная сумма) сигналов с n отводов линии задержки 4, поступает на сигнальный вход управляемого вентиля 8. Сигнал y_{n+2} с сумматора 3 задерживается на время T/n линией задержки 5 и поступает на сигнальный вход управляемого вентиля 9. Синхронизатор 10 управляет вентилями 8 и 9 в такой последовательности. Периодически, через время $(n + 2) \cdot T / n$ он открывает по очереди вентили 8 и 9 на время T/n , пропуская на вход линии задержки 4 сигнал y_{n+1} с сумматора 2 через вентиль 8 и сумматор 1, а затем сигнал y_{n+2} с сумматора 3 через линию задержки 5, вентиль 9 и сумматор 1. Таким образом, преобразованный сигнал $y(t)$, снимаемый с выхода линии задержки 4, состоит из трех частей: первой части длительностью T , совпадающей с исходным сигналом $x(t)$, второй части y_{n+1} длительностью T/n , и третьей части y_{n+2} длительностью также T/n . Тем самым обеспечивается введение в преобразованный сигнал $y(t)$ двух избыточных участков, образованных как линейные комбинации участков исходного сигнала $x(t)$.

На рис. 4.8 приведена функциональная схема устройства для обратного преобразования сигнала (приемник) с использованием введенной информационной избыточности, обеспечивающее обнаружение, диагностику, идентификацию и коррекцию помехи [97].

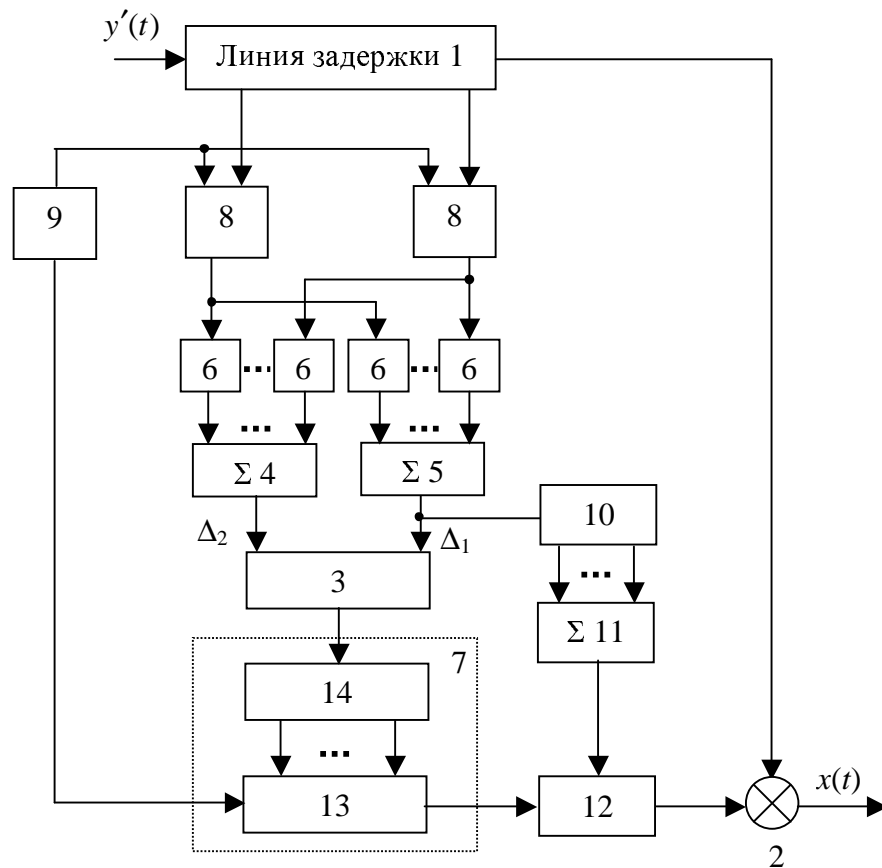


Рис. 4.8. Приемник аналогового сигнала с избыточностью:

1, 10 – многоотводные линии задержки; 2 – блок вычитания; 3 – блок деления; 4, 5, 11 – сумматоры; 6 – весовые множители; 7 – блок коррекции; 8, 12 – управляемые вентили; 9 – синхронизатор; 13 – счетчик; 14 – дешифратор.

Устройство работает следующим образом. Принятый сигнал $y'(t)$ продолжительностью $(n + 2) \cdot T/n$, состоящий из участков длительностью T/n , два из которых являются избыточными, поступает на вход многоотводной линии задержки 1. С $(n + 2)$ ее отводов сигналы подаются на сигнальные входы управляемых вентилях 8. Синхронизатор 9 открывает эти вентили на время T/n в конце интервала T . Участки сигнала $y'(t)$ с выходов вентилях 8 через весовые множители (усилители или делители) 6 поступают на входы первого 4 и второго 5 сумматоров. На выходе сумматора 5 образуется сигнал рассогласования Δ_1 , повторяющий форму помехи, а на выходе сумматора 4 – сигнал Δ_2 , который по форме повторяет напряжение помехи с амплитудой, превышающей помеху в число раз, соответствующее номеру искаженного участка сигнала.

Сигналы рассогласования Δ_1 и Δ_2 с выходов сумматоров 4 и 5 подаются на блок деления 3. С его выхода напряжение, пропорциональное номеру искаженного участка, проходит на вход блока коррекции 7, а именно - на дешифратор 14. Дешифратор 14 вырабатывает управляющий сигнал на одном из своих выходов с номером, соответствующим номеру искаженного участка. Этот сигнал подается на соответствующий вход установки исходного состояния счетчика 13, на счетный вход которого поступают с выхода синхронизатора 9 импульсы с периодом следования T/n . На выходе счетчика 13 образуется управляющий сигнал, открывающий вентиль 12 на время, соответствующее прохождению через блок вычитания 2 искаженного участка сигнала $y'(t)$.

Сигнал рассогласования Δ_1 с выхода сумматора 5, повторяющий форму напряжения помехи, поступает на вход дополнительной многоотводной линии задержки 10. С ее $(n + 2)$ отводов, время задержки между которыми составляет T/n , многократно повторенный сигнал рассогласования Δ_1 через сумматор 11 и управляемый вентиль 12 поступает на вход вычитаемого блока вычитания 2. На вход уменьшаемого этого блока подается сигнал $y'(t)$ с выхода линии

задержки 1. Таким образом, на выходе блока вычитания 2 получается сигнал $x(t)$, который отличается от сигнала $y'(t)$ тем, что помеха в нем скомпенсирована.

В описанном устройстве два дополнительных участка передаваемого сигнала формировались как взвешенные линейные комбинации участков исходного сигнала, а номер искаженного участка определялся как частное от деления контрольных сигналов A_2/A_1 .

Рассмотрим другой вариант устройства, в котором используются более простые процедуры формирования избыточных участков и определения номера искаженного участка. Один дополнительный участок будем получать путем интегрирования сигнала $x(t)$, другой – путем пропускания его через апериодическое звено. Длительности участков возьмем такими же, как и ранее, т.е. T/n . Принцип определения номера искаженного участка используем тот же, однако операцию деления сигналов заменим вычитанием их логарифмов. Это приведет к замене технически сложного блока деления на более простые в реализации логарифмические усилители.

Функциональная схема соответствующего устройства [128] приведена на рис. 4.9.

Устройство работает следующим образом. Исходный аналоговый сигнал длительностью T поступает на входы сумматора 1, апериодической цепи 6 и интегратора 8. Синхронизатор 16 управляет работой клапанов 10 и 11 в такой последовательности: в течение времени от 0 до T оба клапана закрыты; в момент T открывается клапан 10 на промежуток времени τ , в момент $(T + \tau)$ клапан 10 закрывается, а клапан 11 открывается на такое же время τ . На выходе сумматора 1 получается сигнал $y(t)$, предназначенный для передачи по каналу связи 5 и состоящий из трех участков. Первый участок соответствует входному сигналу $x(t)$, второй участок – выходному напряжению $y_{n+1}(t)$ апериодической цепи 6, а третий – выходному напряжению $y_{n+2}(t)$ интегратора 8. Общая длительность передаваемого сигнала составляет $(T + 2\tau)$, где 2τ характеризует введенную информационную избыточность.

В канале связи 5 на сигнал $y(t)$ накладываются импульсные помехи $n(t)$. С выхода канала связи 5 аддитивная смесь $y(t)$ сигнала с однократной помехой через клапан 12 поступает в течение времени от 0 до T на входы апериодической цепи 7 и интегратора 9. Кроме того, эта смесь подается на входы блоков вычитания 2 и 20, а также на вход линии задержки 3. Клапан 12 открывается синхронизатором 17 на время от 0 до T и закрыт остальное время. На выходе блока вычитания 2 получается разность между напряжением смеси $y(t)$ и сигналом с выхода интегратора 9. Управляемый клапан 13 открывается синхронизатором 17 на время от $(T + \tau)$ до $(T + 2\tau)$ и на его выходе образуется сигнал A_2 , соответствующий разности переданного и принятого участка $y_{n+2}(t)$. На выходе блока вычитания 20 получается разность между напряжением смеси $y(t)$ и сигналом с выхода апериодической цепи 7, которая задерживается на время τ линией задержки 4. Управляемый клапан 14 открывается синхронизатором 17 на время от T до $(T + \tau)$ и на выходе образуется сигнал A_1 , соответствующий разности переданного и принятого участка $y_{n+1}(t)$. Логарифмические усилители 18 и 19 и блок вычитания 21 осуществляют операцию, позволяющую получить на выходе блока 21 напряжение, соответствующее логарифмическому отношению A_2 к A_1 (т.е. номеру пораженного помехой участка). Это напряжение подается на сигнальный вход широтно-импульсного модулятора 22, на тактовый вход которого в момент времени, равный нулю, поступает запускающий импульс с синхронизатора 17. При соответствующем выборе параметров модулятора 22 задний фронт импульса на его выходе появляется в момент прохождения помехи. Этот фронт выделяется формирователем 23, с выхода которого импульс длительностью, равной максимальной длительности помехи в канале, подается на управляющий вход клапана 15, закрывая его на время своего существования. На сигнальный вход управляемого клапана 15 поступает смесь $y(t)$ сигнала с помехой, задержанная на время $(T + 2\tau)$ линией задержки 3. В результате на выходе устройства получается сигнал $x(t)$, отличающийся от выходного сигнала $y(t)$ канала связи 5 тем, что из него "вырезана" помеха.

Новизна предложенного технического решения подтверждена авторским свидетельством на изобретение [128].

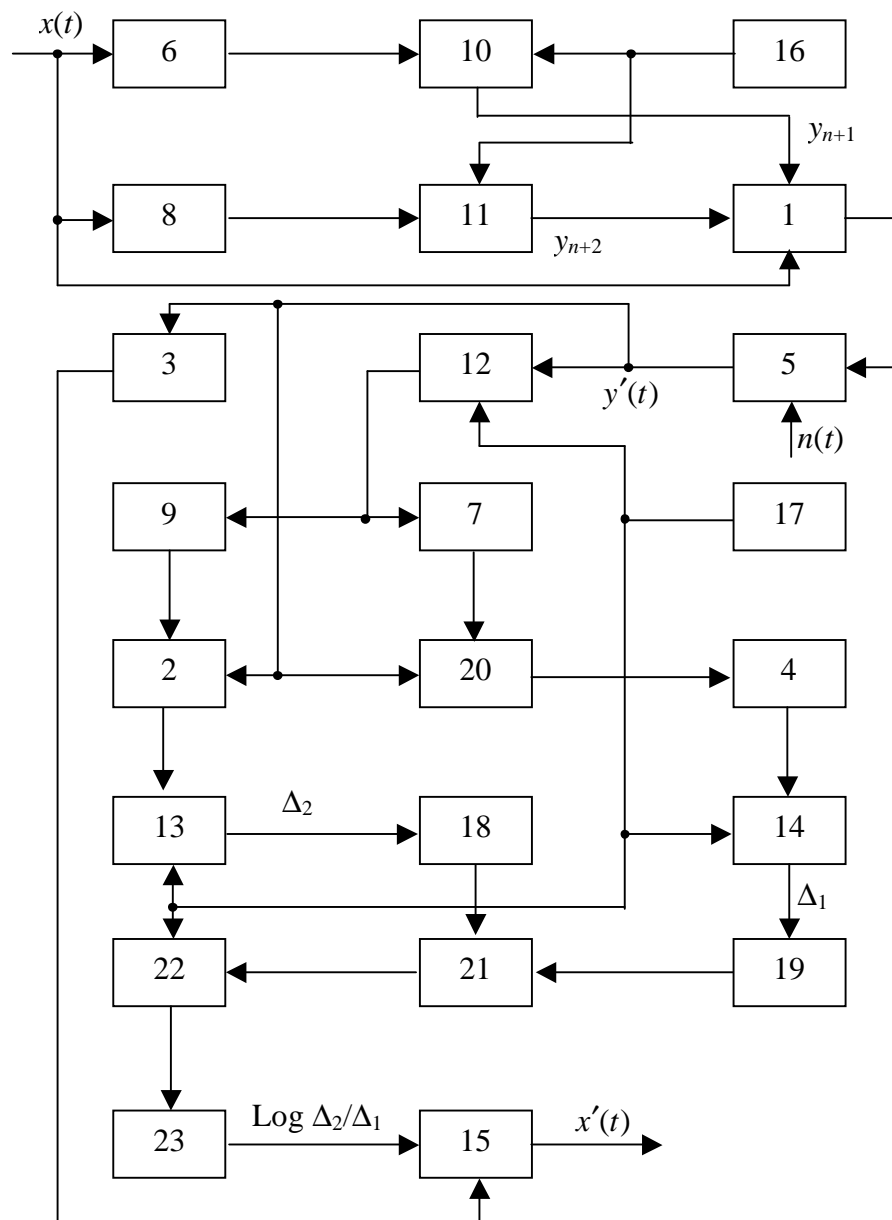


Рис. 4.9. Устройство для передачи и приема аналоговых сигналов с информационной избыточностью:
 – сумматор; 2, 20, 21 – блок вычитания; 3, 4 – линия задержки; 5 – канал связи; 6, 7 – аperiodическая цепь; 8, 9 – интегратор; 10-15 – управляемый вентиль; 16, 17 – синхронизатор; 18, 19 – логарифмический усилитель; 22 – широтно-импульсный модулятор; 23 – формирователь импульсов.

Таким образом, был рассмотрен ряд аппаратных вариантов реализации стрип-метода и алгоритмов передачи и приема сигналов на его основе. В предыдущих главах изложение сопровождалось примерами программной реализации соответствующих алгоритмов, В совокупности это свидетельствует об умеренных вычислительных и аппаратных затратах при практическом применении стрип-метода как средства обеспечения помехоустойчивой передачи сигналов и изображений при наличии импульсных помех.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии описан и исследован матричный метод преобразования сигналов и изображений, использующий процедуру стрип-преобразования, который может рассматриваться как конечномерный аналог голографического принципа преобразования изображений. Указано место этого метода среди известных способов повышения помехоустойчивости систем передачи информации, для чего проведена их классификация по различным признакам.

Сформулированы основные задачи по исследованию и реализации стрип-метода:

- повышение устойчивости к импульсным помехам, действующим в каналах связи;
- нахождение требований к операторам стрип-преобразования, выполнение которых обеспечивает: сохранение "гладкости" преобразованного сигнала; равномерность распределения импульсных помех по длительности сигнала; стационарность передаваемого сигнала по дисперсии; выравнивание его информативности и сужение спектра передаваемого сигнала;
- оценка потенциальной помехоустойчивости и эффективности стрип-метода для случая импульсных помех и синтез соответствующих оптимальных алгоритмов предсказания;
- исследование возможностей введения в передаваемый сигнал информационной избыточности с целью обнаружения, локализации, идентификации и коррекции импульсных помех;
- развитие стрип-метода на случай передачи, хранения и обработки двумерных изображений;
- отыскание инвариантов и оптимальных матриц двумерного стрип-преобразования;
- алгоритмическая и техническая реализация стрип-метода линейных преобразования и фильтрации изображений и сигналов.

При решении этих задач рассмотрены основные требования к оператору преобразования. Показано, что он должен быть линейным, изометрическим, конечномерным, сохранять континуальность сигнала; удовлетворять выбранному критерию оптимальности. Дано решение задач обеспечения непрерывности преобразованного сигнала, выравнивания его дисперсии и выравнивания информативности участков преобразованного сигнала. Это приводит к использованию матриц, обладающих определенным типом симметрии и имеющих равные по абсолютной величине элементы.

Большое внимание уделено оптимальному чебышевскому предсказанию и фильтрации. Получена точная нижняя граница минимаксного критерия на множестве изометрических операторов, т.е. решена задача оценки потенциальной помехоустойчивости чебышевского фильтра. Указано, при каких параметрах помехи и сигнала возможно уменьшение уровня помех в смысле минимаксного критерия, т.е. выведено условие эффективности чебышевской фильтрации.

Исследованы возможности двумерного стрип-преобразования для хранения и помехоустойчивой передачи изображений. При этом использованы односторонние и двусторонние матричные преобразования исходного изображения перед передачей, в процессе которых фрагменты изображения перемещаются и накладываются друг на друга. Рассмотрены задачи выбора оптимальных матриц преобразования и определения критической кратности помех. Найдены классы изображений, инвариантных относительно симметричных ортогональных преобразований.

Приведены примеры программной и аппаратурной реализации стрип-метода, защищенные авторскими свидетельствами. Указано на возможность применения стрип-преобразования в целях криптографии и стеганографии.

Матрицы Адамара и близкие к ним матрицы

В основе стрип-метода лежат изометрические преобразования сигналов и изображений с помощью ортогональных матриц. Одно из главных требований, предъявляемых к этим матрицам – по возможности полное "перемешивание" фрагментов исходного сигнала или изображения при прямом стрип-преобразовании, а также равномерное распределение импульсной помехи вдоль длительности восстановленного сигнала или по площади восстановленного изображения – при обратном преобразовании.

С математической точки зрения это означает, что нужно использовать ортогональные матрицы с элементами, близкими по абсолютной величине, классическими представителями которых являются матрицы Адамара. Кроме того, в зависимости от решаемой технической задачи могут выдвигаться дополнительные требования, такие как симметричность матриц, циклическая (теплицева или ганкелева) структура.

Ниже приводится описание и конкретный вид матриц, полностью или частично удовлетворяющих указанным требованиям. В первую очередь, это матрицы Адамара и *S*-матрицы, которые в наилучшей степени обеспечивают "перемешивание" фрагментов сигналов и изображений. К сожалению, эти матрицы существуют далеко не во всех случаях. Поэтому возникает задача поиска ортогональных матриц, близких к ним по своим свойствам. Среди вариантов, заслуживающих внимания, следует отметить матрицы, построенные на базе ортогональных систем функций (тригонометрических и степенных), двухуровневые **D**-матрицы (содержащие элементы только двух типов, например, $\pm a, \pm b$) и минимаксные матрицы (**M**-матрицы).

Последние можно рассматривать как обобщение матриц Адамара для нечетных n , поскольку у них максимальные по модулю элементы минимальны среди всех ортогональных матриц нечетного порядка.

1. Матрицы Адамара

Матрицы Адамара находят широкое применение в теории кодирования (коды, исправляющие ошибки), теории планирования многофакторных экспериментов (ортогональные блок-схемы) и других областях математики. Приведем определение этих матриц и опишем их основные свойства [6, 25, 85, 159].

Определение. Матрицей Адамара порядка n называется такая $n \times n$ - матрица A с элементами ± 1 , что $AA^T = nE$, где E – единичная матрица.

Очевидно, что матрица Адамара невырождена, а ее строки попарно ортогональны.

При перестановке строк и столбцов и при умножении их на -1 матрица Адамара переходит опять в матрицу Адамара. Эти операции позволяют преобразовать любую матрицу Адамара к "нормализованному" виду, когда в ее первом столбце и в первой строке все элементы равны $+1$.

Поделив матрицу Адамара на \sqrt{n} , получим ортогональную матрицу $A_0 = A/\sqrt{n}$, удовлетворяющую условию $A_0 A_0^T = E$. Простейшая матрица Адамара имеет вид $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

она ортогональна: $A^T A = 2E$, и симметрична. После деления на $\sqrt{2}$ она становится ортонормальной:

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Легко убедиться, что если **M** и **N** – матрицы Адамара порядков m и n соответственно, то их кронекерово произведение, т.е. матрица $M \otimes N$, является матрицей Адамара порядка $m \cdot n$. Например, если A – матрица Адамара 2-го порядка, то в результате кронекерова произведения $A \otimes A$ получим матрицу Адамара 4-го порядка:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Известно, что матриц Адамара нечетного порядка не существует. Для существования матриц Адамара четного порядка $n > 2$ необходимо, чтобы n делилось на 4. Докажем это.

Рассмотрим нормализованную матрицу Адамара порядка $n \geq 3$. Столбцы первых трех строк этой матрицы имеют один из четырех видов:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим числа столбцов этих видов x, y, z, w . Из ортогональности строк следует, что эти числа удовлетворяют системе из 4 уравнений

$$\begin{cases} x + y + z + w = n \\ x + y - z - w = 0 \\ x - y + z - w = 0 \\ x - y - z + w = 0 \end{cases}.$$

Следовательно, $x = y = z = w = n/4$, т.е. n делится на 4.

Заметим, что тем самым доказано только необходимое условие; из него не следует, что при n , кратном четырем, матрица Адамара обязана существовать. Гипотеза о том, что это условие является и достаточным, пока не доказана. На геометрическом языке вопрос о существовании матрицы Адамара порядка $n = 4k$ эквивалентен вопросу о возможности вписать правильный гиперсимплекс в $(4k-1)$ -мерный куб.

Для практического получения матриц Адамара можно использовать команду **hadamard** пакета MATLAB; она позволяет строить матрицы Адамара для случаев, если $n, n/12$ или $n/20$ являются степенями двойки. К сожалению, сюда не входят такие n , кратные четырем, как 28, 36, 44, 52, 56, 60 и другие, хотя для них уже давно найдены матрицы Адамара.

Полный список известных матриц Адамара, составленный Н. Слоуном (N. Sloan), имеется на сайте <http://www.research.att.com/~njas/hadamard>. В библиотеке Слоуна приведены все матрицы Адамара для $n=28$, и, по крайней мере, по одной матрице для всех значений n , кратных 4, вплоть до $n=256$. Они имеют имена вида had.1.txt, had.2.txt, had.4.txt, had.8.txt, ..., 256.syl.txt и оформлены в виде текстовых файлов, содержащих массивы знаков + и -, соответствующих положительным и отрицательным элементам матриц Адамара. Содержимое нескольких таких файлов приведено в табл. П.1.

Таблица П.1.

| had.4.txt | had.8.txt | had.12.txt | had.16.0 |
|---------------|-----------------|---------------------|-------------------------|
| ++++ | +++++++ | +----- | +++++++ |
| + - + - | + - + - + - | + + - - + + + - | + - + - + - + - + - + - |
| + + - - | + + - - + + - - | + + + - - - + + - - | + + - - + + - - + + - - |
| + - - + | + - - + + - - + | + - + - + - - + + + | + - + - + - - + - - + - |
| | ++++- - - - | + + - - + - - - + + | ++++- - - - + + - - - - |
| | + - + - + - + | + + + - + - - - + + | + - + - + - - - + - - + |
| | + + - - + + | + + + - + - + - - - | + + - - + + - - - - + + |
| | + - - + + - | + - + - + - + - - - | + - - + + - - - + - - + |
| 1 1 1 1 | | + - + - + - + - - - | +++++++ |
| 1 - 1 - 1 - 1 | | + - - + + - + + - - | + - + - + - - - + - - + |
| 1 1 - 1 - 1 | | + + - - + - - - + + | + - - + + - - - + - - + |

| | | | |
|---------|--|----------|--|
| 1-1-1 1 | | +-----++ | +-----++ ++++-----++ +---+---+---+--- ++-----++ +---+---+---+--- |
|---------|--|----------|--|

Система обозначений ясна из первого столбца, в котором представлены оба варианта записи матрицы Адамара 4 - го порядка.

Заметим, что матрицы Адамара порядков 2, 4, 8 и 12 единственны (с точностью до изоморфизма). При $n=16$ существует несколько различных матриц Адамара, в библиотеке Слоуна они обозначены как had.16.0, had.16.hed, had.16.syl, had.16.twin, had.16.1, had.16.2, had.16.3, had.16.4. Три неэквивалентные матрицы Адамара для $n=20$ обозначены как had.20.pal, had.20.will, had.20.toncheviv. Далее в библиотеке следуют 60 матриц порядка 24 и 487 матриц порядка 28, а также примеры матриц Адамара для каждого n , кратного 4, до 256 включительно.

При их построении использовались методы, предложенные Пэли, Плакет-Бурманом, Сильвестром, Турином, Вильямсоном. Некоторую информацию об этих методах можно найти в сборнике статей по теории планирования экспериментов, глава 7 которого «Ортогональные массивы» написана Слоуном и др. (*Sloane and Stufken. Orthogonal Arrays by Hedayat // Contemporary Design Theory: A Collection of Essays / Editors Dinitz, J. H. and Stinson, D. R., N.-Y.: Wiley 1992. Chap. 7*).

Не все из матриц Адамара, приведенных в табл. П.1, симметричны. В табл. П.2 приведены варианты этих матриц, симметричные относительно главной или побочной диагоналей, в ряде случаев более удобные для использования в стрип-методе.

Таблица П.2.

| $n=4$ | $n=8$ | $n=12$ |
|--|--|--|
| $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ |

2. Укороченные матрицы Адамара

Перестановкой строк, столбцов и умножением их на -1 всякую матрицу Адамара можно привести к симметричному виду с положительными элементами в первой строке и первом столбце. Отбрасывая эту строку и столбец, получим укороченную (редуцированную) матрицу порядка $n-1$. Она уже не будет ортогональной, но зато станет циркулянтной – все ее строки получаются циклическим сдвигом первой. Это свойство полезно при обработке сигналов стрип-методом, поскольку обеспечивает "гладкость" преобразованного сигнала.

Проанализируем некоторые свойства укороченных матриц Адамара. При $n=4$, взяв за основу матрицу из первого столбца табл. П.1, получаем укороченную матрицу Адамара третьего порядка

$$\bar{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_3^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица также оказывается циркулянтной.

Приведем собственные числа и собственные векторы матрицы \bar{A}_3 :

$$\lambda_1 = -2; \quad \lambda_2 = -1; \quad \lambda_3 = 2; \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Первому собственному вектору отвечает двукратная помеха, которая при фильтрации стрип-методом останется неизменной; однако другие двукратные помехи могут усиливаться.

При $n=8$ получаем следующую укороченную матрицу Адамара седьмого порядка и обратную к ней:

| \bar{A}_7 | \bar{A}_7^{-1} |
|---|---|
| $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ | $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ |

Собственные числа матрицы \bar{A}_7 имеют вид $-2, 2, -1$.

В общем случае собственные числа укороченной матрицы, полученной из матрицы Адамара порядка n , делятся на три группы: одно из них всегда равно -1 , половина оставшихся равна \sqrt{n} , другая половина равна $-\sqrt{n}$.

3. С-матрицы

Определение. С-матрицей (Conference-Matrix) называется любая матрица C порядка n с нулями на главной диагонали и $+1$ и -1 на остальных местах, удовлетворяющая условию $C^T C = (n-1)E$.

Таким образом, строки (и столбцы) С-матриц попарно ортогональны. Простейшие С-матрицы имеют вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(П.1)

Первая и третья из них симметричны, вторая и четвертая – кососимметричны.

Кососимметричные S -матрицы, как и матрицы Адамара, существуют только при $n=2$ и n , кратных 4. С точки зрения стрип-метода они во всех отношениях уступают матрицам Адамара и поэтому далее не рассматриваются.

Симметричные S -матрицы порядка n могут существовать лишь в том случае, если $n-2$ делится на 4, а $n-1$ представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел. Например, при $n = 2, 6, 10, 14, 18$ они существуют, а при $n=22$ – нет, так как число 21 не представляется суммой двух квадратов. При $n=26, 30$ S -матрицы существуют, поскольку имеют место равенства $25^2=3^2+4^2$; $29=2^2+5^2$. При $n=34$, как и при $n=22$, получаем отрицательный ответ. При $n = 38, 42, 46$ – ответ будет также отрицательный.

Укажем на две задачи, в которых встречаются S -матрицы.

1. **Задача об организации конференции.** Допустим, что n директоров какой-то компании решили провести совещание по телефону, причем так, чтобы любой директор мог разговаривать с каждым из своих коллег, а все остальные при этом имели возможность слушать их беседу. Построение такой конференц - сети линий связи эквивалентно построению S -матрицы.

2. **Задача о взвешивании.** Какая схема взвешивания "наилучшая", если нужно взвесить n объектов за n взвешиваний? Стратегия взвешивания описывается матрицей S , заданной своими элементами c_{ij} :

- $c_{ij} = 1$, если объект j при взвешивании i находится на левой чашке весов;
- $c_{ij} = -1$, если объект j при взвешивании i находится на правой чашке весов;
- $c_{ij} = 0$, если объект j во взвешивании i не участвует.

Для n , кратных 4, наилучшая схема взвешивания задается матрицей Адамара, а для четных n , не кратных 4 – симметричной S -матрицей.

Нормированные S -матрицы, порядок которых отличается от адамаровых на два, обладают тем же экстремальным качеством, что и матрицы Адамара: максимальный по модулю элемент их минимален (на классе ортогональных матриц). Будем далее обозначать максимальный по модулю элемент ортогональной матрицы через α . Величина этого элемента для S -матриц равна

$\alpha = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$, т.е. лишь немного уступает матрицам Адамара, у которых $\alpha = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Например, при $n=6$ отличие составляет менее 10 %.

Вместе обе эти формулы описывают точную нижнюю границу максимального по модулю элемента ортогональных матриц четного порядка: первая для n , не кратных четырем, в частности, для 6, 10, 14, 18, 26; вторая – для n , кратных четырем, в частности, для 4, 8, 12, 16, 20.

В табл. П.3 приведены S -матрицы для значений $n = 10, 14, 18$; случаи $n = 2, 6$ были рассмотрены выше (П.2).

Таблица П.3

| S_{10} | | | | | | | | | | S_{14} | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | |
| -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | -1 | 0 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| -1 | 1 | 1 | -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 1 | 0 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 0 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 |
| -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 0 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 0 | -1 | 1 | -1 | |
| -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| | | | | | | | | | | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| | | | | | | | | | | 1 | -1 | 0 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 |
| | | | | | | | | | | 0 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | |
| | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |

| S_{18} | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|---|---|----|---|---|---|---|----|---|----|----|---|---|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 0 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 0 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 |
| 0 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 0 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 |
| -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 0 | 1 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 |
| -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 0 |
| -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| -1 | 0 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| -1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 |
| -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 0 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 |
| -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 1 |
| -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 0 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 |

Матрица C_{18} (как и C_{14}) при необходимости может быть приведена к симметричному виду с нулевой диагональю. Кроме того, существует ее аналог, имеющий две нулевые диагонали, расположенные крест-накрест:

$$X_{18} =$$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| [0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 0 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 |
| 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 | -1 | -1 | 0 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 0 | 0 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 |
| 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | -1 | -1 | 0 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 0 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | -1 | -1 | 1 | 0 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 0 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | -1 | -1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | -1 | 0 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | 0 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 0] |

Эта матрица весьма близка к оптимальной; величина ее максимального элемента после нормировки равна $\alpha = \frac{1}{\sqrt{n-2}} = 0,25$ (для матрицы C_{18} имеем $\alpha = \frac{1}{\sqrt{n-1}} = 0,2425$).

В совокупности матрицы Адамара и C -матрицы дают решение ортогональной задачи Прокруста (задачи о поиске ортогональных матриц с минимальным по модулю элементом) почти для всех четных n . Исключение составляют отдельные значения, такие как $n=22$ и $n=34$, решение для которых авторам неизвестно.

Значительно хуже обстоит дело для нечетных n , где известно лишь несколько оптимальных матриц для небольших значений n . Информация о них приводится ниже.

4. Оптимальные матрицы нечетного порядка (М-матрицы)

Назовем матрицы, доставляющие решение ортогональной задачи Прокруста для нечетных n , минимаксными или просто M -матрицами. Их главное свойство – минимальность величины α ,

т.е. значения максимального по модулю элемента на классе всех ортогональных матриц данного размера. Здесь можно выделить три задачи.

Задача 1. Поиск конкретных \mathbf{M} -матриц для различных значений n .

Задача 2. Определение точной нижней границы α^* для величины максимальных элементов \mathbf{M} -матриц α в зависимости от n : $\alpha \geq \alpha^* = f(n)$.

Задача 3. Определение числа k уровней элементов в \mathbf{M} -матрице при разных n .

Так, матрицы Адамара могут быть названы одноуровневыми, поскольку все их элементы равны по абсолютной величине. \mathbf{C} -матрицы – двухуровневые, модули их элементов равны 0 и 1. При нечетном n \mathbf{M} -матрицы оказываются k -уровневыми, причем k зависит от n .

Следует ожидать, что решение всех трех поставленных задач будет зависеть от того, какой остаток при делении на 4 даст нечетное число n (1 или 3). Соответственно, множество \mathbf{M} -матриц распадается на два подмножества, отличающихся нижними границами, числом уровней k и типом матриц.

Перейдем к описанию конкретных \mathbf{M} -матриц для $n = 3, 5, 7, 9, 11$. Поиск этих матриц производился путем численного и символьного моделирования в пакетах MATLAB и MAPLE¹ с помощью специально разработанных программ. В результате удалось установить аналитический вид элементов оптимальных матриц M_3, M_5, M_7, M_9 , а также найти в численном виде матрицу M_{11} , получив предварительно систему нелинейных алгебраических уравнений для определения ее элементов. Подробнее методика поиска поясняется ниже на примере матрицы M_{11} .

Для случая $n = 3$ оптимальная матрица, дающая решение ортогональной задачи Прокруста, имеет вид:

$$M_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{П.2})$$

Она ортогональна и симметрична, величина ее максимального элемента равна $\alpha = 2/3$. Матрица содержит два типа элементов, т.е. является двухуровневой. Ее связь с геометрической задачей о вписывании данного правильного октаэдра в куб минимального размера обсуждалась в главе 3 (рис. 3.5).

Для случая $n = 5$ оптимальная матрица оказалась трехуровневой:

$$M_5 = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & -6 & 6 & -2 \\ 6 & -6 & -3 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 2 & -6 & 3 \\ 6 & -2 & 6 & 3 & -6 \end{bmatrix}. \quad (\text{П.3})$$

Она также ортогональна и симметрична, величина ее максимального элемента $\alpha = 6/11$. Распределение абсолютной величины ее элементов по уровням показано на рис. П.1.

Из 25 ее элементов 15 находятся на верхнем уровне и по пять - на двух других. Таким образом, элементы верхнего уровня составляют 60 % от общего числа (у матрицы M_3 – 67 %, а у матриц Адамара – 100 %).

¹ При проведении компьютерных экспериментов использовались программы, разработанные Д.В. Шинтяковым.

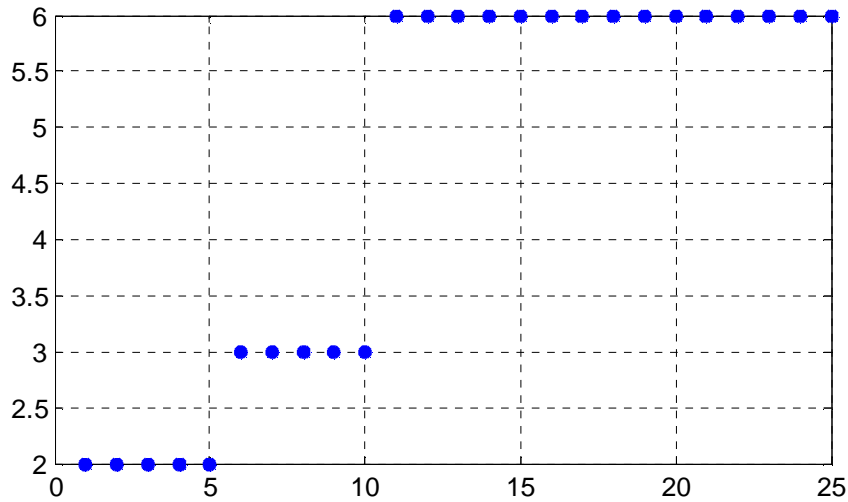


Рис. П.1. Распределение элементов матрицы M_5 по уровням

При исследовании случая $n = 7$ были найдены две матрицы: пятиуровневая матрица M_7 со значением $\alpha = \frac{5 + 7\sqrt{7}}{53} \approx 0,444$ и двухуровневая матрица N_7 со значением $\alpha = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{14} \approx 0,446$. Структура этих матриц такова:

$$M_7 = \begin{bmatrix} [a, -d, c, a, -a, -a, -a] \\ [-d, c, a, a, a, a, -a] \\ [c, a, -d, a, -a, a, a] \\ [a, a, a, -c, b, -b, b] \\ [-a, a, -a, b, e, -a, -d] \\ [-a, a, a, -b, -a, -d, -e] \\ [-a, -a, a, b, -d, -e, a] \end{bmatrix} \quad N_7 = \begin{bmatrix} [a, a, a, a, b, b, -b] \\ [a, -b, -b, a, -a, b, a] \\ [a, -b, a, -b, b, -a, a] \\ [a, a, -b, -b, -a, -a, -b] \\ [b, -a, b, -a, -b, a, -a] \\ [b, b, -a, -a, a, a, b] \\ [-b, a, a, -b, -a, b, a] \end{bmatrix}$$

В отличие от предыдущих случаев, элементы этих матриц иррациональны.

Для матрицы M_7 они содержат $\sqrt{7}$:

$$a = 3 + 3\sqrt{7}, \quad b = 9, \quad c = 5 - \sqrt{7}, \quad d = -6 + 3\sqrt{7}, \quad e = 4 + \sqrt{7};$$

при нормировке все их надо разделить на $22 + \sqrt{7}$.

Элементы матрицы N_7 содержат $\sqrt{2}$: $a = 2 + \sqrt{2}$, $b = 2$. При нормировке их надо разделить на $2 + 4\sqrt{2}$.

Приведем обе эти матрицы в подробной записи (без нормировки):

$$M_7 = \begin{bmatrix} 3 + 3\sqrt{7}, & 6 - 3\sqrt{7}, & 5 - \sqrt{7}, & 3 + 3\sqrt{7}, & -3 - 3\sqrt{7}, & -3 - 3\sqrt{7}, & -3 - 3\sqrt{7} \\ 6 - 3\sqrt{7}, & 5 - \sqrt{7}, & 3 + 3\sqrt{7}, & 3 + 3\sqrt{7}, & 3 + 3\sqrt{7}, & 3 + 3\sqrt{7}, & -3 - 3\sqrt{7} \\ 5 - \sqrt{7}, & 3 + 3\sqrt{7}, & 6 - 3\sqrt{7}, & 3 + 3\sqrt{7}, & -3 - 3\sqrt{7}, & 3 + 3\sqrt{7}, & 3 + 3\sqrt{7} \\ 3 + 3\sqrt{7}, & 3 + 3\sqrt{7}, & 3 + 3\sqrt{7}, & -5 + \sqrt{7}, & 9, & -9, & 9 \\ -3 - 3\sqrt{7}, & 3 + 3\sqrt{7}, & -3 - 3\sqrt{7}, & 9, & 4 + \sqrt{7}, & -3 - 3\sqrt{7}, & 6 - 3\sqrt{7} \\ -3 - 3\sqrt{7}, & 3 + 3\sqrt{7}, & 3 + 3\sqrt{7}, & -9, & -3 - 3\sqrt{7}, & 6 - 3\sqrt{7}, & -4 - \sqrt{7} \\ -3 - 3\sqrt{7}, & -3 - 3\sqrt{7}, & 3 + 3\sqrt{7}, & 9, & 6 - 3\sqrt{7}, & -4 - \sqrt{7}, & 3 + 3\sqrt{7} \end{bmatrix}, \quad (\text{П.4})$$

$$N_7 = \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} & 2 & 2 & -2 \\ 2 + \sqrt{2} & -2 & -2 & 2 + \sqrt{2} & -2 - \sqrt{2} & 2 & 2 + \sqrt{2} \\ 2 + \sqrt{2} & -2 & 2 + \sqrt{2} & -2 & 2 & -2 - \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} \\ 2 + \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} & -2 & -2 & -2 - \sqrt{2} & -2 - \sqrt{2} & -2 \\ 2 & -2 - \sqrt{2} & 2 & -2 - \sqrt{2} & -2 & 2 + \sqrt{2} & -2 - \sqrt{2} \\ 2 & 2 & -2 - \sqrt{2} & -2 - \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} & 2 \\ -2 & 2 + \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} & -2 & -2 - \sqrt{2} & 2 & 2 + \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Распределение модулей элементов нормированной матрицы M_7 по уровням, полученное в MATLAB с помощью команды `plot(sort(abs(M7(:))), '*')`, показано на рис. П.2.

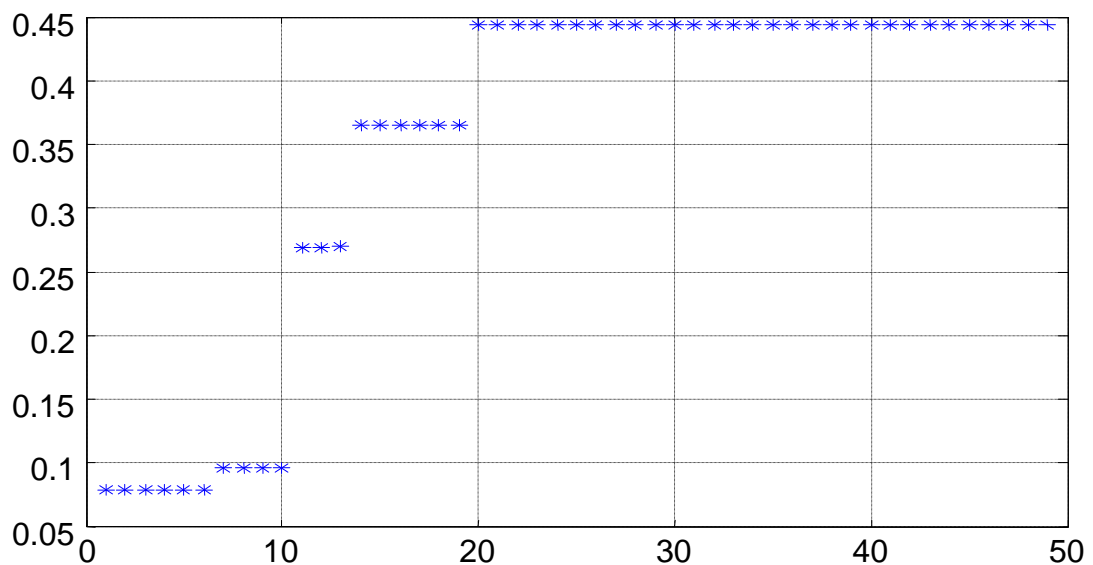


Рис.П.2. Распределение элементов матрицы M_7 по уровням

Из него видно, что нижний уровень содержит 6 элементов, три следующие – 4, 3 и 6 элементов соответственно, наиболее многочисленный верхний уровень – 30 элементов, что составляет около 61 % (примерно столько же, сколько и у матрицы M_5).

В случае $n = 9$ лучшая из найденных матриц имеет 4 уровня и показатель

$$\alpha = \frac{3 + \sqrt{3}}{12} = 0,3943. \text{ Ее структура и элементы таковы:}$$

| | | |
|---|------------------------------|--|
| [d, b, b, b, b, b, b, b, b] | | |
| [b, a, a, a, -a, -a, -c, -c, -c] | $12a = 3 + \sqrt{3},$ | $a = 0.3943,$ |
| [b, a, -c, -a, -c, a, a, -c, -a] | $6b = \sqrt{6\sqrt{3}} - 6,$ | $b = 0.3493,$ |
| [b, a, -a, -c, a, -c, -a, -c, a] | $4c = \sqrt{3} - 1,$ | $c = 0.1830,$ |
| $M_9 =$ [b, -a, -c, a, a, -c, a, -a, -c] | $3d = 2\sqrt{3} - 3,$ | $d = 0.1547,$ |
| [b, -a, a, -c, -c, a, -c, -a, a] | | |
| [b, -c, a, -a, a, -c, -c, a, -a] | | |
| [b, -c, -c, -c, -a, -a, a, a, a] | | |
| [b, -c, -a, a, -c, a, -a, a, -c] | максимальный элемент | $\frac{3 + \sqrt{3}}{12} = 0,3943375.$ |

Здесь уже встречается иррациональность типа "корень из корня", возникающая при решении биквадратного уравнения. К сожалению, $n = 9$ – это последний случай, когда удалось получить явные выражения для элементов M -матрицы.

Распределение модулей элементов матрицы M_9 по уровням показано на рис. П.3.

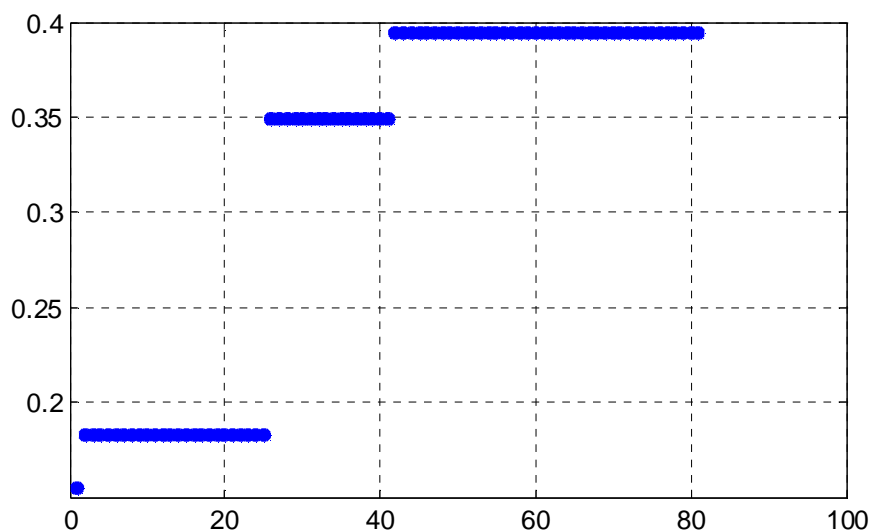


Рис. П.3. Распределение элементов матрицы M_9 по уровням

Из него видно, что на нижнем уровне находится один элемент, на двух следующих – 24 и 16 элементов соответственно. На верхнем уровне находится 40 элементов, что составляет около 49 % от их общего числа.

Для $n = 11$ лучшая ортогональная матрица, найденная в MATLAB, имеет шестиуровневую структуру:

$$M = \begin{bmatrix} -b & a & f & a & a & d & c & e & a & -a & -a \\ -d & f & a & -a & e & -a & b & c & -a & -a & a \\ -a & -e & -c & a & d & -a & a & -a & f & a & b \\ a & -d & a & b & a & a & -f & -a & -e & -c & a \\ a & a & e & a & -b & -a & a & -d & -a & -f & -c \\ a & -a & a & -d & a & -e & a & f & c & b & -a \\ -f & b & d & -c & -a & a & a & -a & a & e & a \\ e & a & a & a & f & -c & -a & a & b & d & a \\ a & a & -a & -f & c & a & d & b & -a & a & e \\ a & -c & -b & e & -a & -f & a & a & a & -a & d \\ -c & -a & a & a & -a & b & e & a & -d & a & -f \end{bmatrix} \quad (\text{П.5})$$

Численные значения ее элементов следующие:

$a = 0.34295283$, $b = 0.33572291$, $c = 0.30893818$, $d = 0.2439851$, $e = 0.15671878$, $f = 0.045364966$.

Показатель $\alpha = 0.3429$ равен значению элемента a . Заметим, что доля максимальных по модулю элементов составляет $6/11 \approx 54,5\%$, что в точности совпадает со значением показателя α для матрицы M_5 .

5. Алгоритм поиска оптимальных матриц

Опишем на примере случая $n=11$ компьютерную процедуру, которая использовалась для нахождения всех вышеприведенных матриц. В ней можно выделить 4 этапа.

Этап 1. Вычисление приближенного значения оптимальной матрицы M .

Вычислительный алгоритм строится на основе итераций, в которых на каждом шаге максимальный по модулю элемент a матрицы уменьшают по правилу $a_{k+1} = a_k * k / (k+p)$ для ее элементов, где k – номер итерации, $p > 0$ – некоторое число. Так как после этого матрица перестает быть ортогональной, ее снова ортогонализируют путем вычисления полярного разложения. Напомним, что полярное разложение представляет данную матрицу в виде произведения

ортогональной и симметричной матриц. Именно первая из них используется в дальнейшем. При ортогонализации максимальный элемент несколько возрастает, но, как правило, не настолько, чтобы достичь прежнего значения.

Итерационный процесс сходится к некоторой ортогональной матрице, после чего его многократно повторяют, изменяя начальную матрицу и запоминая лучшее из найденных ранее решений.

Указанный процесс может быть записан в виде следующего алгоритма.

1. В качестве начального приближения берется квадратная невырожденная матрица.
2. Матрица заменяется ортогональным сомножителем ее полярного разложения.
3. Уменьшается максимальный элемент матрицы.
4. Производится возврат к пункту 2 до тех пор, пока процесс не сойдется к определенной матрице.

Этот алгоритм был реализован в виде MATLAB-программы, текст которой приводится ниже.

```
function [y,X]= procrust(n);
% program find Procrust matrix with min max(abs(a(:)))
alpha=1;gam=2;k=10;
for j=1:10
    A=rand(n);
    if rank(A)<n, A=A+eye(n)/10; end,
    for i=1:5000
        [U,S,V] = svd(A);Q=U*V'; M=max(abs(Q(:)));
m=Q/M*(1+k/i);A=satlins(m);
    end
    a=Q;alpha=max(abs(a(:))); gamma=alpha*sqrt(n);
    if gamma<gam, X=a;y=alpha;gam=gamma; end
end
```

Компьютерные эксперименты показали, что указанный численный алгоритм дает хорошие результаты для $n < 20$.

При $n=11$ эта программа выдала матрицу M , которая после деления на минимальный элемент приняла вид:

[y,M]= procrust(11); альфа=0.343034 A=M/min(abs(M(:)))*4,

A =

| | | | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| -30.3926 | 30.9292 | 4.0000 | 30.9008 | 30.8971 | 21.8849 | 27.9279 | 14.0896 | 30.9436 | -30.9053 | -30.9409 |
| -21.8849 | 4.0000 | 30.9409 | -30.9292 | 14.0896 | -30.9436 | 30.3926 | 27.9279 | -30.9053 | -30.9008 | 30.8971 |
| -30.9008 | -14.0896 | -27.9279 | 30.8971 | 21.8849 | -30.9292 | 30.9053 | -30.9436 | 4.0000 | 30.9409 | 30.3926 |
| 30.9409 | -21.8849 | 30.9436 | 30.3926 | 30.9008 | 30.8971 | -4.0000 | -30.9292 | -14.0896 | -27.9279 | 30.9053 |
| 30.9053 | 30.8971 | 14.0896 | 30.9409 | -30.3926 | -30.9008 | 30.9436 | -21.8849 | -30.9292 | -4.0000 | -27.9279 |
| 30.8971 | -30.9436 | 30.9053 | -21.8849 | 30.9292 | -14.0896 | 30.9409 | 4.0000 | 27.9279 | 30.3926 | -30.9008 |
| -4.0000 | 30.3926 | 21.8849 | -27.9279 | -30.9053 | 30.9409 | 30.9292 | -30.9008 | 30.8971 | 14.0896 | 30.9436 |
| 14.0896 | 30.9053 | 30.9008 | 30.9436 | 4.0000 | -27.9279 | -30.8971 | 30.9409 | 30.3926 | 21.8849 | 30.9292 |
| 30.9436 | 30.9409 | -30.8971 | -4.0000 | 27.9279 | 30.9053 | 21.8849 | 30.3926 | -30.9008 | 30.9292 | 14.0896 |
| 30.9292 | -27.9279 | -30.3926 | 14.0896 | -30.9436 | -4.0000 | 30.9008 | 30.9053 | 30.9409 | -30.8971 | 21.8849 |
| -27.9279 | -30.9008 | 30.9292 | 30.9053 | -30.9409 | 30.3926 | 14.0896 | 30.8971 | -21.8849 | 30.9436 | -4.0000 |

Этап 2. Определение структурного вида оптимальной матрицы.

Выполняем сортировку элементов матрицы M по абсолютной величине и определяем число уровней. Построив командой `plot(sort(abs(M(:))),'*'),grid` график (рис. П.4), заключаем, что элементы распадаются на шесть уровней. Верхний уровень содержит 66 элементов, остальные – по 11 элементов, всего $66+55=121$ элемент.

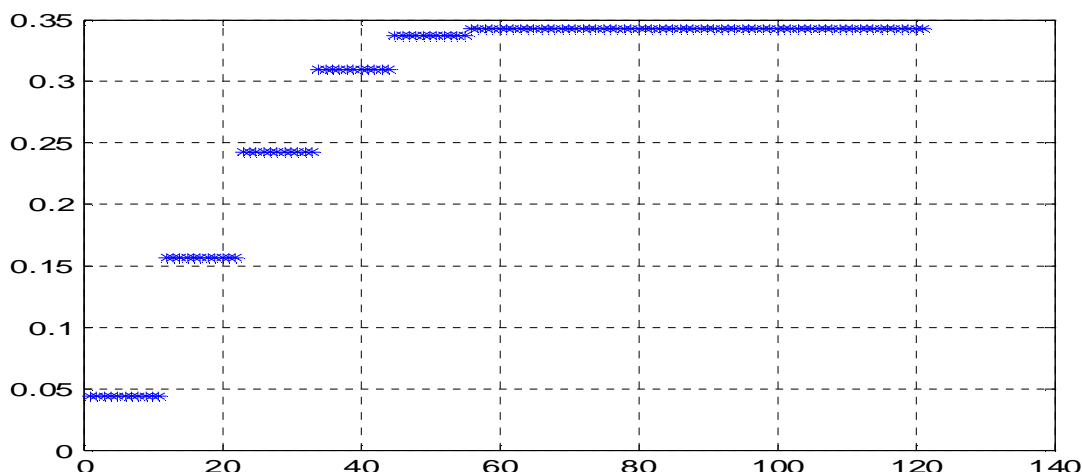


Рис. П.4. Распределение элементов матрицы M_{11} по уровням

Заменяя одинаковые (близкие до eps) элементы матрицы A буквами a, b, c, d, e, f по правилам $a=30.9, b=30.3926, c=27.9279, d=14.0896, e=4, f=21.8849$, получаем символьную матрицу M (П. 5). Замену чисел на буквы можно выполнить в WORD, используя стандартную функцию замены («горячая клавиша» Ctrl-F), либо в MAPLE с помощью команд **map** и **subs**, например:

$A1:=\text{map}(x\rightarrow\text{subs}(\{30=a,31=a,28=b,22=c,14=d,4=e,-30=-a,-31=-a,-28=-b,-22=-c,-14=-d,-4=-e\},x),A).$

Этап 3. Получение системы символьных уравнений для элементов матрицы M_{11} .

Умножаем символьную матрицу A , полученную на предыдущем этапе, на транспонированную матрицу и приравниваем результат единичной матрице. Получаем систему из 121 уравнения с 6 неизвестными: $\gg \text{eq}=A^*A-\text{eye}(11)$

Переносим эту систему в пакет MAPLE. При этом автоматически удаляются дубликаты уравнений и остаются 11 уравнений с шестью неизвестными:

$$\text{eq} := \{ b^2 + 6 a^2 + f^2 + d^2 + c^2 + e^2 - 1, b d + 2 a f - 2 a^2 + a e - d a + c b + e c, \\ d a - f e - 2 c a - a^2 + e d + 2 b a - a f, -b a - b f + 2 a e + a^2 - f d - d a, \\ -b a - a^2 - 2 a f + c a + d a + d c + b e - a e, -b e + a^2 + 2 a f - d c - c a + a e + b a - d a, \\ b f + b a + f d - a^2 + d a - 2 a e, -2 a e - f c + c a + a f, -2 b a + a^2 + f e - d a + 2 c a - e d + a f, \\ 2 a^2 - a e - e c - b d + d a - 2 a f - c b, -a f + 2 a e + f c - c a \}$$

Этап 4. Решение системы символьных уравнений.

Удаляем из имеющихся 11 нелинейных уравнений функционально зависимые путем поочередного исключения переменных (это делается в MAPLE нажатием правой кнопкой мышки на фигурную скобку и выбора нужного пункта предлагаемого меню). Исключая f и e , получаем их выражения через остальные переменные:

$$f = \frac{a(2e - c)}{a - c}, \quad e = -\frac{-ba + 2cb - ca + 2dc + a^2 - da}{2(-b + a - c - d)}$$

После этого остаются четыре уравнения и четыре неизвестных. Далее исключаем d :

$$d = \frac{6a^4 + 2a^3c - 9b^2a^2 - 6ba^2c + a^2c^2 - c^3a + 7b^2ca + c^2ba + 3b^3a - 2b^3c + 2b^2c^2 + 4bc^2}{6a^3 + 6ba^2 + 8a^2c - 3c^2a - 4bac - 3b^2a - 2c^2b + 2b^2c - 2c^3}$$

В результате остаются три уравнения, причем все они имеют множитель $c(a-c)$. Удаляя его, получаем систему трех алгебраических уравнений относительно букв a, b, c . Порядки этих уравнений равны 10, 9 и 7, т.е. общий порядок равен 26. Самое простое из них выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 &90 a^7 + 72 b a^6 + 42 c a^6 - 21 b^2 a^5 - 125 c^2 a^5 - 108 c b a^5 - 25 c^3 a^4 + 45 b^3 a^4 \\
 &- 35 c^2 b a^4 + 101 b^2 c a^4 + 40 c^4 a^3 + 37 c^3 b a^3 - 59 b^2 c^2 a^3 - 57 b^3 c a^3 \\
 &- 27 b^4 a^3 - 48 b^2 c^3 a^2 + 3 b^5 a^2 + 3 c^5 a^2 - 19 c^4 b a^2 + 31 b^4 c a^2 \\
 &+ 4 b^3 c^2 a^2 + 3 c^5 b a - 4 b^4 c^2 a + 10 b^3 c^3 a - 5 b^5 c a - 3 c^6 a + 21 c^4 b^2 a \\
 &- 4 c^4 b^3 + 2 b^5 c^2 + 4 c^6 b - 4 c^3 b^4 + 4 c^5 b^2 = 0
 \end{aligned}$$

К сожалению, решить такую систему уравнений аналитически не удастся, поэтому приходится ограничиться численным решением. Применяя команду **fsolve**, получаем численный ответ $a = -.3429528258$, $b = -.3357229126$, $c = -.3089381782$. Остальные переменные находим по приведенным выше формулам: $d = -.243985099$, $e = -.1567187765$, $f = -.04536496644$.

Отметим, что найденные значения точнее исходных, полученных в MATLAB. Этим завершается компьютерная процедура вычисления оптимальной матрицы M_{11} .

Аналогично производился поиск других оптимальных матриц. "Изюминкой" изложенного подхода является предварительное выяснение структуры оптимальной матрицы путем численного итерационного поиска в MATLAB, в результате чего резко уменьшается количество неизвестных, а затем точное определение элементов матрицы путем составления и решения символьной системы уравнений в MAPLE.

Таким образом, были найдены M -матрицы для всех нечетных $n \leq 11$. Задача поиска M -матриц для $n > 11$ остается открытой так же, как и вопросы о числе уровней этих матриц при разных n . Некоторые представления о нижней границе для показателя α (величине максимального элемента оптимальных матриц) можно получить из рис. П.5. На нем показана зависимость величины максимального по модулю элемента α оптимальной матрицы, умноженной на \sqrt{n} , от размера матрицы n для $2 \leq n \leq 26$. Точки, лежащие на уровне единицы, относятся к матрицам Адамара, несколько выше лежат точки для S -матриц. Выше всего находятся точки для нечетных значений n . Очевидно, что с ростом n все точки окажутся ниже некоторого уровня, и одна из задач состоит в том, чтобы оценить его величину.

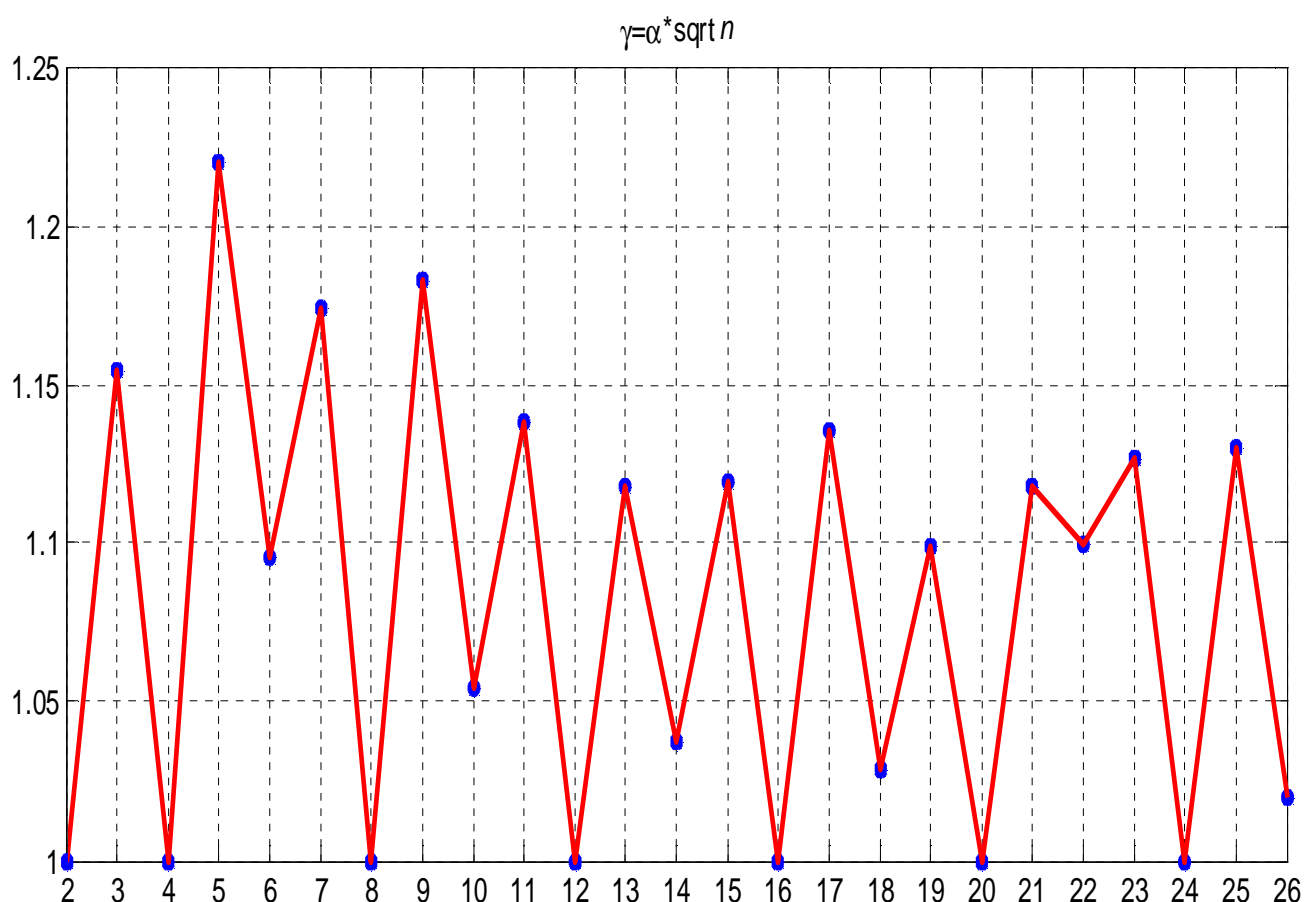


Рис. П.5. Зависимость величины максимального элемента оптимальной матрицы от n

График построен на основе таблицы П.4, в которую сведены имеющиеся результаты по оптимальным матрицам, дающим решение для $n \leq 30$. Таблица содержит 4 столбца, в первом из которых указана размерность матриц, во втором – наличие показателя α , в третьем – число уровней матрицы, а в четвертом – ее тип. Знаком вопроса помечены случаи, когда решение неизвестно или его оптимальность вызывает сомнения. Матрицы, найденные в MATLAB с помощью итерационного алгоритма, обозначены как **MTL**-матрицы.

Таблица П.4

| n | $\alpha = \max_{i,j} a_{ij} $ | Число уровней | Тип матриц |
|-----|--------------------------------|---------------|---------------------|
| 2 | $1/\sqrt{2} = 0.707$ | 1 | Матрица Адамара |
| 3 | $2/3$ | 2 | М -матрица |
| 4 | $1/2$ | 1 | Матрица Адамара |
| 5 | $6/11 = 0.545454$ | 3 | М -матрица |
| 6 | $1/\sqrt{5} = 0.447$ | 2 | С -матрица |
| 7 | $(7\sqrt{7} + 5)/53 = 0.4438$ | 5 | М -матрица |
| 8 | $1/\sqrt{8} = 0.354$ | 1 | Матрица Адамара |
| 9 | $(3 + \sqrt{3})/12 = 0,3943$ | 4 | М -матрица |
| 10 | $1/3$ | 2 | С -матрица |
| 11 | 0.3431 | 6 | М -матрица |
| 12 | $1/\sqrt{12} = 0.289$ | 1 | Матрица Адамара |
| 13 | 0.3100 ? | ? | MTL -матрица |

| | | | |
|----|----------------------|---|-----------------|
| 14 | $1/\sqrt{13}=0.2774$ | 2 | С-матрица |
| 15 | 0.2890 ? | ? | МТЛ-матрица |
| 16 | $1/4=0.25$ | 1 | Матрица Адамара |
| 17 | 0.2754 ? | ? | МТЛ-матрица |
| 18 | $1/\sqrt{17}=0.2425$ | 2 | С-матрица |
| 19 | 0.2522 ? | ? | МТЛ-матрица |
| 20 | $1/\sqrt{20}=0.2236$ | 1 | Матрица Адамара |
| 21 | 0.2439 ? | ? | МТЛ-матрица |
| 22 | 0.2345 ? | ? | С-матрицы нет! |
| 23 | 0.235 ? | ? | МТЛ-матрица |
| 24 | $1/\sqrt{24}=0.2041$ | 1 | Матрица Адамара |
| 25 | 0.226 ? | ? | |
| 26 | 0.2 | 2 | С-матрица |
| 27 | ? | ? | |
| 28 | $1/\sqrt{28}=0.1890$ | 1 | Матрица Адамара |
| 29 | ? | ? | |
| 30 | $1/\sqrt{29}=0.1857$ | 2 | С-матрица |

Библиографический список

1. **Anderson B.D.O., Moore J.B.** Optimal filtering. N.-J.: Englewood Cliffs, 1979.
2. **Costas J.P.** Coding with linear systems. // PIRE, 1952, v. 40, No 9. P. 1101-1103.
3. **Gabor D.** Theory of Communication. // J. IEEE, 1946, pt. 3, v. 98. P. 429-457.
4. **Glover K.** All - optimal Hankel - norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ - error bounds. // Int. J. Control, 1984, v.39, № 6. P. 1115-1193.
5. **Haar A.** Zur Theorie der Orthogonalen Funktionen System. // Inaugural Dissertation, Math. Ann., 1955, № 5, P. 17-31.
6. **Hadamard J.** Resolution d'une question relative aux determinants. // Bull. Sci. Math., 1893, ser. 2, v. 17, pt. 1. P. 240-246.
7. **Harmuth H.F.** A generalized concept of frequency and some applications. // IEEE Trans., 1968, v. IT - 14. P. 375-382.
8. **Kallman H.E.** Transversal filters. // PIRE, 1940, v. 38. P. 302-311.
9. **Karhunen K.** Über Linearen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. // Ann. Acad. Sci. Fennical, ser. A, 1946, v. 1, No 2.
10. **Kramer H.P., Mathews M.V.** A linear coding for transmitting a set of correlated signals. // IRE Trans., 1956, v. IT-2. P. 41-46.
11. **Lang G.R.** Rotational transformation of signals. // IEEE Trans., 1963, v. IT - 9, № 3. P. 191-198.
12. **Leith E.N., Upatnieks J.** Reconstructed wavefronts and communication theory. // J. of the Optical Society of America, 1962, v. 52, № 10. P. 1123.
13. **Mironowski L.A., Slayev V.A.** Equalization of the Variance of a Nonstationary Signal. // Telecommunications and Radio Engineering, 1975, v. 29 - 30, № 5. P. 21-26.
14. **Mironovski L.A., Slayev V.A.** Technical Diagnostics of Dynamic Systems on the Basis of Algebraic Invariants. // Proceedings of the 3 - rd Symposium of the IMEKO, TC on Technical Diagnostics, IMEKO Secretariat, Budapest, 1983. P. 243-251.
15. **Palermo G.J., Palermo R.V., Horwitz H.** The use of data omission for redundancy removal. // Rec. Int. Space electronics and telemetry Symp., 1965. P. (11) D1 - D16.
16. **Paley R.E.A.C.** On orthogonal matrices. // J. Math. Phys., 1933, v. 12. P. 311-320.
17. **Pierce W.H.** Linear - real codes and coders. // Bell Syst. Techn. J., 1968, 47, № 6. P. 1067-1097.
18. **Pratt W.K., Andrews H.C.** Application of Fourier-Hadamard Transformation to Bandwidth Compression. // In: "Picture Bandwidth Compression", 1972. P. 515-554.
19. **Rademacher H.** Einige Sätze von allgemeinen Orthogonalen Funktionen. // Math. Ann., 1922, v. 87. P. 122-138.
20. **Rao K.R., Narasimhan M.A., Revuluri K.** Image Data Processing by Hadamard - Haar Transforms. // IEEE Trans. Computers, C - 23, 9, 1975. P. 888-896.
21. **Schoenberg I.J.** An isoperimetric inequality for dozed curves convex in even - dimensional Euclidean spaces. // Acta Math., 1954, 91. P. 143-164.
22. Toeplitz matrices, translation kernels and related problem in probability theory. // Duke Math. J., 1954, 21. P. 501-509.
23. **Totty R.E., Clark G.C.** Reconstruction error in waveform transmission. // IEEE Trans., 1967, IT. P. 333-338.
24. **Walsh J.L.** A clozed set of orthogonal functions. // Am. J. Math., 1923, v. 55. P. 5-24.
25. **Williamson J.** Hadamard's Determinant Theorem and the sum of four squares. // Duke J. of Math., 1944, 11. P. 65-81.
26. **Zadeh L.A., Ragazzini J.R.** Optimum filters for detection of signal in noise. // PIRE, 1952, v. 40. P. 1223-1231.
27. **Агеев Д.В., Юрлов Ф.Ф.** Двухэлементная групповая система радиовещания. // Известия ВУЗов СССР, серия "Радиоэлектроника", 1969, т. 12, № 7. С. 712-716.
28. **Аксенов В.А., Вичес А.И., Гитлиц М.В.** Точная магнитная запись. М., Энергия, 1973. 280 с.
29. **Арсенин В.Я., Иванов В.В.** Восстановление формы сигнала, свободной от искажений, обусловленных аппаратурой и каналом передачи. // Измерительная техника, 1975, № 12. С. 25-37.
30. **Атаханов Р.М., Лебедев Д.С., Ярославский Л.П.** Подавление импульсных помех в телевизионном приемном устройстве. // Техника кино и телевидения, 1971, № 7. С. 55-57.

31. **Бабанов Ю.Н.** Повышение помехоустойчивости приема посредством растягивания импульсных помех во времени. // Известия ВУЗов СССР, серия "Радиотехника", 1959, т. 2, № 2. С. 234-238.
32. **Балалаев В.А., Слаев В.А., Синяков А.И.** Потенциальная точность измерений: Науч. издание – Учебн. пособие / Под ред. В.А. Слаева – С.-Пб.: АНО НПО «Профессионал», 2005 – 104 с.: ил.
33. **Балберин В.В., Мироновский Л.А., Петровский А.Б.** Понижение порядка моделей: Учебное пособие. Л.: ЛИАП, 1989. 43 с.
34. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. М., Наука, 1969. 367 с.
35. **Бендат Дж.** Основы теории случайных шумов и ее применения. М., Наука, 1965. 463 с.
36. **Бендат Дж., Пирсол А.** Прикладной анализ случайных данных. / Пер. с англ. М., Мир, 1989. 540 с.
37. **Бомштейн Б.Д., Киселев Л.К., Моргачев Е.Т.** Методы борьбы с помехами в каналах проводной связи. М., Связь, 1975. 248 с.
38. **Буряков А.П.** Вращательное преобразование сигналов для борьбы с импульсными помехами в системах связи. // Труды ЛИАП. Л., 1966, вып. 48. С. 277–286.
39. **Вайнштейн Г.Г.** Оценка эффективности линейного предсказания при передаче координатных сигналов. / - В сб. "Иконика". М., Наука, 1968. С. 8-14.
40. **Ван Трис Г.** Теория обнаружения, оценок и модуляции. Теория обнаружения, оценок и линейной модуляции, пер. с англ. под ред. Тихонова В.И. М., Сов. радио, 1972, Т. 1. 744 с. Теория нелинейной модуляции, пер. с англ. под ред. Горяинова В.Т. М., Сов. радио, 1975, Т. 2. 344 с.
41. **Варакин Л.Е.** Теория систем сигналов. М., Сов. радио, 1978. 304 с.
42. **Василенко Г.И.** Теория восстановления сигналов. М., Сов. радио, 1979. 272 с.
43. **Витерби А.Дж.** Принципы когерентной связи. / Пер. с англ. под ред. Левина Б.Р. М., Сов. радио, 1970. 392 с.
44. **Виттих В.А.** Сжатие многомерных сигналов с использованием их функциональных связей. // Труды УПИ, Ульяновск, Радиотехника, 1972, т. 8, вып. 3, С. 419-424.
45. **Вичес А.И., Смирнов В.А.** Исследование влияния нестабильности контакта на параметры выходного сигнала при магнитной записи с ВЧ подмагничиванием. // Радиотехника, 1977, № 1. С. 70-76.
46. **Воробель Р.А., Журавель И.М.** Повышение контраста изображений с помощью модифицированного метода кусочного растяжения // Отбор и обработка информации. – № 14 (90). – 2000. – С. 116 – 121.
47. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. – 5-е изд. М., Физматгиз, 2004. 560 с.
48. **Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г.** Осцилляционные матрицы, ядра и малые колебания механических систем. М. - Л., Физматгиз, 1950. 360 с.
49. **Гильбо Е.П., Челпанов И.Б.** Обработка сигналов на основе упорядоченного выбора (мажоритарное и близкое к нему преобразования). М., Сов. радио, 1976. 344 с.
50. **Голомб С.В.** и др. Цифровые методы в космической связи. М., ИИЛ, 1969. 241 с.
51. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления. М., Мир, 1999. 549 с.
52. **Гольдберг А.П.** Характеристики систем подавления импульсных помех. // Электросвязь, 1966, № 2. С. 31-42.
53. **Гончаров А.В., Лазарев В.И., Пархоменко В.И., Штейн А.Б.** Техника магнитной видеозаписи. М., Энергия, 1970. 328 с.
54. **Грольман А.К., Кунина Л.К., Слаев В.А.** Переменная линия задержки с использованием точной магнитной записи. // Тез. докл. XX Украинской республиканской научно - технической конференции, посвященной 75-летию со дня изобретения радио. Киев, КДНТП, 1970. С. 3.
55. **Грольман А.К., Слаев В.А., Цивирко Г.П.** К вопросу построения устройств ввода в коррелятор. // Тез. докл. I Всесоюзной научно - технической конференции по теории и технике магнитной записи. Киев, КДНТП, 1969. С. 54-55.
56. **Гудман.** Сокращение избыточности с помощью двоичного линейного преобразования. // ТИИЭР, 1967, т. 55, № 3. С. 248-249.
57. **Дьяконов В.П., Абраменкова И.** MATLAB. Обработка сигналов и изображений. СПб.: Питер, 2002.
58. **Железнов Н.А.** Некоторые вопросы теории информационных электрических систем. Л., ЛКВВИА им. А.Ф. Можайского, 1960. 156 с.

59. Злотников С.А., Маригодов В.К. Оценка точности аппроксимации и оптимизация характеристик предсказаний. // Труды учебных институтов связи, 1968, № 344. С. 90-96.
60. Зюко А.Г. Помехоустойчивость и эффективность систем связи. М., Связь, 1972. 360 с.
61. Иохвидов И.О. Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы. М., Наука, 1974. 264 с.
62. Кавалеров Г.И., Мандельштам С.М. Введение в информационную теорию измерений. М., Энергия, 1974. 376 с.
63. Ким В., Ярославский Л.П. Ранговые алгоритмы обработки изображений. Ин-т проблем передачи информ. АН СССР. - Рук. деп. в ВИНТИ 30.05.1985 г. № 3793-85. - М., 1985. - 40 с.
64. Кловский Д.Д. Теория передачи сигналов. М., Связь, 1973. 376 с.
65. Клюев Н.И. Информационные основы передачи сообщений. М., Сов. радио, 1966. 360 с.
66. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1972. 496 с.
67. Колтик Е.Д., Цивирко Г.П., Грольман А.К., Слаев В.А. Устройство ввода данных в коррелометр. / "Важнейшие результаты научно - исследовательских работ 1970 года". Л., ВНИИМ, 1971. С. 131-133.
68. Котельников В.А. Теория потенциальной помехоустойчивости. М., Госэнергоиздат, 1956. 151 с.
69. Крамер Х. Ковариационная матрица речевых сигналов вокодера. // ТИИЭР, 1967, т. 3, № 56. С. 219-220.
70. Краутер, Рейдер. Эффективное кодирование сигналов в каналах вокодера с помощью их линейного преобразования. // ТИИЭР, 1966, т. 54, № 11. С. 104-105.
71. Лебедев Д.С. Линейные двумерные преобразования изображений, увеличивающие помехоустойчивость передачи. / В сб. "Иконика". М., Наука, 1968. С. 15- 27.
72. Левенштейн В.И. Применение матриц Адамара к одной задаче кодирования. // Проблемы кибернетики, 1961, вып. 5. С. 123-136.
73. Лекции по теории систем связи. / Под ред. Багдади Е. Дж. М., Мир, 1964. 402 с.
74. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. М., Наука, 1966. 176 с.
75. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1958. 334 с.
76. Лозв М. Теория вероятностей. / Пер. с англ. под ред. Прохорова Ю.В. М., ИИЛ, 1962. 719 с.
77. Мановцев А.П. Основы теории радиотелеметрии. М., Энергия, 1973. 592 с.
78. Маригодов В.К. К вопросу о помехозащищенности АМ и ЧМ сигналов при наличии предсказаний. // Радиотехника, 1970, т. 25, № 1. С. 21-24.
79. Маригодов В.К. О помехоустойчивости метода предсказаний непрерывных сообщений. // Известия ВУЗов СССР, серия "Радиоэлектроника", 1971, т. 14, № 8. С. 875-880.
80. Маригодов В.К. Об уменьшении вероятности ошибки в каналах с очень глубокими замираниями. // Респ. межвед. сб. "Отбор и передача информации". Киев, Наукова думка, 1973, вып. 34. С. 56-59.
81. Маригодов В.К. Оптимальные предсказания радиоимпульсных сигналов. // Респ. межвед. сб. "Отбор и передача информации". Киев, Наукова думка, 1973, вып. 34. С. 53-56.
82. Маригодов В.К. Эффективность предсказаний при аддитивных помехах с произвольным энергетическим спектром. // Известия ВУЗов СССР, серия "Радиотехника", 1969, т. 12, № 7. С. 746-749.
83. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М., Наука, 1972. 232 с.
84. Медяник А.И. Вписанный в куб правильный симплекс и матрицы Адамара полуциркулярного типа // Матем. физика, анализ, геометрия, 1997, т. 4, № 4. С. 458-471.
85. Медяник А.И. О построении матриц Адамара // Матем. физика, анализ, геометрия, 1995, т. 2, № 1. С. 87-93.
86. Методы и аппаратура для регистрации быстропеременных величин. / Сб. статей. М., ОНТИприбор, 1966. 200 с.
87. Мироновский Л.А. Функциональное диагностирование динамических систем. М., МГУ, 1998. 304 с.
88. Мироновский Л.А. Функциональное диагностирование динамических систем (обзор). // Автоматика и телемеханика, 1980, № 8. С. 96-121.
89. Мироновский Л.А., Слаев В.А. А.с. № 339922, МКИ G06k 7/00. Устройство для записи и воспроизведения информации на ленточном носителе. № 1384136/18-24; заявлено 10.12.69; опубл. 24.05.72. - УДК 681.327.11(088.8) // Открытия. Изобретения. 1972, № 17. С. 158.

90. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** А.с. № 349113, МКИ H04I 3/02. Устройство для получения сигнала с постоянной дисперсией. № 1474793/26-9; заявлено 24.09.70; опубл. 23.08.72. - УДК 621.373.43(088.8) // Открытия. Изобретения, 1972, № 25. С. 204.
91. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** А.с. № 355648, МКИ G11B 5/02. Способ магнитной записи и воспроизведения аналогового сигнала. № 1383642/18-10, заявлено 10.12.69; опубл. 16.10.72. - УДК 681.327.63(088.8) // Открытия. Изобретения. 1972, № 31. С. 173.
92. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** А.с. № 417837, МКИ G11B 5/86. Запоминающее устройство. № 1474801/18-24; заявлено 24.09.70; опубл. 28.02.74 - УДК 681.327(088.8) // Открытия. Изобретения. 1974, №8. С. 149.
93. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** А.с. № 432684, МКИ H04I 1/00. Устройство для линейного предсказания сигнала. № 1762858/26-9; заявлено 27.03.72; опубл. 15.06.74. - УДК 621.394.5(088.8) // Открытия. Изобретения, 1974, № 22. С. 186-187.
94. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** А.с. № 433526, МКИ G08c 19/16. Устройство для передачи аналогового сигнала. № 1819586/18-24; заявлено 11.08.72; опубл. 25.06.74. - УДК 621.398:654.94(088.8) // Открытия. Изобретения. 1974, № 23. С. 142.
95. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** А.с. № 476677, МКИ H03k 13/02. Устройство для преобразования аналогового сигнала. № 1860752/26-9; заявлено 19.12.72; опубл. 05.07.75 - УДК 621.376.56(088.8) // Открытия. Изобретения. 1975, № 25. С. 161.
96. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** А.с. № 477549, МКИ H04I 3/02. Устройство для преобразования сигнала. № 1906139/26-21; заявлено 12.04.73; опубл. 15.07.75. - УДК 681.3.055(088.8) // Открытия. Изобретения. 1975, № 26. С. 149.
97. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** А.с. № 572936, МКИ H04B 1/10. Приемник аналоговых сигналов. № 1968655/09; заявлено 10.10.73; опубл. 15.09.77. - УДК 621.396:621.5(088.8) // Открытия. Изобретения. 1977, № 34. С. 158-159.
98. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** А.с. № 932637, МКИ H04I 3/02. Устройство для подавления импульсных помех в сигнале с информационной избыточностью. № 2962781/18-09; заявлено 16.07.80; опубл. 30.05.82. - УДК 621.391.837: 681.3(088.8) // Открытия. Изобретения. 1982, № 20. С. 293.
99. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** Выравнивание дисперсии нестационарного сигнала. // Тез. докл. XXV научно - технической конференции. Л., ЛИАП, 1972.
100. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** Выравнивание дисперсии нестационарного сигнала. // Радиотехника, 1975, № 5. С. 24-27.
101. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** Инварианты в метрологии и технической диагностике. // Измерительная техника, 1996, № 6. С. 3-14.
102. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** К вопросу повышения помехоустойчивости хранения измерительной информации в аппаратуре точной магнитной записи. // Тез. докл. XX Украинской республиканской научно-технической конференции, посвященной 75-летию со дня изобретения радио. Киев, КДНТП, 1970. С. 12-13.
103. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** Компьютерное моделирование чебышевской фильтрации. // Тезисы докладов III международной НТК "Актуальные проблемы электронного приборостроения". Новосибирск, 1996, т. 6, ч. 1. С. 59-60.
104. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** Метод линейных предсказаний с избыточностью для коррекции помех. // Труды метрологических институтов СССР "Исследования в области теории и техники измерительных систем". Л., 1975, вып. 170 (230). С. 31-34.
105. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** Оптимальная фильтрация по минимаксному критерию. // Труды международной НТК "Актуальные проблемы электронного приборостроения". Новосибирск, 1992, т. 6, ч. 2. С. 9-14.
106. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** Оптимальное чебышевское предсказание и фильтрация. / Депонированная рукопись. ВИНТИ, № 6635 - В 89, 01.11.89. 28 с.
107. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** Оптимальное чебышевское предсказание и фильтрация. // Измерительная техника, 2002, № 2. С. 12-18.
108. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** Способ помехоустойчивого хранения и передачи аналоговой информации. // Доклады IV симпозиума по проблеме избыточности в информационных системах. Л., 1970, ч. II. С. 689-697.
109. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** Техническая диагностика динамических систем на основе алгебраических инвариантов. // Тез. докл. III Международного симпозиума ИМЕКО "Техническая диагностика". М., 1983. С. 70-72.

110. **Мироновский Л.А., Слаев В.А.** Уменьшение импульсных помех в аналоговых сигналах. // Автометрия, 1973, № 6. С. 49-54.
111. **Мироновский Л.А., Слаев В.А., Финожёнков Г.А.** А.с. № 1080715. Устройство для передачи аналогового сигнала. № 3509222; заявлено 03.11.82; опубл. 15.11.83 // Открытия. Изобретения. 1984, № 10. С. 208.
112. **Новицкий П.В.** Основы информационной теории измерительных устройств. Л., Энергия, 1968. 248 с.
113. **Ольховский Ю.Б., Новосёлов О.Н., Мановцев А.П.** Сжатие данных при телеизмерениях. М., Сов. радио, 1971. 304 с.
114. **Отт Г.** Методы подавления шумов и помех в электронных системах. М., Мир, 1979. 317 с.
115. **Пирс У.** Линейные действительные коды и устройства кодирования. // Экспресс - информация, серия "Передача информации", 1968, № 46. С. 19-34.
116. **Полиа Г., Сегё Г.** Изопериметрические неравенства в математической физике. М., ГИФМЛ, 1962. 336 с.
117. **Понсен.** Использование преобразования Адамара для кодирования и сжатия сигналов изображения. // Зарубежная радиоэлектроника, 1972, № 3. С. 30-56.
118. **Пратт В.К., Кейн Дж., Эндрюс Г.К.** Кодирование изображений посредством преобразования Адамара. // ТИИЭР, 1969, т. 57, № 1. С. 66-77.
119. **Прэйт У.** Цифровая обработка изображений. М., Мир, 1982, кн. 1. 312 с., кн. 2. 480 с.
120. **Рози А.М.** Теория информации и связи. М., Энергия, 1971. 184 с.
121. **Рудаков П., Сафонов И.** Обработка сигналов и изображений Matlab 5.x. М., Диалог-МИФИ. 2000. 272 с.
122. **Сейдж Э., Мелс Дж.** Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. / Пер. с англ. под ред. Левина Б.Р. М., Связь, 1976. 496 с.
123. **Селяков И.С.** Анализ и компьютерное моделирование STRIP-преобразования изображений. Магистерская дисс. СПб, ГУАП. 2005
124. **Сиберт У.М.** Цепи, сигналы, системы. / Пер. с англ. В 2-х ч. М., Мир, 1988. Ч. 1. 336 с., Ч. 2. 360 с.
125. **Синай Я.Г.** Наименьшая ошибка и наилучший способ передачи стационарных сообщений при линейном кодировании и декодировании в случае Гауссовских каналов связи. // Проблемы передачи информации. М., Изд. АН СССР, 1959, вып. 2. С. 40-48.
126. **Слаев В.А.** Метрологическое обеспечение аппаратуры магнитной записи: Научное издание. – СПб., НПО «Мир и Семья», 2004. – 174 с.: ил.
127. **Слаев В.А.** Разработка средств измерений для оценки метрологических характеристик аппаратуры магнитной записи и исследование методов повышения ее точности. Л.: ВНИИМ, 1973. 201 с. (Дисс. на соиск. учен. степени канд. техн. наук).
128. **Слаев В.А., Мироновский Л.А.** А.с. № 604161, МКИ H04B 3/04. Устройство для передачи аналогового сигнала. № 2194423/09; заявлено 26.11.75; опубл. 25.04.78. - УДК 621.391.15:621.397(088.8) // Открытия. Изобретения. 1978, № 15. С. 207-208.
129. **Слаев В.А., Мироновский Л.А., Игнатъев М.Б., Цивирко Г.П.** А.с. № 598255, МКИ H04B 1/10. Устройство для селекции сигналов с избыточностью. № 2348898/18-09; заявлено 15.04.76; опубл. 15.03.78. - УДК 621.391.837: 621.397(088.8) // Открытия. Изобретения. 1978, № 10. С. 211.
130. **Слаев В.А., Налетов В.В.** Использование введения избыточности для повышения устойчивости систем передачи информации к импульсным помехам. // Доклады VIII Симпозиума по проблеме избыточности в информационных системах. Л., 1983, ч. 3. С. 161–164.
131. **Сойфер В.А.** Компьютерная обработка изображений. Соросовский образовательный журнал № 2. 1996.
132. **Сорокин В.Н.** Распознавание речи при помощи анализа ее изображения. // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1966, № 5. С. 93-98.
133. **Справочник по технике магнитной записи.** / Под ред. Порицкого О.В., Травникова Е.Н. Киев, Техника, 1981. 319 с.
134. **Статистика ошибок при передаче цифровой информации.** / Сборник переводов под ред. Самойленко С.И. М., Мир, 1966. 304 с.
135. **Стахов А.П., Лихтциндер Б.Я., Орлович Ю.П., Сторожук Ю.А.** Кодирование данных в информационно-измерительных системах. Киев, Техника, 1985. 127 с.
136. **Суслонов С.А.** Синтез сигналов с фазоамплитудными предискажениями. // Известия ВУЗов СССР, серия "Радиоэлектроника", 1971, т. 14, № 8. С. 881–888.

137. Теория информации и ее приложения (сборник переводов). / Под ред. Харкевича А.А. М., ГИФМЛ, 1956. 328 с.
138. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. Сб. переводов. / Под ред. Железнова Н.А. М., ИИЛ, 1953. 288 с.
139. **Тихонов В.И.** Статистическая радиотехника. М., Сов. радио, 1966. 678 с.
140. **Трахтман А.М.** Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М., Сов. радио, 1972. 352 с.
141. Управление вычислительными процессами. / Под ред. Игнатъева М.Б. Л., ЛГУ, 1973. 298 с.
142. **Фалькович С.Е.** Оценка параметров сигнала. М., Сов. радио, 1970. 336 с.
143. **Фомин А.Ф.** Помехоустойчивость систем передачи непрерывных сообщений. М., Сов. радио, 1975. 352 с.
144. **Френкс Л.** Теория сигналов. М., Сов. радио, 1974. 344 с.
145. Функции с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике. / Перевод и научная обработка Размахнина М.К., Яковлева В.П. М., Сов. радио, 1971. 256 с.
146. **Харкевич А.А.** Борьба с помехами. М., Наука, 1965. 276 с.
147. **Харкевич А.А.** Спектры и анализ. М., ГИФМЛ, 1962. 236 с.
148. **Хармут Х.Ф.** Передача информации ортогональными функциями. М., Связь, 1975. 267 с.
149. **Хлопотин В.С.** Об одном способе кодирования информации для записи на магнитную ленту. // Вопросы радиоэлектроники, серия "Электронно - вычислительная техника", 1969, вып. 3. С. 38-43.
150. **Хромов Л.И., Ресин В.И.** Информационный расчет линейных предсказывающих устройств в телевидении. // Радиотехника, 1965, т. 20, № 2. С. 41-44.
151. **Хургин Я.И., Яковлев В.П.** Фinitные функции в физике и технике. М., Наука, 1971. 408 с.
152. **Хэмминг Р.В.** Теория кодирования и теория информации. М., Радио и связь, 1983. 176 с.
153. **Цыбаков Б.С.** Линейное кодирование изображений. // Радиотехника и электроника, 1962, т. 7, № 3. С. 375-385.
154. **Ширман Я.Д.** Разрешение и сжатие сигналов. М., Сов. радио, 1974. 360 с.
155. **Широков С.М., Григорьев И.В.** "Метод подавления импульсных помех при обработке сигналов и изображений с использованием нелинейных фазовых фильтров." СГАУ, журнал "Компьютерная оптика" №16 1996
156. **Штейн В.М.** О расчете линейных предсказывающих и корректирующих устройств. // Радиотехника, 1956, т. 11, № 1. С. 60-63.
157. **Эндрюс Г.** Применение вычислительных машин для обработки изображений. М., Энергия, 1977. 160 с.
158. **Эндрюс К.А., Дэвис Дж.М., Шварц Г.Р.** Адаптивное сжатие данных. // ТИИЭР, 1967, т. 55, № 3. С. 25-38.
159. **Юдович С.В.** Помехоустойчивая компьютерная обработка сигналов и изображений методом чебышевской фильтрации с использованием преобразования Адамара. СПб., СПбГУАП, 2001. 64 с. (Дисс. на соиск. учен. степени магистра).

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----------|
| Предисловие..... | 3 |
| Введение..... | 5 |
| 1. Стрип-метод преобразования сигналов..... | 14 |
| 1.1. Стрип-метод линейных предсказаний и решаемые им задачи..... | 14 |
| 1.2. Обеспечение непрерывности преобразованного сигнала..... | 21 |
| 1.3. Выравнивание дисперсии нестационарного сигнала..... | 24 |
| 1.4. Выравнивание информативности нестационарного сигнала..... | 27 |
| 1.5. Сужение спектра предсказанного сигнала..... | 30 |
| 2. ОПТИМАЛЬНОЕ ЧЕБЫШЕВСКОЕ ПРЕДСКАЖЕНИЕ И ФИЛЬТРАЦИЯ..... | 34 |
| 2.1. Предварительные замечания..... | 34 |
| 2.2. Постановка задачи..... | 36 |
| 2.3. Оценка потенциальной помехоустойчивости в случае однократных помех..... | 38 |
| 2.4. Оценка потенциальной помехоустойчивости в случае кратных помех..... | 39 |
| 2.5. Синтез оптимального чебышевского фильтра..... | 41 |
| 2.6. Квазиоптимальное предсказание..... | 45 |
| 2.7. Введение избыточности в стрип-методе линейных предсказаний..... | 48 |
| Снижение мощности помех в восстановленном сигнале..... | 48 |
| Обнаружение, локализация, идентификация и коррекция помех..... | 49 |
| Возможности применения стрип-метода в стеганографии..... | 57 |
| 3. СТРИП-МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ..... | 59 |
| 3.1. Двумерное стрип-преобразование..... | 59 |
| 3.2. Выбор оптимальных матриц преобразования..... | 62 |
| 3.3. Примеры стрип-преобразования изображений..... | 65 |
| 3.4. Определение критической кратности помех..... | 73 |
| 3.5. Корневые изображения двустороннего стрип-преобразования..... | 76 |
| 4. АППАРАТУРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СТРИП-МЕТОДА..... | 86 |
| 4.1. Реализация стрип-метода с использованием магнитной записи–воспроизведения..... | 86 |
| 4.2. Реализация стрип-метода с циклической матрицей..... | 89 |
| 4.3. Устройство выравнивания дисперсии..... | 90 |
| 4.4. Устройство для введения информационной избыточности..... | 91 |
| Заключение..... | 97 |
| Приложение..... | 98 |
| Библиографический список..... | 113 |