

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

Л. А. Мироновский

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

*Допущено Учебно-методическим объединением вузов
по университетскому политехническому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших
учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки
230200 Информационные системы*

Санкт-Петербург
2009

УДК 681.511.01

ББК 32.965.4

М64

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор *А. П. Шенета*

доктор технических наук, профессор *А. В. Небылов*

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Мироновский Л. А.

М64 Моделирование линейных систем: учебное пособие /
Л. А. Мироновский. – СПб.: ГУАП, 2009. – 244 с.: ил.
ISBN 978-5-8088-0459-3

Изложены общие вопросы моделирования, дана классификация моделей, описаны основные задачи и этапы моделирования. Рассмотрена методика структурного моделирования широко распространенных в инженерной практике систем, математическая модель которых может быть задана в виде линейных дифференциальных уравнений или передаточных функций.

Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки 230200 «Информационные системы», 220100 «Информатика и вычислительная техника» и родственным направлениям. Оно будет также полезно магистрантам и аспирантам, которым приходится сталкиваться с необходимостью компьютерного анализа линейных динамических систем и их математических моделей.

УДК 681.511.01

ББК 32.965.4

ISBN 978-5-8088-0459-3

© ГУАП, 2009

© Л. А. Мироновский, 2009

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебная дисциплина «Моделирование» читается в большинстве технических вузов. Она охватывает широкий круг вопросов от общей теории подобия до особенностей компьютерного моделирования в различных прикладных областях. Многие из этих вопросов достаточно подробно освещены в имеющейся учебной литературе [1–10]. В данном пособии рассматривается моделирование линейных систем, которые могут быть описаны обыкновенными дифференциальными уравнениями или передаточными функциями. Системы такого вида называются динамическими, соответствующие математические модели широко используются в теории автоматического управления, электротехнике, механике, баллистике, космонавтике и других областях.

При компьютерном моделировании динамических систем можно выделить три подхода – численный, структурный и символьный. В первом случае входные данные представляют собой массивы чисел или числовые матрицы, которые обрабатываются соответствующими программами. Численный подход является основным для таких математических пакетов, как **MATHCAD** и **MATLAB**. Во втором случае исходная математическая модель представляется в виде структурной схемы из сумматоров, интеграторов и других вычислительных блоков. Она набирается с помощью специального редактора на дисплее, после чего моделирование выполняется автоматически. Такой подход (иногда его называют визуальным программированием) используется в пакетах **VISSIM**, **SIMULINK**, **LABVIEW**. В третьем случае исходная математическая модель задается математическими формулами, записанными относительно символьных переменных. Результат получается в виде математических соотношений между этими переменными. Символьный подход реализован в пакетах **DERIVE**, **MAPLE**, **MATHEMATICA**.

Следует заметить, что на практике границы между этими подходами размыты и наиболее эффективным зачастую оказывается их сочетание и гибридизация. По этому пути пошли, в частности, разработчики отечественных пакетов имитационного моделирования **AnyLogic** и **Model Vision Studium (MVS)**.

Настоящее учебное пособие посвящено главным образом структурному подходу. Ранее такой подход, известный как метод Кельвина или метод понижения производных, использовал-

ся в аналоговых вычислительных машинах, а теперь послужил основой для программных систем визуального моделирования.

Пособие написано по материалам лекций, которые автор читал на протяжении ряда лет в ГУАП для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 230200 «Информационные системы» и 220100 «Информатика и вычислительная техника».

Оно включает семь разделов, в которых рассматриваются общие вопросы моделирования, излагается методика структурного моделирования дифференциальных уравнений, передаточных функций и функций времени с помощью схем на сумматорах и интеграторах, анализируются свойства линейных моделей, такие как устойчивость, управляемость, наблюдаемость и минимальность.

Пособие содержит большое количество примеров, в конце каждого раздела приведены задачи и упражнения. Методически оно дополняет учебное пособие [2], посвященное моделированию дискретных линейных систем.

1. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Человечество пользуется моделями и моделированием уже много тысяч лет. Так, в III тыс. до н. э. в литейном деле применялись технологические модели-формы для литья из бронзы и драгоценных металлов (оружие, украшения, предметы культа). Во втором веке до нашей эры в античной Греции использовались геометрически подобные модели архитектурных сооружений и разнообразных механизмов.

В XVI–XVII веках появились модели взаимного движения компонентов в технических устройствах. Отметим также модели чистого разума – идеальные построения ранней науки типа «музыка сфер» (Архимед, Птолемей, Кеплер).

Превращение моделирования в научный метод происходит в 70-х годах XIX века, когда создаются теория подобия и гидродинамика. В частности, У. Фруд (1810–1879) сумел осуществить пересчет модельных данных, полученных в опытном бассейне на уменьшенной модели корабля, на натуру по двум не совпадающим критериям подобия, разделив полное сопротивление судна на волновое и трение.

Начало XX века характеризуется появлением и широким использованием аналоговых моделирующих устройств, достигших своего расцвета в 40–50-е годы. Ближе к концу XX века аналоговые вычислительные машины вытесняются цифровыми компьютерами. Сегодня компьютерные модели применяются во всех сферах жизни – в банковском деле и сельском хозяйстве, в авиации и космонавтике, в науке и искусстве.

Накоплен большой опыт по созданию разнообразных видов моделей различной степени сложности в каждой из перечисленных областей. Большинство из разработанных моделей и методов моделирования существенно опирается на использование теории соответствующей предметной области.

Это привело к тому, что модели и методика моделирования, используемые, допустим, при моделировании нефтяных и газовых сетей, радикально отличаются от моделей динамики летательных аппаратов или экологических моделей. Поэтому некоторые специалисты придерживаются точки зрения, согласно которой единой теории моделирования не существует, а имеются лишь ее отдельные фрагменты внутри различных предметных областей, да и те следует рассматривать как части соответствующих прикладных дисциплин.

Альтернативой такому локальному подходу к моделированию является точка зрения, которая подчеркивает общность задач, идей и методов, используемых при моделировании в различных прикладных областях. Здесь можно провести параллель с другой междисциплинарной дисциплиной – метрологией, для которой также характерно наличие, с одной стороны, общих метрологических проблем (теория измерений, анализ погрешностей, обработка результатов измерений) и, с другой стороны – специальных теорий и методов измерений различных физических величин (механические и электрические измерения, ядерная спектроскопия, томография, астрономические измерения и др.).

Достоинством междисциплинарного подхода является возможность использования единой терминологии и выработки некоторых общих принципов решения основных задач моделирования. Такие понятия, как математическое и имитационное моделирование, качество моделирования, адекватность моделей и другие, в равной степени применимы в различных прикладных областях. В качестве примеров общих принципов моделирования можно назвать применение теории подобия и теории инвариантов, технологию синтеза моделей, методы анализа адекватности моделей.

Таким образом, глобальный подход к моделированию не противоречит локальному, а дополняет его, акцентируя внимание на общих методологических и междисциплинарных проблемах и методах их решения.

1.1. Основные понятия и определения

Понятия «модель» и «моделирование» обладают большой универсальностью и глубиной. С наиболее общих позиций они исследуются наряду с другими фундаментальными понятиями в рамках философии. Ниже кратко затрагиваются три философских аспекта этих понятий, связанных с определением модели и моделирования, проблемой адекватности моделей и некоторыми историческими заблуждениями, имевшими место при толковании понятия моделей.

1.1.1. Определение модели и моделирования

Одно из основных назначений моделей – изучение физических процессов и технических систем путем моделирования.

Моделирование как способ познания окружающего мира уходит своими корнями в глубокое прошлое. Вся история развития естественных наук – это история создания и совершенствования тех или иных моделей. Здесь можно назвать геоцентрическую и гелиоцентрическую модели Солнечной системы, предложенные Птолемеем и Коперником; модели строения вещества, последовательно сменявшие друг друга в химии; различные модели атомного ядра (капельная, планетарная, квантовая); математические модели, описывающие взаимодействия тел (Ньютон, Эйнштейн) и многие другие. Вопросы определения понятий модели и моделирования относятся к сфере философии. Коротко их можно сформулировать следующим образом.

Модель – это естественный или искусственный объект, находящийся в соответствии с изучаемым явлением или какой-либо его стороной.

Другими словами, модель (от лат. *modulus* – мера) – это объект, замещающий оригинал и обеспечивающий воспроизведение некоторых его свойств. Замещение одного объекта другим с целью получения информации о требуемых свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели называется моделированием.

Моделирование – метод опосредованного познания, при котором изучаемый объект находится в соответствии с другим объектом (моделью), способным в том или ином смысле замещать изучаемый объект на некоторых стадиях познавательного процесса.

Таким образом, моделирование может быть определено как представление объекта моделью для получения информации об этом объекте путем проведения экспериментов с его моделью. Теория замещения одних объектов (оригиналов) другими объектами (моделями) и исследования свойств объектов на их моделях называется *теорией моделирования*.

Определенный недостаток приведенных формулировок в том, что они ориентированы, в основном, на гносеологическую и исследовательскую функцию моделей, недостаточно охватывая другие возможные функции (игровую, гедонистическую и т. п.).

Более полное определение модели звучит следующим образом:

Модель есть специфический информационный объект (в форме мысленного образа, описания его на некотором языке или

воспроизводящей его системы), который отражает свойства и характеристики объекта-оригинала произвольной природы, существенные для задачи, решаемой субъектом.

Таким образом, модель определяется совместным заданием объекта и решаемой субъектом задачи, которая служит информационным фильтром для отбора существенных свойств и характеристик объекта.

Приведенные определения являются весьма широкими и в то же время отражают главные черты понятий «модель» и «моделирование».

Укажем на два возможных заблуждения, которые могут иметь место при толковании понятия модели. Первое из них связано с требованием наглядности модели. Такое требование господствовало в физике XIX века, когда, по причине «ненаглядности», «непредставимости» отвергались молекулярно-кинетическая теория Больцмана и квантовая физика. В определении модели, приведенном выше, ничего не говорится о наглядности, и это совершенно правильно. При компьютерном моделировании обычно используют так называемые математические модели (уравнения, описывающие объект), и о наглядности, как правило, говорить не приходится.

Второе возможное заблуждение известно как «фетишизация моделей». Оно связано с чрезмерным доверием к результатам моделирования и перенесению их на слишком широкий круг объектов или явлений и в своем крайнем выражении сводится к утверждению о возможности познания мира аналитически, не прибегая к опытам. Например, во время расцвета ньютоновой механики, с помощью которой удалось очень полно описать движение механических систем, появилась теория «механистического материализма». К числу ее основателей относился Лаплас, который утверждал, что если бы в некоторый момент времени удалось измерить положения и скорости всех материальных тел, то все будущее Вселенной, равно как и ее прошлое, можно было бы вычислить аналитически с помощью законов механики.

Фактически же никакая модель не может полностью соответствовать оригиналу, и всегда отражает только отдельные его стороны, свойства. Так и упомянутая «механическая модель» мира не отражает многих аспектов и взаимодействий (химических, биологических, социальных) и потому является неполной, приближенной. Неполно она отражала и механику взаимодействия,

что стало очевидным после создания теории относительности. Точно так же при компьютерном моделировании надо с осторожностью истолковывать полученные результаты, не распространяя их за границы достоверности модели.

1.1.2. Проблема адекватности модели

Одной из центральных проблем в теории моделирования является проблема адекватности модели и исследуемого объекта. Любая модель представляет собой упрощение реальной ситуации. Хорошая модель учитывает существенные черты явления и, что не менее важно, игнорирует несущественные. В связи с этим возникает вопрос о выборе критериев для оценки адекватности модели, ее близости к оригиналу (эталону). Имеются два подхода к решению этой проблемы: сравнение поведения объекта и модели (сигналов) и сравнение их структуры (параметров).

Согласно первому подходу (его можно назвать функциональным) объект и модель считаются близкими, если с достаточной точностью совпадает их поведение, т. е. близки реакции на одинаковые входные воздействия (рис. 1.1).

Такой подход обычно применяют для систем с неизвестным математическим описанием.

Согласно второму подходу (его можно назвать параметрическим) объект и модель считаются близкими, если совпадают (с заданной точностью) их параметры, например коэффициенты дифференциальных уравнений или другие численные характеристики. Параметрический подход удобен для объектов с известным математическим описанием.

Если результаты моделирования подтверждаются экспериментально и могут служить основой для прогнозирования процессов, протекающих в исследуемых объектах, то говорят, что модель адекватна объекту. При этом адекватность модели зависит от цели моделирования и принятых критериев.



Рис. 1.1. Проверка адекватности модели

Описанные подходы не эквивалентны и не сводятся друг к другу, поскольку из близости параметров не следует, вообще говоря, близость реакций и обратно. Можно привести много примеров, когда поведение систем с близкими параметрами качественно различается или, наоборот, когда системы с сильно различающимися параметрами ведут себя почти одинаково. Первая ситуация характерна для значений параметров, близких к бифуркационным, вторая – для параметров с малыми коэффициентами чувствительности.

Предпочтительность того или иного подхода определяется спецификой предметной области и решаемой задачей. Методически оба подхода могут быть объединены в рамках теории инвариантов. Суть анализа адекватности с помощью теории инвариантов сводится к выявлению некоторых характеристик объекта, остающихся неизменными при нормальном функционировании. Далее эти характеристики (инварианты) используются в качестве прямых или косвенных критериев адекватности. Согласно сказанному выше инварианты могут быть двух типов – параметры (параметрические инварианты) и сигналы (сигнальные инварианты).

1.2. Виды моделей

Разнообразие моделей, применяемых в различных областях науки и техники, чрезвычайно велико. Их можно классифицировать по различным признакам.

С точки зрения сложности и степени детализации можно определить следующую иерархию моделей. На ее первом уровне находятся наиболее простые модели – вербальные или лингвистические. В этих моделях причина со следствием связывается с помощью языковых средств. Лингвистические модели наиболее распространены в гуманитарных науках (филология, юриспруденция) и ряде естественных наук (ботаника, биология). Второй уровень иерархии подразумевает введение формализованной структуры и предполагает задание моделей с помощью структурных, функциональных и принципиальных схем. Введение дополнительных переменных – входных, выходных и внутренних сигналов, позволяет перейти к третьему уровню иерархии, включающему сетевые, графические, функционально-логические и информационные модели. На четвертом уровне иерархии располагаются математические модели, обеспечивающие наиболь-

ший уровень детализации. Они отражают не только причинно-следственные связи, но и динамические свойства объектов, задаваемые в математической (аналитической) форме дифференциальными и другими уравнениями.

Второй признак классификации моделей учитывает способ их реализации.

Первоначально в практике моделирования использовались три вида моделей – геометрические, математические и физические. Названные модели представляют собой конкретизацию общего определения модели, учитывающую тип соответствия объекта и модели.

1. Геометрические модели. Этот вид моделей отражает внешние, наглядные стороны объекта и используется в основном для демонстрационных целей. Примерами могут служить модели архитектурных сооружений, макеты кораблей, экспонаты выставок, туристские схемы, географические карты и т. п.

2. Математические модели. Этот вид моделей лишен внешнего сходства с объектом, но отражает более глубокие свойства объекта, касающиеся его реакции на внешние воздействия. При математическом моделировании требуется сходство математических уравнений (обычно алгебраических или дифференциальных), описывающих объект и модель. Именно этот вид моделей получил широкое распространение в вычислительной технике.

3. Физические модели. При физическом моделировании требуется более полное отражение свойств объекта: кроме внешнего сходства и одинакового математического описания модель и объект должны иметь одинаковую физическую природу. Физические модели находят довольно широкое применение в технике. Достаточно назвать действующие макеты электростанций, продувку моделей самолетов в аэродинамических трубах, тренажерные комплексы, используемые при обучении пилотов и т. д.

Сопоставляя физические и математические модели, можно отметить следующее. Физические модели более наглядны, более полно отражают процессы, протекающие в исследуемом объекте, но имеют ограниченную область применения. Практически для каждой новой задачи приходится создавать новую физическую модель, что далеко не всегда удобно и экономически оправданно. Поэтому физические модели находят применение в тех случаях, когда производится многократное, в течение длительного времени исследование объектов одного класса.

Главным достоинством математических моделей является их универсальность, связанная с тем, что различные объекты, процессы и явления описываются одними и теми же математическими уравнениями. Поэтому, построив вычислительную машину, способную решать, например, дифференциальные уравнения, мы тем самым получаем возможность моделировать на ней широкий круг процессов и явлений (физических, химических, технических, экономических, социальных и пр.). Именно на этом пути были созданы вначале аналоговые, а затем цифровые вычислительные машины.

На рис. 1.2 приведена классификация моделей по трем основным признакам – назначению, области применения и способу реализации.

Левая ветвь классификации отражает деление моделей по их назначению (цели, решаемым задачам). Подобие процесса, протекающего в модели, реальному процессу является не целью, а условием правильного функционирования модели и поэтому в качестве цели должна быть поставлена задача изучения какой-либо стороны функционирования объекта или применения модели в той или иной области человеческой деятельности.

Из нескольких десятков возможных целей на рисунке приведены лишь четыре.

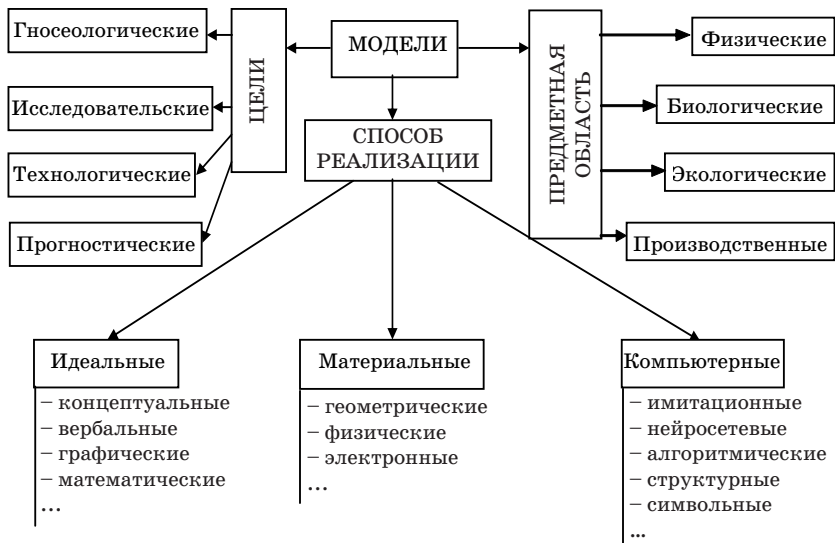


Рис. 1.2. Классификация моделей

Гносеологические модели используются в науке для познания окружающего нас мира. По сути дела вся история развития науки сводится к созданию тех или иных гносеологических моделей, их изучению и совершенствованию. Определяя гносеологическую роль теории моделирования, т. е. ее значение в процессе познания, необходимо выделить то общее, что присуще моделям различных по своей природе объектов и явлений реального мира. Оно заключается в наличии некоторой структуры (статической или динамической, материальной или мысленной), которая подобна структуре данного объекта. В процессе изучения модель выступает в роли относительно самостоятельного объекта, позволяющего получить при исследовании новые знания.

Исследовательские модели широко применяются в технике, медицине, физике и других науках. При конструировании новых технических устройств и исследовании новых технологических процессов применяют *технологические* модели. Например, прежде чем построить новую гидроэлектростанцию, сначала выполняют ее уменьшенную модель и проводят ее испытание.

Важное и все возрастающее значение имеют *прогностические* модели, которые используются для предсказания будущих событий. Они широко применяются как инструмент принятия решений в технике, политике, экономике, экологии, военном деле (прогноз погоды, прогнозирование курса акций, моделирование возможных сценариев развития событий).

Особое место в теории моделирования занимают *кибернетические* модели, в которых отсутствует непосредственное подобие физических процессов реальным процессам. В этом случае стремятся отобразить лишь некоторую функцию и рассматривают реальный объект как «черный ящик», имеющий ряд входов и выходов, и моделируются некоторые связи между выходами и входами. Кибернетические модели используют в нейрофизиологии, биологии, теории управления для получения математического описания объектов либо при создании устройств управления, регуляторов и фильтров.

Назовем также использование моделей для *контроля и диагностики* технических устройств (контроль дублированием, диагностика на основе аналитической избыточности, избыточное кодирование в теории информации). Из более экзотических применений укажем *игровую* функцию моделей (например, всем известные компьютерные игры типа «Цивилизация»), *гедони-*

стическую функцию (модели, создаваемые, чтобы доставлять наслаждение), обучающую функцию (модели в виде тренажеров, наглядных пособий).

В правой части рис. 1.2 показана классификация моделей по области применения. Перечень этих областей можно продолжать неограниченно (химия, социология, космонавтика, филология, архитектура и т. д.).

В нижней части рис. 1.2 дано деление моделей по способу их реализации – это идеальные, материальные и компьютерные модели.

Идеальные модели не предполагают их физической реализации, они существуют в виде мысленных образов (концепций), словесных описаний либо математических формул. Их расположение по степени содержательности иллюстрируется рис. 1.3. Наименьшей степенью формализации среди них характеризуются вербальные и информационные модели, а наиболее содержательными и информационно емкими являются математические и аналитические модели. Их в свою очередь можно классифицировать по сложности и степени адекватности к объекту.

Под математическим моделированием принято понимать процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта (например, системы уравнений), называемого математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получить характеристики рассматриваемого реального объекта.

При имитационном моделировании алгоритм, реализующий модель, воспроизводит процесс функционирования системы во времени, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени. Это позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях про-



Рис. 1.3. Идеальные модели

цесса в определенные моменты времени, дающие возможность оценить характеристики системы. Основным недостатком имитационного моделирования является то, что полученное решение всегда носит частный характер, так как оно соответствует фиксированным элементам структуры и значениям параметров системы.

О возможностях различного *материального* воплощения моделей (см. рис. 1.2) уже говорилось. Кроме геометрических, физических и электрических моделей можно назвать механические, гидравлические, робототехнические, биологические и многие другие.

Доминирующее положение сегодня занимают *компьютерные* (см. рис. 1.2). Вычислительные машины позволяют реализовывать имитационные, алгоритмические, математические и иные модели такой сложности, о которой ученые предыдущих поколений могли только мечтать. Благодаря компьютерам появились и активно используются принципиально новые классы моделей, такие как нейросетевые модели, генетические модели и алгоритмы, модели искусственного интеллекта с использованием нечетких множеств, баз данных и знаний. Компьютерные технологии реализации моделей образуют единый фундамент, на котором базируется современная дисциплина моделирования.

Приведенная классификация, безусловно, не является полной. Она не учитывает, в частности, степень формализации моделей (полностью формализованные, частично формализованные, неформализованные). Не отражено деление на функциональные (бихевиористические) и структурные (анатомические) модели, не затронуты этические аспекты моделирования и др. В то же время ее можно углублять, более детально рассматривая отдельные виды моделей. В качестве примера ниже подробно рассматриваются математические модели, ввиду их особой роли в теории моделирования.

1.3. Математические модели

Отметим три важные черты математических моделей: их универсальность (одна и та же модель может описывать различные объекты); полноту и глубину описания (математическая модель позволяет воспроизводить различные нюансы поведения исследуемого объекта); удобство компьютерной реализации (от математической модели, как правило, легко перейти к алгоритму

или программе). Эти черты выделяют математические модели в отдельный класс.

Математические модели, как и другие, различаются уровнем сложности и степенью адекватности по отношению к объекту моделирования. Различают два вида математических моделей – количественные и качественные модели. *Количественная* модель (quantitative model) использует статические и динамические соотношения между переменными и параметрами системы для описания поведения системы в количественных математических терминах. *Качественная* модель (qualitative model) использует статические и динамические соотношения между переменными и параметрами системы для описания поведения системы в качественных терминах, таких как причинность или правила вида «if-then».

Основным недостатком использования качественных моделей является невозможность воспроизведения и исследования тонких физических явлений, характерных для моделируемого объекта. Успешное решение задач моделирования требует использования более содержательных, количественных моделей объектов, отражающих их динамические свойства и особенности поведения. Чем полнее математическая модель объекта, тем более тонкие вопросы ее функционирования доступны для рассмотрения.

Можно выделить следующую последовательность типовых математической моделей, расположенных по мере их усложнения:

- графические и логические модели;
- модели в виде конечных автоматов и сетей;
- линейные динамические модели;
- нелинейные динамические модели.

Графические и логические модели получили наибольшее распространение на практике в силу своей простоты и наглядности. Они хорошо отражают цепочки причинно-следственных связей между явлениями и позволяют формализовать процедуру поиска дефектов. В то же время они имеют очевидные недостатки, накладывающие ограничения на область их применения. В тех случаях, когда возможности логических моделей не позволяют обеспечить заданных требований по качеству моделирования, следует переходить к более содержательным моделям, таким как конечные автоматы, сети Петри, статические и динамические

аналитические модели, полнее отображающим свойства и поведение изучаемого объекта.

Для многих технических объектов наиболее приемлемыми оказываются линейные стационарные динамические модели. С одной стороны, они достаточно просты, могут быть описаны обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями или передаточными функциями, теория которых хорошо разработана, допускают аналитическое исследование, сравнительно просто реализуются средствами вычислительной техники. С другой стороны, они достаточно содержательны, отражают не только статические свойства объектов, но и их динамику, могут служить для описания сложных переходных процессов, таких, например, как поведение летательного аппарата на траектории при наличии внешних возмущений.

Класс технических объектов и систем, допускающих математические модели такого вида, весьма широк и включает в себя разнообразные системы управления, исполнительные устройства, измерительные датчики, системы обработки, хранения и передачи информации, системы с сосредоточенными и распределенными параметрами, механические, гидравлические, электрические, электронные устройства и т. п.

Математические модели можно классифицировать и по другим признакам. Например, по числу входных и выходных переменных они делятся на *одномерные*, имеющие один вход и один выход (SISO-системы), и *многомерные*, имеющие несколько входов и несколько выходов (MIMO-системы). По наличию памяти различают *статические* и *динамические* объекты. У статических объектов выходной сигнал в текущий момент времени однозначно определяется значением входного сигнала в этот же момент времени. У динамических объектов, напротив, выходной сигнал в текущий момент времени зависит от значений входного сигнала в этот и предыдущие моменты времени. В зависимости от вида используемых моделей можно выделить *непрерывные* и *дискретные*, *детерминированные* и *вероятностные* (стохастические) модели.

Классификация математических моделей по этим и другим признакам поясняет рис. 1.4.

Прокомментируем только верхний уровень классификации. Он отражает деление моделей по характеру зависимых и независимых переменных (дискретные, непрерывные). Вопросы связи



Рис. 1.4. Виды математических моделей

дискретного и непрерывного возникают при делении моделей на аналоговые, цифровые и гибридные. Признаком классификации здесь является способ представления информации – в виде непрерывной (аналоговой) величины или в цифровом виде.

Деление математических моделей на аналоговые и цифровые отражает двойственную, дуальную природу окружающего нас мира и имеет глубокие философские истоки. Вопрос о том, в каком мире мы живем – непрерывном или дискретном – волновал еще древнегреческих философов. Здесь можно упомянуть Демокрита, отстаивающего корпускулярную теорию строения вещества; Зенона, апории которого об Ахиллесе и черепахе, о стреле были направлены на выяснение структуры бесконечно малых интервалов времени и пространства и др. В XVIII–XIX веках широкую известность получила физическая и философская дискуссия о природе света, в которой приняли участие крупнейшие ученые мира. Результатом дискуссии явилось признание двойственной природы света – волновой и корпускулярной одновре-

менно. Тонкими и убедительными опытами было показано, что в одних случаях свет ведет себя как поток квантов, в других – как непрерывное волновое излучение (волны электромагнитного поля определенной частоты).

Этот вывод важен с философской точки зрения, поскольку он указывает на единство непрерывного и дискретного в природе. Показательно, что вычислительная техника не явилась исключением в этом отношении. По-видимому, можно утверждать, что наиболее полно отражают природу гибридные модели, объединяющие дискретный и непрерывный подход.

В гибридных моделях возможны различные сочетания способов представления времени и сигналов (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Типы гибридных моделей

Сигналы	Время	
	непрерывное	дискретное
Аналоговые	Аналоговые модели (1)	Гибридные модели (2)
Гибридные	Гибридные модели (3)	Гибридные модели (4)
Цифровые	Гибридные модели (5)	Цифровые модели (6)

Из таблицы видно, что возможны различные типы гибридных моделей. Например, группе (2) соответствуют модели, в которых амплитуда сигналов может меняться непрерывно, но сами сигналы представляют собой последовательность импульсов, которые могут появляться в дискретные моменты времени. Группам (3) и (4) соответствуют модели с гибридным представлением сигналов, когда, например, порядок числа задается в цифровой форме, а мантисса – в аналоговой, или целая часть – цифровая, а дробная – аналоговая и т. д. К группе (5) относятся модели, в которых сигнал может изменяться в любой момент времени, но принимает лишь конечное число значений. Выбор того или иного типа моделей для исследования должен определяться структурой задачи и тем, насколько адекватно она отражается на структуру модели.

1.4. Этапы моделирования

Единство моделирования как научной дисциплины подчеркивается наличием одних и тех же этапов моделирования, располагающихся в одной и той же последовательности, в различных

прикладных областях. Число этих этапов зависит от степени детализации их описания (при дальнейшем изложении мы выделим восемь этапов).

Любая процедура моделирования, независимо от предметной области, начинается с изучения объекта, его описания и формирования списка требований к модели. Как уже отмечалось, модель определяется совместным заданием объекта и задачи, решаемой субъектом. Это означает, что прежде чем приступить к моделированию, необходимо ответить на вопросы о том, *что* моделируется, *с какой целью*, кем, *с помощью каких* математических и технических средств и т. д. Здесь можно провести параллель с риторической схемой вопросов, применявшихся в римском правосудии при расследовании обстоятельств дела: *Quis? Quid?, Ubi? Quibus auxiliis? Cur? Quomodo? Quando?* (Что? Кто? Где? С чьей помощью? Для чего? Каким образом? Когда?).

Одновременно возникают проблемы построения адекватной математической модели объекта, выбора его информативных характеристик и параметров, интерпретации результатов моделирования, оценки точности и достоверности получаемой информации.

В схематичной форме содержание процесса моделирования поясняет рис. 1.5.

Этапы организации и проведения процедуры моделирования показаны на рис. 1.6.

На первом этапе дается общая характеристика исследуемого объекта, описываются основные режимы его работы и особенности функционирования.

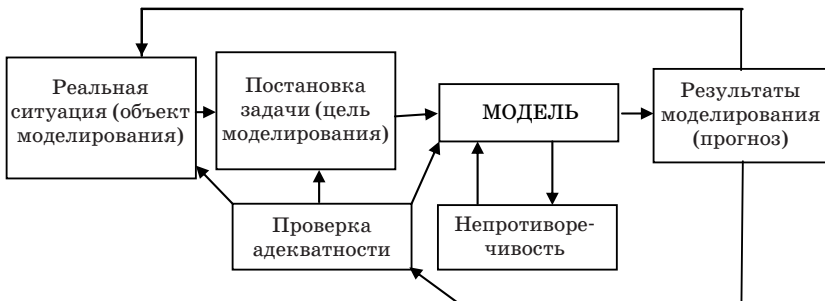


Рис. 1.5. Процесс моделирования



Рис. 1.6. Этапы моделирования

Объект может быть задан либо набором его реакций на типовые входные воздействия, либо описанием его структуры с указанием численных значений ее параметров.

Для определения реальных значений параметров объекта моделирования можно воспользоваться результатами одного из разделов современной теории управления – теории идентификации. Основная задача идентификации состоит в получении или уточнении математического описания объекта по измерениям его входных и выходных сигналов. В самой общей постановке – это задача получения математического описания «черного ящика», когда априорная информация об объекте полностью отсутствует. В более типичной для практики постановке цели объект представляет собой «серый ящик», когда, например, требуется определить коэффициенты дифференциального уравнения, тип и порядок которого известны (некоторые из возможных целей были перечислены на рис. 1.2).

На втором этапе формулируются цели моделирования. Они могут состоять в оценке возможностей функционирования объекта в отдельных режимах, получении качественной или количественной информации о его характеристиках. В ряде случаев ставится задача прогнозирования поведения исследуемого объекта, как это характерно, например, для метеорологических моделей, моделей «ядерной зимы» и моделей мировой динамики.

На третьем этапе производится выбор критериев адекватности, которые используются далее при синтезе модели. Под ними понимаются характеристики объекта, достаточно полно определяющие его поведение и состояние. К ним относятся, во-первых, параметры объекта, определяемые целью исследований, и, во-вторых, переменные, подлежащие прямому экспериментальному измерению.

Выбор критериев адекватности представляет собой ответственный этап, от которого во многом зависит качество, точность и эффективность всего процесса моделирования. Эти критерии должны удовлетворять трем требованиям: измеримости, информативности, инвариантности.

Измеримость критерия означает, что должна иметься возможность его вычисления по результатам непосредственных измерений, проводимых на реальном объекте с помощью соответствующих датчиков (скорости, температуры, давления и т. п.).

Информативность критерия означает, что он должен нести существенную информацию о характеристиках объекта и допускать возможность их количественного определения.

Инвариантность критерия означает, что он должен иметь малую (в идеале – нулевую) чувствительность к шумам и другим мешающим воздействиям.

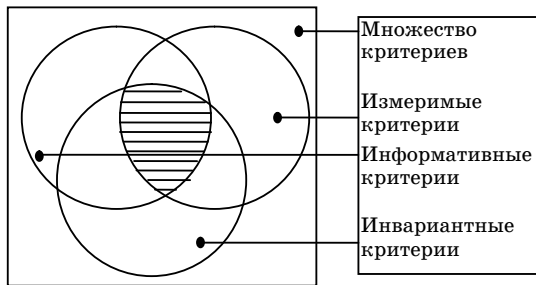


Рис. 1.7. Взаимосвязь критериев

К сожалению, одновременное выполнение перечисленных требований на практике не всегда возможно. Это иллюстрируется с помощью диаграммы (рис. 1.7), на которой выделены множества измеряемых, информативных и инвариантных параметров объекта. Если пересечение этих трех множеств не пусто, то их общая часть содержит те параметры, которые и нужно использовать при анализе адекватности. В противном случае приходится удовлетворять в первую очередь требованию измеримости, а в отношении двух других требований идти на разумный компромисс.

На четвертом этапе, с учетом выбранных критериев адекватности, осуществляется построение модели объекта, отражающей цель исследований. Если речь идет о математической модели, то она может быть выбрана линейной или нелинейной, стационарной или нестационарной, непрерывной или дискретной, может быть описана с помощью передаточных функций, частотных характеристик, уравнений в пространстве состояний, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и т. д. (см. рис. 1.4).

При этом реальные погрешности и неучтенные факторы обычно отображаются в модели опосредованно в виде дополнительных входных сигналов или в виде изменения некоторых параметров, например коэффициентов уравнений.

Построенная модель должна быть непротиворечивой и подчиняться всем обычным законам математической логики. Желательно также, чтобы она отвечала двум критериям Эйнштейна – критерию внешнего оправдания и критерию внутреннего совершенства. Первый из них всегда можно удовлетворить, добиваясь желаемого поведения модели за счет введения дополнительных корректирующих блоков или поправочных членов в уравнениях. Второй критерий не поддается формализации и предполагает гармоничность модели, ее внутреннюю уравновешенность, эстетическое совершенство.

Обычно модель создается на основе экспериментальных данных и затем, по мере ее проверки и накопления новых данных, уточняется и совершенствуется. Этот процесс можно пояснить схемой, приведенной на рис. 1.8.

В принципе, в силу бесконечности процесса познания, схему можно продолжать неограниченно, что прослеживается на мере развития любой науки. Однако при моделировании на вы-

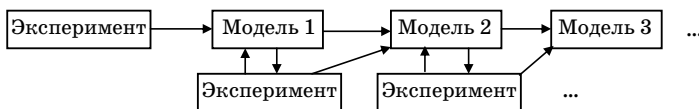


Рис. 1.8. Процесс создания модели

числительных машинах необходимо остановиться на какой-то конкретной модели. Здесь следует иметь в виду, что чрезмерное усложнение модели так же нежелательно, как и ее излишнее упрощение. По выражению английского ученого Р. Хинде, «слишком хорошая модель бесплодна, слишком отдаленная вводит в заблуждение».

Например, при исследовании колебаний физического маятника можно использовать простейшее линейное дифференциальное уравнение $\ddot{x} + k^2 x = 0$, нелинейное дифференциальное уравнение $\ddot{x} + k^2 \sin x = 0$ либо уравнения более высоких порядков, учитывающие, например, малые колебания точки подвеса маятника или тепловые движения молекул в нем. Очевидно, последнее вызовет излишнее усложнение модели, что приведет к значительному увеличению числа используемых вычислительных блоков и в конечном счете к увеличению погрешности результатов.

Здесь имеет место своеобразный парадокс – более полная модель приводит к большей погрешности. С другой стороны, линейная модель справедлива лишь для малых колебаний маятника, а для случая колебаний с большой амплитудой дает значительную погрешность. Поэтому, если речь идет об исследовании колебаний в широком диапазоне амплитуд, наиболее подходящей можно считать нелинейную модель.

В тех случаях, когда с помощью одной модели умеренной сложности не удастся отразить поведение объекта с требуемой полнотой, используют многомодельный подход. Его суть состоит в том, что для моделируемого объекта создается банк моделей, каждая из которых отражает те или иные аспекты его функционирования. Например, при моделировании многорежимных объектов (космических летательных аппаратов, ядерных реакторов и т. п.) банк может включать модели, отвечающие отдельным режимам работы объекта, таким как взлет или посадка летательного аппарата, разгон ядерного реактора и т. д.

Пятый этап связан с выбором метода моделирования и его аппаратурной или программной реализацией. В частности, при

компьютерном моделировании различают численные, структурные и символьные методы. Для их реализации существует обширный класс пакетов компьютерного моделирования, таких как MATLAB, SIMULINK, VISSIM, MATHEMATICA, MAPLE, LABVIEW и др.

Шестой этап занимает, в некотором смысле, центральное место в процедуре моделирования. На этом этапе исследователь имеет работоспособную модель и проводит с ее помощью различные эксперименты. В частности, в научных исследованиях большую роль играют гипотезы, т. е. определенные предсказания, основывающиеся на небольшом количестве опытных данных, наблюдений, догадок. Быстрая и полная проверка выдвигаемых гипотез может быть проведена в ходе специально поставленных экспериментов с математической или имитационной моделью.

Следующие два этапа (седьмой и восьмой) относятся к непосредственному проведению моделирования и математической (в том числе статистической) обработке его результатов. Цель обработки состоит в отбраковке недостоверных данных, фильтрации помех и оценке погрешности. Одновременно оценивается достоверность полученного результата и проводится анализ адекватности модели.

Далее по результатам моделирования может приниматься решение о модификации модели системы либо ее коренном изменении, что отражено контурами обратной связи (рис. 1.5, 1.6). Важная роль при обработке результатов моделирования, их интерпретации и определении границ применимости принадлежит теории подобия и теории инвариантов, которые могут использоваться и на других этапах моделирования.

1.5. Математические основы теории моделирования

Теория моделирования, в силу своего междисциплинарного характера, обязана опираться на научные результаты различных прикладных дисциплин – механики, математической физики, гидравлики, баллистики и др. Без этого невозможно построение достаточно содержательных и адекватных моделей реальных явлений и процессов. Отсюда вытекает специфика и своеобразие моделей, синтезируемых в различных областях науки и техники.

В то же время важно выделить общие методические и математические основы, присущие процессу моделирования в любой

предметной области и образующие теоретический фундамент дисциплины моделирования.

Частично это было сделано в предыдущем подразделе, где были описаны основные этапы процесса моделирования и вскрыто их содержание. Выполнение каждого из этих этапов требует как использования специальных знаний и теорий данной предметной области, так и привлечения ряда дисциплин математического или общетехнического характера.

Перечислим некоторые из математических и технических дисциплин, привлекаемых для решения отдельных задач теории моделирования:

- построение моделей (кибернетика, теория идентификации, теория алгебраических и дифференциальных уравнений);
- анализ и изучение свойств моделей (теории устойчивости, чувствительности, управляемости, наблюдаемости, теория катастроф);
- эквивалентные преобразования и редукция моделей (теория систем, теория канонических форм, теория управления);
- структурная реализация и декомпозиция моделей (теория систем, теория инвариантов);
- компьютерная реализация (computer science, теория алгоритмов, теория графов и блок-схем);
- анализ адекватности и оценка результатов моделирования (теория размерностей, теория подобия и теория инвариантов).

Отметим, что при моделировании механических и технических систем особенно большую роль играют теория размерностей, теория подобия и математическая теория инвариантов. Эти дисциплины взаимосвязаны, в частности теория размерностей входит как составная часть в теорию подобия, а основные теоремы последней могут рассматриваться как частный случай соответствующих теорем теории инвариантов.

Учитывая особую роль этих дисциплин для теории и практики моделирования, остановимся на них подробнее.

1.5.1. Анализ размерностей и теория подобия

При моделировании любых физических процессов сталкиваются с понятием размерности. По определению, размерная величина – это величина, численное значение которой зависит от выбора масштабов единиц измерения. В противном случае величина является безразмерной.

Размерность называется выражение данной физической величины через основные единицы измерения. В классической физике за основу берутся размерности трех основных величин – длины L , массы M , и времени T [например, сантиметр (см), грамм (г), секунда (с)]. Размерности остальных физических величин выражаются через них с помощью степенных формул вида

$$[v] = \frac{L}{T}; \quad [F] = \frac{ML}{T^2}.$$

Для любого физического закона справедливы два правила Фурье:

1. Во всяком уравнении, имеющем физический смысл, все члены уравнения имеют одинаковую размерность, например в уравнении $y = x_1 + x_2 + x_3$ одинаковую размерность должны иметь переменные x_1, x_2, x_3, y .

2. Размерность любой физической величины имеет вид степенного одночлена:

$$[Y] = M^\alpha L^\beta T^\gamma.$$

Вторая часть правила Фурье известна как основная теорема теории размерностей.

Теория размерностей является важной частью теории подобия. Чтобы пояснить понятие подобия, рассмотрим некоторый физический объект, например маятник. Ему можно поставить в соответствие электрическую схему – колебательный контур – и добиться подбором параметров (величин емкости, индуктивности, сопротивления) совпадения амплитуд и частот протекающих процессов. Такие системы называются подобными.

О п р е д е л е н и е . Два процесса *подобны*, если параметры одного из них могут быть получены из параметров другого масштабным преобразованием. Более подробно: два явления называются *подобными*, если значения параметров, характеризующих одно из этих явлений, могут быть получены из значений параметров, характеризующих другое из этих явлений, простым пересчетом при изменении масштаба единиц измерения.

Пусть, например, x_1, x_2, \dots, x_n – параметры, характеризующие первое явление, а y_1, y_2, \dots, y_n – параметры, характеризующие второе явление. Эти явления подобны, если их параметры связаны соотношениями

$$y_1 = N_1 x_1, \quad y_2 = N_2 x_2, \dots, y_n = N_n x_n,$$

где N_i – коэффициенты подобия (масштабные коэффициенты).

Если два явления подобны, то одно из них может служить моделью другого. Отсюда ясна методологическая роль теории подобия для дисциплины моделирования.

У любого специалиста, занимающегося моделированием, неизбежно возникают три важных вопроса:

1. Какие параметры необходимо измерять в процессе моделирования?
2. Как обрабатывать результаты моделирования?
3. На какой класс объектов можно распространить результаты моделирования?

Сущность теории подобия составляют три теоремы, позволяющие ответить на поставленные вопросы.

Теорема 1 (критерии подобия). У подобных явлений имеются безразмерные сочетания параметров, имеющие одинаковые численные значения для всех подобных явлений данного класса. Они называются *критериями подобия*.

Проиллюстрируем смысл этой теоремы на втором законе Ньютона

$$F = ma = m \frac{d^2 l}{dt^2}.$$

Рассмотрим два подобных явления, описываемых данным законом:

$$F_1 = m_1 \frac{d^2 l_1}{dt^2}, \quad F_2 = m_2 \frac{d^2 l_2}{dt^2}. \quad (1.1)$$

Поскольку они подобны, имеют место масштабные соотношения

$$F_2 = N_F F_1, \quad m_2 = N_m m_1, \quad l_2 = N_l l_1, \quad t_2 = N_t t_1,$$

где N_F, N_m, N_l, N_t – коэффициенты подобия.

Можно ли произвольно назначать эти коэффициенты? Очевидно, нет, они должны быть согласованы между собой. Коэффициенты подобия должны удовлетворять равенству, которое получается после подстановки масштабных соотношений во вторую из формул (1.1):

$$N_F F_1 = N_m m_1 \frac{d^2 N_l l_1}{d(N_t t_1)^2}.$$

Разделив его почленно на первое из равенств (1.1), получим

$$\frac{N_m N_l}{N_F N_t^2} = 1.$$

Это соотношение называется *индикатором подобия*, оно накладывает ограничения на выбор коэффициентов подобия. Подставим в него вместо коэффициентов подобия их значения:

$$\frac{m_2 l_2 F_1 t_1^2}{m_1 l_1 F_2 t_2^2} = 1,$$

откуда

$$\frac{m_2 l_2}{F_2 t_2^2} = \frac{m_1 l_1}{F_1 t_1^2}.$$

В случае n подобных явлений получаем цепочку аналогичных равенств:

$$\frac{m_1 l_1}{F_1 t_1^2} = \frac{m_2 l_2}{F_2 t_2^2} = \dots = \frac{m_n l_n}{F_n t_n^2}.$$

Из нее следует, что отношение $\frac{ml}{Ft^2}$ одинаково для всех подобных явлений. Оно называется критерием подобия Ньютона и записывается как

$$Ne = \frac{ml}{Ft^2}.$$

Между индикатором подобия и критерием подобия существует простая связь. В частности, последнюю формулу можно получить из индикатора подобия, если вместо каждого коэффициента написать его индекс. Переменные, входящие в критерий подобия, являются существенными для этого процесса.

Теорема 2 (π-теорема). Всякий физический закон, связывающий n параметров, может быть представлен в виде зависимости между $n - k$ безразмерными комбинациями этих параметров (критериями подобия), где k – максимальное число параметров с независимыми размерностями.

Пусть закон имеет вид:

$$a_n = f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}),$$

где a_1, \dots, a_k – переменные с независимыми размерностями $[a_1] = A_1, \dots, [a_k] = A_k$. Остальные переменные имеют размерности, которые выражаются через A_1, \dots, A_k , в виде степенных одночленов (это следует из основной теоремы размерности):

$$[a_{k+1}] = A_1^{p_1} \dots A_k^{p_k}, \dots, [a_n] = A_1^{q_1} \dots A_k^{q_k}$$

Перейдем от исходных параметров к их безразмерным комбинациям, т. е. к критериям подобия π_1, \dots, π_{n-k} . Теорема 2 утверждает, что исходный закон может быть представлен в форме $\pi_{n-k} = f(\pi_1, \dots, \pi_{n-k-1})$.

Это позволяет уменьшить число параметров в физическом законе до минимума, а также получить существенную информацию о виде физического закона, связывающего рассматриваемые параметры.

Особенно показательны случаи, когда $n - k = 1$ и $n - k = 2$. В первом случае имеется единственный критерий подобия, поэтому π -теорема позволяет установить вид закона с точностью до произвольного коэффициента $\pi = \text{const}$. Во втором случае имеется два критерия подобия, поэтому вид закона устанавливается с точностью до произвольной функции $\pi_2 = f(\pi_1)$.

Пример 1. Выведем формулу линейного ускорения a при вращательном движении (рис. 1.9) с помощью π -теоремы. Из общих соображений ясно, что оно может зависеть от массы тела m , его линейной скорости v и радиуса кривизны R : $a = F(m, v, R)$.

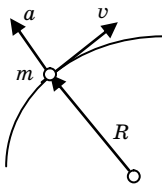


Рис. 1.9. Криволинейное движение

Выпишем размерности четырех указанных величин: $\text{см}/\text{с}^2$, г, $\text{см}/\text{с}$, см. Видно, что из них можно сформировать только один безразмерный комплекс $\pi = \frac{v^2}{Ra}$. Отметим, что в него не входит масса, следовательно, ускорение тела не зависит от его массы.

Напомним, что для доказательства этого факта Галилей проводил многочисленные эксперименты, сбрасывая различные тела с Пизанской башни. Сколько времени и средств он мог бы сэкономить, если бы был знаком с π -теоремой (уровень знаний того времени вполне позволял ее доказать!).

Из равенства $\pi = \text{const}$ получаем классическую формулу: $a = c_1 \frac{v^2}{R}$. Константа c_1 зависит от выбора единиц измерения и может быть найдена из одного-единственного опыта.

Пример 2. Определим период T колебаний математического маятника. Очевидно, что он может зависеть от длины маятника l , его массы m и ускорения свободного падения g : $T = f(l, m, g)$. Применяем π -теорему. В данном случае имеем четыре параметра T, l, m, g , т. е. $n = 4$. Их размерности: с, см, г, см/с². Максимальное число параметров с независимыми размерностями равно трем, т. е. $n - k = 1$. Следовательно, имеется единственный критерий подобия. В него не может входить масса (иначе критерий будет размерным), поэтому он имеет вид $\pi = g \frac{T^2}{l} = \text{const}$. Отсюда получаем искомую зависимость $T = c \sqrt{\frac{l}{g}}$. Константа $c = 6,28$ определяется опытным путем с помощью одного эксперимента с любым маятником.

Теорема 3 (условия подобия). Необходимым и достаточным условием подобия двух процессов является равенство всех независимых критериев подобия, которые можно составить из параметров, характеризующих эти процессы, а также согласование их начальных условий.

Заметим, что для любой пары подобных процессов можно написать сколько угодно критериев подобия. Пусть, например, найдено два критерия подобия π_1, π_2 . Перемножая их, получим третий критерий подобия $\pi_3 = \pi_1 \pi_2$, складывая – четвертый и т. д.

Возникает вопрос, сколько критериев нужно проанализировать, чтобы проверить подобие явлений? Теорема 3 дает ответ – надо проверить $(n - k)$ независимых критериев подобия.

Пример 3. Пусть требуется найти условия подобия двух разнородных систем: маятника массы m , длины l с коэффициентом трения k (рис. 1.10, а) и последовательной RLC -цепочки (рис. 1.10, б).

Используя законы Ньютона и Кирхгофа, выпишем дифференциальные уравнения этих систем:

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0, \quad a_0 = g/l, \quad a_1 = k/m -$$

уравнение колебаний маятника,

$$\ddot{y} + b_1 \dot{y} + b_0 y = 0, \quad b_0 = 1/LC, \quad b_1 = R/L -$$

уравнение электрической цепи.

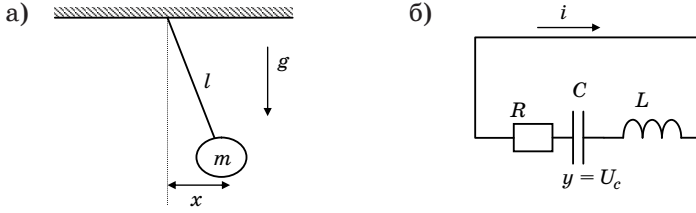


Рис. 1.10. Механическая и электрическая системы

Системы будут подобны, если обеспечить совпадение одноименных коэффициентов дифференциальных уравнений $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$ (они выступают в качестве критериев подобия).

Для того чтобы были подобны колебательные процессы в этих системах, надо обеспечить согласование начальных условий: $x_0 / \dot{x}_0 = y_0 / \dot{y}_0$. Это дополнительное условие можно рассматривать как третий критерий подобия.

Вместо требования равенства пар коэффициентов можно использовать эквивалентное требование равенства пар корней λ_1, λ_2 характеристических полиномов систем. Можно также от коэффициентов a_i, b_i перейти к физическим параметрам систем – длине и массе маятника, индуктивности, емкости и сопротивлению электрической цепи. Тогда необходимые условия подобия систем примут вид равенств $LC = l/g$; $R/L = k/m$. Начальному отклонению маятника будет соответствовать начальный заряд конденсатора, а начальной скорости – начальный ток в цепи.

Таким образом, теория подобия дает следующие ответы на три вопроса, поставленные в начале раздела:

1. При моделировании надо измерять те параметры, которые входят в критерии подобия.
2. Результаты моделирования следует обрабатывать в виде зависимости между критериями подобия.
3. Выводы, полученные при моделировании, можно распространять на все подобные процессы.

1.5.2. Теория инвариантов и ее роль в теории моделирования

Как уже отмечалось, теория инвариантов играет важную роль на всех этапах создания модели и проведения моделирования. Она может оказать помощь при выборе критериев адекватности

модели и объекта, анализе их взаимосвязи и информативности, оценке достоверности результата моделирования, при описании и систематизации различных методов моделирования. Поэтому знание основных положений теории инвариантов представляет собой необходимым для успешного решения этих задач.

Дадим краткую историческую справку о теории инвариантов и ее роли в науке и технике.

Теория инвариантов широко используется в математических, технических и естественных науках. Она дает методологию и конкретный математический аппарат для определения тех свойств, характеристик и параметров исследуемых объектов, которые остаются неизменными при различных преобразованиях этих объектов. Примерами могут служить законы сохранения в физике, химии и других науках.

В частности, в физике инвариантность выражается в форме законов сохранения, которые связывают переменные, характеризующие состояние физической системы. Например, инвариантом консервативной механической системы является ее полная энергия $E = E_k + E_{\text{п}}$, которая остается постоянной при любых изменениях кинетической и потенциальной энергий. Многочисленные инварианты, отражающие законы сохранения количества движения, вещества, тепла, заряда и т. д. часто встречаются в задачах математической физики, электро-, гидро- и аэродинамики и других областях.

В астрономии хорошо известны открытые Кеплером инварианты движения небесных тел – полукубический инвариант R^3 / T^2 (R – радиус орбиты, T – период обращения) и секториальный инвариант S , равный площади сектора, заметаемого за единицу времени орбитальным вектором при движении планеты. Обе эти величины сохраняют постоянное значение для всех планет Солнечной системы и представляют собой условия подобия их орбит.

Наиболее полное и законченное развитие теория инвариантов получила в классической математике, где инвариантом называется все то, что остается неизменным при некоторых преобразованиях математических объектов. Например, длина вектора инвариантна к ортогональному преобразованию системы координат, собственные числа матриц инвариантны к преобразованиям подобия, ранг системы векторов является инвариантом по отношению к произвольному линейному преобразованию про-

странства. Все это примеры инвариантов соответствующих преобразований.

Чтобы проиллюстрировать связь теории инвариантов с теорией подобия, рассмотрим объект, модель которого имеет вид системы линейных дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, где \mathbf{X} – вектор переменных; \mathbf{A} – матрица. Это может быть, например, модель механического устройства, электрической цепи или экономического процесса.

Выполняя замену переменных $\mathbf{X} = \mathbf{T}_i \mathbf{Y}$ с различными невырожденными матрицами \mathbf{T}_i , получим семейство эквивалентных моделей $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}_i \mathbf{Y}$, где $\mathbf{A}_i = \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_i$. В линейной алгебре такое преобразование называется преобразованием подобия. Оно изменяет все элементы матрицы \mathbf{A} , но сохраняет ее собственные числа и коэффициенты характеристического полинома. Указанные величины являются инвариантами этого преобразования.

Дополнительный учет начальных условий $\mathbf{X}(0)$, которые преобразуются по формуле $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{X}(0)$, расширяет число инвариантов за счет появления взаимных инвариантов матрицы и вектора (они хорошо известны в теории инвариантов).

Масштабирование независимой переменной $t = k\tau$ также может быть легко учтено. Оно приводит к появлению дополнительного множителя в формуле подобного преобразования $\mathbf{A}_i = k \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_i$ и на единицу уменьшает число независимых инвариантов (ими будут теперь отношения собственных чисел матрицы \mathbf{A}).

Таким образом, мы получили множество подобных систем, каждая из которых может служить моделью исходного объекта. Роль критериев подобия играют инварианты преобразования. Заметим, что в теории подобия использовалось значительно более узкое преобразование – масштабирование переменных с диагональной матрицей \mathbf{T} . Это и позволяет рассматривать теорию подобия как специальный прикладной раздел теории инвариантов, использующий результаты теории размерностей.

Применение теории инвариантов в прикладных науках обеспечивает необходимый уровень строгости и адекватности при построении математических моделей, их корректный анализ и эффективную вычислительную реализацию. Поскольку инварианты представляют собой важные характеристики системы, отражающие ее самые существенные свойства, то исследование любой системы, с какой бы целью оно ни проводилось (модели-

рование, анализ, синтез), следует начинать с отыскания инвариантов.

В заключение перечислим основные направления использования инвариантов в теории и практике моделирования:

1. Инварианты отражают как статику, так и динамику исследуемого объекта и поэтому могут применяться при исследовании широкого круга моделей.

2. Инварианты можно использовать в качестве параметров модели, так как они нечувствительны к базису описания объектов.

3. Использование инвариантов в качестве оцениваемых параметров при построении моделей методами теории идентификации приводит к упрощению идентификационных алгоритмов.

4. Применение теории инвариантов позволяет упростить анализ результатов моделирования и служит математической основой исследования адекватности моделей.

Задачи и упражнения

1. В чем разница между функциональным и параметрическим подходами к проверке адекватности модели? Приведите пример, когда они дают существенно разные результаты.

2. Перечислите четыре вида гибридных моделей и охарактеризуйте различия между ними.

3. Выведите с помощью π -теоремы следующие физические формулы (с точностью до постоянного множителя): а) $F = ma$ – второй закон Ньютона; б) $E_k = \frac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия; в) $E_{\text{п}} = mgh$ – потенциальная энергия; г) $v = \sqrt{2gh}$ – скорость тела при падении с высоты h .

4. В примере 3 получены условия подобия физического маятника и последовательной RLC -цепочки. Найдите аналогичные условия для случая параллельной RLC -цепочки.

5. Докажите, что диаграмма Найквиста линейной динамической системы инвариантна по отношению к нечетной замене аргумента в передаточной функции, в частности к изменению масштаба времени.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Широкий круг явлений природы, а также многие технические объекты могут быть описаны дифференциальными уравнениями. Они являются естественным языком для описания разнообразных динамических систем, таких как движение планет Солнечной системы, процесс образования волн на море, функционирование атомных станций, систем автоматического управления космическими кораблями и т. д. Поэтому математические модели в виде дифференциальных уравнений играют важную роль в теории моделирования.

2.1. Классификация дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения представляют собой соотношения, связывающие переменные и их производные. По количеству независимых переменных дифференциальные уравнения делятся на два больших класса: обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения с частными производными. К первому классу относятся уравнения, в которых имеется только одна независимая переменная, например время. В уравнения второго класса входят несколько независимых переменных, например время и пространственные координаты. Как правило, решать эти уравнения значительно труднее.

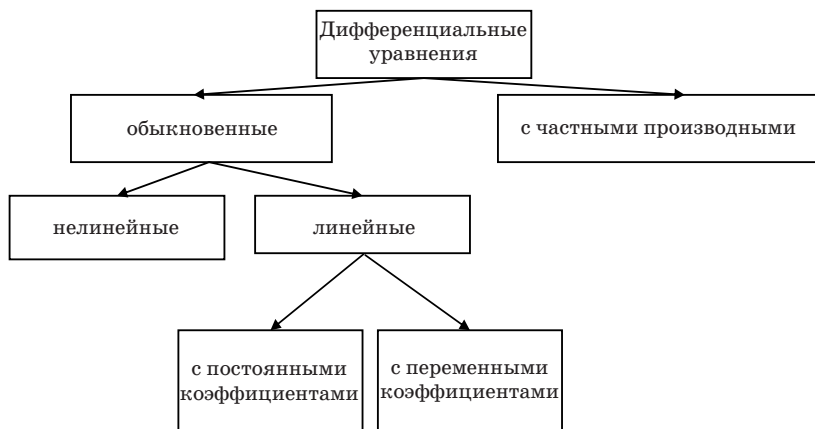


Рис. 2.1. Классификация дифференциальных уравнений

Общая запись обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

$$F(x^{(n)}, \dots, x', x, t) = 0.$$

Наивысший порядок входящей в него производной называется *порядком уравнения*.

Дифференциальное уравнение называется *линейным*, если функция F линейна, и *нелинейным* – в противном случае. Простейшими примерами могут служить уравнения $\dot{x} + x = 0$ и $\ddot{x} + \sin x = 0$. Первое из них – линейное, оно приближенно описывает малые колебания математического маятника, второе (нелинейное) описывает колебания произвольной амплитуды.

Если коэффициенты линейного дифференциального уравнения зависят от времени, то говорят о линейном уравнении с переменными коэффициентами. В тех случаях, когда коэффициенты постоянные, уравнение называется *стационарным*, или уравнением с постоянными коэффициентами. Классификация дифференциальных уравнений по перечисленным признакам приведена на рис. 2.1.

Для линейных дифференциальных уравнений разработаны аналитические методы их решения. Теория нелинейных дифференциальных уравнений развита значительно хуже. Общих методов решения таких уравнений не существует, описаны лишь отдельные типы уравнений, которые могут быть проинтегрированы, такие как уравнения Бернулли, Риккати и др. При компьютерном моделировании, как правило, ограничиваются получением численного решения, отвечающего конкретным значениям параметров. Оно выводится в виде графика или соответствующего массива числовых данных.

2.2. Построение математических моделей динамических систем

Первый шаг при моделировании динамических систем состоит в переходе от физической или технической задачи к ее математической модели в виде дифференциального уравнения или системы таких уравнений. При этом используются теория и законы соответствующей предметной области. Например, при моделировании механических систем это законы Ньютона и сохранения энергии; при моделировании электрических схем – законы Ома

и Кирхгофа и т. п. Поясним процедуру построения математической модели динамических систем на нескольких примерах.

Математический маятник. Рассмотрим маятник массы m и длины l , который совершает малые колебания около положения равновесия (рис. 2.2). Требуется найти дифференциальное уравнение, описывающее колебания этой механической системы.

Для построения математической модели воспользуемся формулой второго закона Ньютона $F = ma$, где F – сила, действующая на материальную точку вдоль касательной к траектории; a – линейное ускорение материальной точки.

Обозначим угловое отклонение маятника $\alpha(t)$, тогда

$$F = -mg \sin \alpha.$$

Линейное ускорение a связано с угловым ускорением $\ddot{\alpha}$ соотношением $a = l\ddot{\alpha}$.

Подставляя эти выражения в уравнение $F = ma$, получаем

$$-mgs \sin \alpha = ml\ddot{\alpha} \quad \text{или} \quad \ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0.$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка.

В случае малых колебаний замена $\sin \alpha \approx \alpha$ приводит к линейному дифференциальному уравнению

$$\ddot{\alpha} + k^2 \alpha = 0, \quad k^2 = g/l. \quad (2.1)$$

К тому же варианту можно прийти, используя закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const}, \quad (2.2)$$

где $v = l\dot{\alpha}$ – линейная скорость движения маятника; $h = l - l \cos \alpha$ – высота подъема маятника относительно точки равновесия.

Подставим эти выражения в формулу (2.2) и продифференцируем обе части по времени:

$$ml\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + mgl\dot{\alpha}\sin \alpha = 0.$$

Отсюда после сокращения на $m\dot{\alpha}$ и замены $\sin \alpha \approx \alpha$ вновь приходим к дифференциальному уравнению (2.1).

Электрический колебательный контур. Рассмотрим последовательный колебательный RLC -контур, схема которого показана на рис. 2.3. Требуется построить его математическую модель.

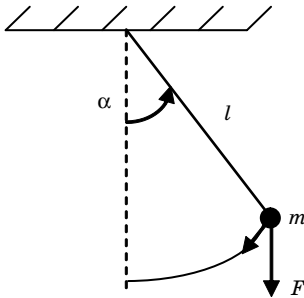


Рис. 2.2. Математический маятник

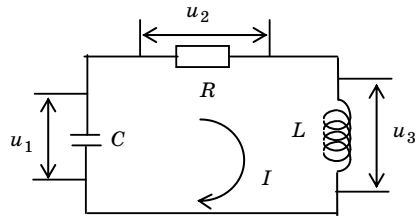


Рис. 2.3. Электрическая цепь

Ток и напряжение на конденсаторе определяются выражениями

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad u_1 = \frac{q}{C}, \quad (2.3)$$

где $q(t)$ – текущее значение заряда на конденсаторе.

Напряжения на остальных элементах схемы определяются формулами

$$u_2 = RI = R \frac{dq}{dt}, \quad u_3 = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}. \quad (2.4)$$

Подставляя эти значения в выражение для закона Кирхгофа $u_1 + u_2 + u_3 = 0$, получаем уравнение цепи

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0. \quad (2.5)$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка.

Следящая система. Рассмотрим систему автоматического регулирования, структурная схема которой показана на рис. 2.4. В ее состав входят инерционное усилительное звено с передаточной функцией $k/(T_1 p + 1)$, двигатель с передаточной функ-

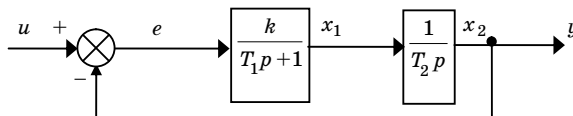


Рис. 2.4. Структура следящей системы

цией $1/(T_2 p)$ и вычитающее устройство для сравнения входного сигнала u и выходного сигнала y . Следящая система должна работать таким образом, чтобы угол поворота двигателя y по возможности точно равнялся значению входного сигнала u (задача слежения).

Способ задания моделей объектов с помощью схемы (типа приведенной на рис. 2.4) называется *структурным*, поскольку он отражает реальную структуру объекта.

По передаточным функциям отдельных блоков можно найти общую передаточную функцию следящей системы $Q(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$, связывающую изображения по Лапласу входного и выходного сигналов. Для этого в соответствии со структурной схемой выписывается система уравнений

$$Y(p) = \frac{1}{T_2 p} \frac{k}{(T_1 p + 1)} e(p), \quad e(p) = U(p) - Y(p), \quad (2.6)$$

которая затем преобразуется к одному уравнению путем исключения переменной $e(p)$:

$$Y(p) = \frac{k}{T_2 p(T_1 p + 1)} (U(p) - Y(p)).$$

Выражая выходной сигнал через входной, получаем

$$Y(p) = \frac{k}{T_2 p(T_1 p + 1) + k} U(p) = Q(p)U(p),$$

где $Q(p)$ – передаточная функция системы.

В нашем случае она имеет вид

$$Q(p) = \frac{k}{T_1 T_2 p^2 + T_2 p + k}.$$

По сравнению со структурным описанием передаточная функция является более компактной математической моделью. От нее легко осуществить переход к дифференциальному уравнению. В рассматриваемом случае для этого достаточно в уравнении

$$(T_1 T_2 p^2 + T_2 p + k)Y(p) = kU(p)$$

раскрыть скобки и заменить оператор p оператором дифференцирования d/dt :

$$T_1 T_2 \ddot{y} + T_2 \dot{y} + ky = ku.$$

Решая это дифференциальное уравнение, можно найти реакцию следящей системы на любое входное воздействие.

Резервуары с жидкостью. Рассмотрим задачу о протекании жидкости через три сообщающихся сосуда (рис. 2.5). Обозначим уровни жидкости в сосудах через $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ и будем считать, что в начальный момент времени жидкость была только в первом сосуде, т. е. $x_1(0) = m$, $x_2(0) = x_3(0) = 0$. Очевидно, что с течением времени x_1 будет убывать, а x_3 — возрастать. Уровень x_2 сначала будет расти, а затем, начиная с некоторого момента времени t_1 , уменьшаться.

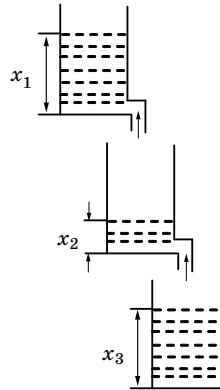


Рис. 2.5. Три резервуара

Полагая скорость вытекания жидкости пропорциональной ее количеству, получаем, что процесс может быть описан системой трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 x_1, & x_1(0) &= m, \\ \dot{x}_2 &= k_1 x_1 - k_2 x_2, & x_2(0) &= 0, \\ \dot{x}_3 &= k_2 x_2, & x_3(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Левые части уравнений (2.7) соответствуют скоростям изменения уровней жидкости в сосудах, положительные и отрицательные слагаемые в правых частях уравнений характеризуют количество прироста и убыли жидкости. Например, слагаемое $k_1 x_1$ во втором уравнении отражает приток жидкости во второй сосуд из первого, а слагаемое $-k_2 x_2$ отражает ее вытекание из второго сосуда в третий.

Уравнения (2.7) можно переписать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Эту модель можно усложнить, учитывая возможность пополнения жидкости в первом сосуде и вытекания ее из третьего сосуда.

Приведенные примеры показывают, что математические модели в виде линейных дифференциальных уравнений естественным образом возникают в различных прикладных областях. Они относятся к числу стандартных средств описания физических и технических объектов и процессов.

Следующий этап моделирования связан с аналитическим или численным решением дифференциальных уравнений. Общих методов решения нелинейных дифференциальных уравнений не существует. Остановимся на аналитических методах решения линейных дифференциальных уравнений.

2.3. Решение линейных дифференциальных уравнений

2.3.1. Свойства линейных дифференциальных уравнений

Дифференциальное уравнение вида

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t) = f(t) \quad (2.9)$$

называется *линейным дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами*. Если возмущающая функция $f(t)$ равна нулю, то уравнение называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным*. Решением уравнения (2.9) является любая функция $x(t)$, удовлетворяющая ему. Для каждого уравнения (2.9) существует целый класс таких функций.

Отметим три свойства решений линейного однородного дифференциального уравнения

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0. \quad (2.10)$$

Свойство 1. Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – два решения уравнения (2.10), то функция $x_3(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$, где c_1 и c_2 – любые постоянные коэффициенты, также является решением уравнения (2.10). Это свойство в технике известно как принцип суперпозиции для однородных систем.

Свойство 2. Существует n различных линейно независимых решений уравнения (2.10).

Свойство 3. Общее решение уравнения (2.10) имеет вид $x_0(t) = c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t)$, где $x_1(t), \dots, x_n(t)$ – линейно независимые решения уравнения (2.10); c_1, \dots, c_n – произвольные коэффициенты.

Отметим теперь два свойства неоднородного уравнения (2.9).

Свойство 4. Общее решение уравнения (2.9) равно сумме какого-либо частного решения $x_q(t)$ и общего решения соответствующего однородного уравнения $x_o(t)$

$$x(t) = x_o(t) + x_q(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) + x_q(t).$$

Свойство 5. Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – решения уравнения (2.9) с правыми частями $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответственно, то $x_1(t) + x_2(t)$ будет решением уравнения

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t) = f_1(t) + f_2(t).$$

Это свойство является принципом суперпозиции для неоднородных систем.

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения n -го порядка зависит от n произвольных постоянных $x = x(t, c_1, \dots, c_n)$. Придавая постоянным c_1, \dots, c_n числовые значения, будем получать различные частные решения дифференциального уравнения.

Пример 1. Уравнение малых колебаний математического маятника

$$\ddot{x} + x = 0 \tag{2.11}$$

имеет решение $x = \sin t$. В самом деле, подставляя $x = \sin t$ и $\ddot{x} = -\sin t$ в уравнение, получим тождество. Аналогично показывается, что $x = \cos t$ также является решением этого уравнения.

Согласно свойству 1 функция $x(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$ будет решением уравнения (2.11) при любых c_1 и c_2 . Эта формула определяет общее решение.

Для выбора конкретного решения необходимы дополнительные условия. Найдем, например, решение уравнения (2.11), проходящее через точку $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 3$. Подставляя эти значения в общее решение, получим

$$1 = c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0, \quad 3 = c_1 \cos 0 - c_2 \sin 0.$$

Отсюда $c_1 = 3$, $c_2 = 1$, т. е. искомое решение имеет вид $x = 3 \sin t + \cos t$.

В случае уравнения порядка n нужно задать n дополнительных условий. Обычно ими являются значения решения и его производных в некоторые моменты времени. Если все n условий относятся к одному моменту времени, то они называются *начальными условиями*. Задача решения дифференциально-

го уравнения с начальными условиями известна как задача Коши. Зная общее решение уравнения и начальные условия $x(t_0)$, $x'(t_0)$, ..., $x^{(n-1)}(t_0)$, легко найти постоянные c_1, \dots, c_n , подобно тому, как это было сделано в примере 1.

Кроме задачи Коши часто рассматривают краевую задачу, когда заданы значения решения и его производных в различные моменты времени. Например, для уравнения (2.11) можно задать $x(0) = 1$, $x(\pi/2) = -1$. Тогда постоянные c_1 и c_2 находятся из соотношений

$$1 = c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0, \quad -1 = c_1 \sin \frac{\pi}{2} + c_2 \cos \frac{\pi}{2},$$

откуда $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, и решение имеет вид $x(t) = -\sin t + \cos t$.

2.3.2. Решение однородного дифференциального уравнения

Рассмотрим аналитические методы решения линейного дифференциального уравнения n -го порядка. Одним из наиболее распространенных является метод, основанный на нахождении корней характеристического полинома.

Пусть дано однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (2.10) и начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}.$$

Будем искать решение в виде $x = e^{pt}$. Подставив $x = e^{pt}$ в уравнение (2.10) и сократив на e^{pt} , получим характеристическое уравнение

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0 = 0. \quad (2.12)$$

Если p_1, \dots, p_n — корни этого уравнения и среди них нет кратных, то общее решение уравнения (2.10) согласно свойству 3 имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{p_1 t} + \dots + c_n e^{p_n t}. \quad (2.13)$$

Таким образом, для получения аналитического решения требуется:

- записать характеристическое уравнение;
- определить его корни p_1, \dots, p_n ;
- найти общее решение уравнения (2.13);
- используя начальные условия, определить значения коэффициентов c_1, \dots, c_n .

Наибольшую трудность в этой процедуре вызывает нахождение корней характеристического уравнения, так как при $n > 4$ не существует формул для их определения.

Пример 2 (простые вещественные корни). Дано уравнение $\ddot{x} - 4x = 0$. Выписываем характеристическое уравнение: $p^2 - 4 = 0$. Его корни $p_1 = 2$, $p_2 = -2$, поэтому общее решение представляет собой сумму двух экспонент:

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}.$$

Если среди корней характеристического уравнения имеются кратные корни, то соответствующее слагаемое в общем решении умножается на полином $c_1 + c_2 t + \dots + c_k t^{k-1}$, где k – кратность корня.

Пример 3 (кратные вещественные корни). Найдем аналитическое решение дифференциального уравнения

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 0$$

с начальными условиями $y_0 = 1$, $y_1 = y_2 = 0$.

Среди корней характеристического уравнения $p^3 + 4p^2 + 5p + 2 = 0$ имеются два одинаковых корня $p_1 = p_2 = -1$, $p_3 = -2$. В этом случае общее решение записывается в виде

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t} + c_3 e^{-2t}.$$

Для определения произвольных постоянных дважды дифференцируем полученную функцию:

$$\dot{y}(t) = -(c_1 + c_2 t) + c_2 e^{-t} - 2c_3 e^{-2t},$$

$$\ddot{y}(t) = (c_1 + c_2 t) - c_2 e^{-t} + 4c_3 e^{-2t}$$

и полагаем t равным нулю. В результате получаем три алгебраических уравнения относительно коэффициентов c_1 , c_2 , c_3 :

$$c_1 + c_3 = 1, \quad -c_1 + c_2 - 2c_3 = 0, \quad c_1 - 2c_2 + 4c_3 = 0.$$

Решая их, находим значения коэффициентов: $c_1 = 0$; $c_2 = 2$; $c_3 = 1$. Окончательный вид решения:

$$y(t) = 2te^{-t} + e^{-2t}.$$

Среди корней характеристического уравнения могут быть комплексные корни. Пара сопряженных комплексных корней

$p_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ приводит к появлению в решении слагаемых вида $c_1 e^{\alpha t} \sin \beta t + c_2 e^{\alpha t} \cos \beta t$.

Пример 4 (комплексные корни). Дано дифференциальное уравнение $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$. Его характеристическое уравнение $p^2 + 2p + 2 = 0$ имеет корни $p_{1,2} = -1 \pm i$.

Общее решение будет следующим:

$$x(t) = c_1 e^{-t} \sin t + c_2 e^{-t} \cos t.$$

При использовании описанного способа требуется знать соответствие между корнями характеристического уравнения и решениями дифференциального уравнения. В табл. 2.1 приведено восемь типичных случаев такого соответствия.

Таблица 2.1

Соответствие корней и решений

№ п/п	Вид корней	Характер решения
1	$p_1 = 0$	c
2	$p_1 = \alpha$	$ce^{\alpha t}$
3	$p_{1,2} = \pm j\beta$	$c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t$
4	$p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$	$e^{\alpha t} (c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t)$
5	$p_1 = p_2 = \dots = p_k = 0$	$c_1 + c_2 t + \dots + c_k t^{k-1}$
6	$p_1 = p_2 = \dots = p_k = \alpha$	$(c_1 + c_2 t + \dots + c_k t^{k-1})e^{\alpha t}$
7	$p_{1,2} = p_{3,4} = \dots =$ $= p_{2k-1,2k} = \pm j\beta$	$(c_1 + c_2 t + \dots + c_k t^{k-1}) \sin \beta t +$ $+(c_{k+1} + c_{k+2} t + \dots + c_{2k} t^{k-1}) \cos \beta t$
8	$p_{1,2} = p_{3,4} = \dots =$ $= p_{2k-1,2k} = \alpha \pm j\beta$	$(c_1 + c_2 t + \dots + c_k t^{k-1})e^{\alpha t} \sin \beta t +$ $+(c_{k+1} + c_{k+2} t + \dots + c_{2k} t^{k-1})e^{\alpha t} \cos \beta t$

Пример 5. Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \ddot{x} + \dot{x} + x = 0$$

с начальными условиями $\ddot{x}_0 = 40$, $\dot{x}_0 = 35$, $x_0 = 50$.

Его характеристическое уравнение $p^3 + p^2 + p + 1 = 0$ имеет корни $p_1 = -1, p_{2,3} = \pm i$.

Общее решение будет следующим:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \sin t + c_3 \cos t.$$

После подстановки начальных условий получаем:

$$x(t) = 45e^{-t} + 80 \sin t + 5 \cos t.$$

В пакете MATLAB это решение может быть получено с помощью команды **dsolve**:

$$x = \text{dsolve}('D3x + D2x + Dx + x = 0', 'x(0) = 50, Dx(0) = 35, D2x(0) = 40')$$

Пример 6. Пусть известны корни характеристического уравнения шестого порядка:

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0, p_4 = 2, p_{5,6} = -3 \pm 4i.$$

Они соответствуют второй, третьей и четвертой строкам табл. 2.1. Общее решение имеет вид

$$x(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 e^{2t} + c_5 e^{-3t} \sin 4t + c_6 e^{-3t} \cos 4t.$$

Для определения произвольных постоянных в случае комплексных корней приходится брать повторные производные от функций $y = e^{\alpha t} \cos \beta t$ и $y = e^{\alpha t} \sin \beta t$. В табл. 2.2 приведены формулы для производных до третьего порядка.

Таблица 2.2

Производные от гармонических функций

Производные от функции $y = e^{\alpha t} \cos \beta t$
$y = e^{\alpha t} \cos \beta t$
$\dot{y} = e^{\alpha t} (\alpha \cos \beta t - \beta \sin \beta t)$
$\ddot{y} = e^{\alpha t} (\alpha^2 \cos \beta t - 2\alpha\beta \sin \beta t - \beta^2 \cos \beta t)$
$\ddot{\ddot{y}} = e^{\alpha t} (\alpha^3 \cos \beta t - 3\alpha^2\beta \sin \beta t - 3\alpha\beta^2 \cos \beta t + \beta^3 \sin \beta t)$

Производные от функции $y = e^{\alpha t} \sin \beta t$
$y = e^{\alpha t} \sin \beta t$
$\dot{y} = e^{\alpha t} (\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t)$
$\ddot{y} = e^{\alpha t} (\alpha^2 \sin \beta t + 2\alpha\beta \cos \beta t - \beta^2 \sin \beta t)$
$\dddot{y} = e^{\alpha t} (\alpha^3 \sin \beta t + 3\alpha^2\beta \cos \beta t - 3\alpha\beta^2 \sin \beta t - \beta^3 \cos \beta t)$

Продолжить таблицу не составит труда, поскольку числовые коэффициенты в ней совпадают по величине с коэффициентами бинома Ньютона, закон чередования их знаков также достаточно очевиден.

Пример 7. Требуется решить дифференциальное уравнение

$$y^{(6)} + 2y^{(5)} + 4y^{(4)} + 4y^{(3)} + 5y^{(2)} + 2y' + 2y = 0$$

с заданными начальными условиями:

$$y(0) = 0, y'(0) = 2, y^{(2)}(0) = -2, y^{(3)}(0) = -1, y^{(4)}(0) = 0, y^{(5)}(0) = 1.$$

Выписываем характеристический полином и факторизуем его:

$$p^6 + 2p^5 + 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 2 = (p^2 + 2p + 2)(p^2 + 1)^2.$$

Находим его корни $p_{1,2} = -1 \pm j$, $p_{3,4} = p_{5,6} = \pm j$. Они соответствуют четвертой и седьмой строкам табл. 2.1. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y(t) = c_1 e^{-t} \sin t + c_2 e^{-t} \cos t + (c_3 + c_4 t) \sin t + (c_5 + c_6 t) \cos t.$$

Для учета начальных условий это выражение надо пять раз продифференцировать (здесь поможет табл. 2.2) и положить $t = 0$. После определения произвольных постоянных получаем решение

$$y(t) = e^{-t} \sin t + t \cos t.$$

2.3.3. Решение неоднородного дифференциального уравнения

Пусть дано неоднородное линейное дифференциальное уравнение (2.9). Согласно свойству 4, для отыскания его общего ре-

шения $x(t)$ сначала надо найти общее решение $x_0(t)$ соответствующего однородного уравнения, а также какое-либо частное решение $x_ч(t)$ неоднородного уравнения и сложить их:

$$x(t) = x_0(t) + x_ч(t).$$

Для получения $x_0(t)$, как и ранее, составляем характеристическое уравнение и находим его корни. Частное решение дифференциального уравнения определяется видом правой части $f(t)$ дифференциального уравнения (2.2). Если $f(t) = 1$, его следует искать в виде константы $x_ч = d$. Если в правой части стоит экспоненциальная функция $f(t) = e^{-t}$, то частное решение нужно искать в виде экспоненты $x_ч = de^{-t}$.

Несколько типичных случаев приведены в табл. 2.3. В ней слева указан вид функции $f(t)$, а справа – рекомендуемая формула для поиска частного решения $x_ч(t)$.

Таблица 2.3

Частные решения для функций $f(t)$

$f(t)$	$x_ч(t)$
b	d
$b_0 + b_1 t + \dots + b_k t^k$	$d_0 + d_1 t + \dots + d_k t^k$
$e^{\alpha t}$	$d e^{\alpha t}$
$b_1 \sin \beta t + b_2 \cos \beta t$	$d_1 \sin \beta t + d_2 \cos \beta t$
$b_1 e^{\alpha t} \sin \beta t + b_2 e^{\alpha t} \cos \beta t$	$d_1 e^{\alpha t} \sin \beta t + d_2 e^{\alpha t} \cos \beta t$

Константы d_i находят, подставляя $x_ч(t)$ в уравнение (2.9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях времени в правой и левой частях.

Пример 8. Возьмем уравнение

$$\ddot{x} - 4x = 9te^t.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$x_0(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}.$$

Частное решение ищем в виде $x_ч(t) = (d_0 + d_1 t)e^t$.

Подставляя $x_ч(t)$ в исходное уравнение и сокращая на e^t , получим

$$2d_1 + d_0 + d_1 t - 4(d_0 + d_1 t) = 9t.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях t в правой и левой частях: $2d_1 - 3d_0 = 0$, $-3d_1 = 9$. Отсюда $d_0 = -2$, $d_1 = -3$. Следовательно, $x_{\text{ч}}(t) = -(2 + 3t)e^t$, и общее решение имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - (2 + 3t)e^t.$$

Примечание. Возможны случаи, когда подстановка частного решения, рекомендованного табл. 2.3, окончится неудачей (приведет к несовместной системе уравнений). Это бывает, когда функция $f(t)$ (или ее компоненты) удовлетворяют однородному дифференциальному уравнению. В таких случаях следует попробовать умножить частное решение на полином от t .

Пример 9. Дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{x} + 2x = e^{-2t}.$$

Попытка найти частное решение вида $x_{\text{ч}} = de^{-2t}$ приводит к равенству

$$-2de^{-2t} + 2de^{-2t} = e^{-2t},$$

выполнение которого невозможно.

Делаем вторую попытку, взяв $x_{\text{ч}} = dte^{-2t}$. Теперь подстановка в исходное уравнение дает:

$$de^{-2t} - 2dte^{-2t} + 2dte^{-2t} = e^{-2t},$$

откуда $d = 1$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$x(t) = ce^{-2t} + te^{-2t}.$$

В технических приложениях для решения дифференциальных уравнений часто используют операторный метод, основанный на преобразовании Лапласа. Согласно этому методу интегрирование дифференциальных уравнений сводится к алгебраическому решению соответствующих операторных уравнений. Переход к искомому решению осуществляется с помощью таблиц.

Пример 10. Найдем реакцию звена с передаточной функцией $Q(p) = \frac{kp}{Tp + 1}$ на входной сигнал $x = \cos \omega t$, если $k = 2$, $T = 1$ с, $\omega = 1$ с⁻¹.

Изображение входного сигнала имеет вид $X(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$, поэтому для изображения выходного сигнала получаем

$$Y(p) = \frac{2p}{p+1} \frac{p}{p^2+1} = \frac{2p^2}{(p+1)(p^2+1)}.$$

Выполняем разложение на простейшие дроби

$$\frac{2p^2}{(p+1)(p^2+1)} = \frac{A}{p+1} + \frac{Bp}{p^2+1} + \frac{C}{p^2+1}.$$

Постоянные A, B, C находим, приводя выражение в правой части к общему знаменателю и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p в числителях правой и левой части: $A = B = 1; C = -1$. Возвращаясь к оригиналам, получаем $y(t) = e^{-t} + \cos t - \sin t$.

Пример 11. Решить дифференциальное уравнение $y'(t) - 5y(t) + 4y(t) = 4$ при начальных условиях $y(0) = 0, y'(0) = 2$.

Применив к заданному уравнению преобразование Лапласа, получаем для $Y(p)$ алгебраическое уравнение

$$(p^2 - 5p + 4)Y(p) = \frac{4}{p} + 2.$$

Отсюда находим выражение для $Y(p)$ и разлагаем его на сумму простых дробей:

$$Y(p) = \frac{2p+4}{p(p^2-5p+4)} = \frac{1}{p} - \frac{2}{p-1} + \frac{1}{p-4}.$$

Переходя к оригиналам, получаем искомое решение

$$y(t) = 1 - 2e^t + e^{4t}.$$

2.3.4. Системы линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим случай, когда математическая модель имеет вид системы однородных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n, \quad x_i(0) = x_{i0}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.14)$$

где a_{ij} – постоянные коэффициенты.

Ее матричная запись имеет вид

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \quad (2.15)$$

где \mathbf{X} – вектор-столбец с компонентами x_1, \dots, x_n ; \mathbf{A} – квадратная матрица с элементами a_{ij} ; \mathbf{X}_0 – вектор начальных условий.

Один из методов интегрирования системы дифференциальных уравнений основан на предварительном переходе от системы (2.15) к одному уравнению n -го порядка. Для этого из уравнений системы и из уравнений, полученных их дифференцированием, исключают все переменные, кроме одной. Для нее получают одно дифференциальное уравнение n -го порядка. Решая его, определяют эту переменную, а остальные находят по возможности без интегрирования.

Пример 12. Дана система из двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 &= -6x_1 - x_2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

После дифференцирования первого уравнения и подстановки производных получаем:

$$\ddot{x}_1 = 3\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 = 21x_1 - 4x_2.$$

Чтобы исключить x_2 , вычтем отсюда удвоенное первое уравнение системы (2.16):

$$\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_1 - 15x_1 = 0.$$

Мы получили линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Так как корни характеристического полинома $p^2 - 2p - 15$ вещественны и различны: $p_1 = -3$, $p_2 = 5$, то решение имеет вид

$$x_1 = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{5t}.$$

Переменную x_2 находим из соотношения

$$x_2 = 0,5(3x_1 - \dot{x}_1) = 3c_1 e^{-3t} - c_2 e^{5t}.$$

Для определения постоянных коэффициентов c_1 и c_2 используют начальные условия системы.

Пример 13. Дана система неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 3y_1 - 2y_2 + 5, \\ \dot{y}_2 &= 2y_1 - y_2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Из второго уравнения выразим y_1 и \dot{y}_1

$$y_1 = 0,5(\dot{y}_2 + y_2), \quad \dot{y}_1 = 0,5(\dot{y}_2 + \dot{y}_2) \quad (2.18)$$

и подставим их в первое уравнение:

$$\dot{y}_2 - 2\dot{y}_2 + y_2 = 10. \quad (2.19)$$

Находим корни характеристического полинома $p^2 - 2p + 1 = 0$, $p_{1,2} = 1$, и общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y_2^{\text{одн}} = (c_1 + c_2 t)e^t.$$

Частное решение уравнения (2.19) имеет вид $y_2^{\text{ч}} = 10$. Общее решение неоднородного уравнения получаем как сумму этих решений

$$y_2 = y_2^{\text{одн}} + y_2^{\text{ч}} = (c_1 + c_2 t)e^t + 10.$$

Из соотношения (2.18) находим

$$y_1 = 0,5(\dot{y}_2 + y_2) = (c_1 + 0,5c_2 + c_2 t)e^t + 5.$$

Постоянные c_1 и c_2 рассчитываем, используя начальные условия системы (2.17).

Аналогичным образом этот метод применяется и для систем уравнений более высоких порядков.

Таким образом, имеется тесная связь между линейным дифференциальным уравнением n -го порядка и системой n уравнений первого порядка. От любой системы n линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно перейти к одному дифференциальному уравнению относительно одной из неизвестных. Справедливо и обратное утверждение: всякое линейное дифференциальное уравнение n -го порядка можно представить в виде системы n уравнений первого порядка.

В частности, уравнение (2.10) введением обозначений $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, ..., $x^{(n-1)} = x_n$ приводится к виду

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Матрица \mathbf{A} такого вида называется *фробениусовой*, или матрицей, сопровождающей характеристический полином.

Например дифференциальное уравнение второго порядка $\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = 0$ после введения обозначений $y = y_1$, $\dot{y} = y_2$ приводится к системе с фробениусовой матрицей \mathbf{A} второго порядка:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -3y_1 - 2y_2, \end{aligned} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Запись уравнений в таком виде удобна для моделирования в MATLAB и составления схем моделирования в SIMULINK.

2.4. Матричные методы решения дифференциальных уравнений

2.4.1. Метод матричной экспоненты

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \quad (2.20)$$

где \mathbf{A} – квадратная матрица; \mathbf{X} – вектор переменных; \mathbf{X}_0 – вектор начальных условий.

Для ее решения можно использовать матричную формулу

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{X}_0,$$

где $e^{\mathbf{A}t}$ – матричная экспонента. Она вводится как сумма ряда

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} + \dots, \quad (2.21)$$

аналогичного ряду Тейлора для обычной экспоненты. Первый член этого ряда – единичная матрица.

Матричная экспонента представляет собой квадратную матрицу того же размера, что и матрица \mathbf{A} .

Особенно легко находится матричная экспонента для диагональных матриц – в этом случае достаточно взять обычные экспоненты от диагональных элементов. В общем случае вычисление матричной экспоненты – трудоемкая процедура.

Матричная экспонента $e^{\mathbf{A}t}$ обладает рядом свойств, справедливых для обычной экспоненты:

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A}, \quad \int e^{\mathbf{A}t} dt = \mathbf{A}^{-1} e^{\mathbf{A}t} + \mathbf{c}, \quad e^{\mathbf{A}t} \Big|_{t=0} = \mathbf{E}.$$

В то же время некоторые свойства обычной экспоненты не сохраняются, например равенство $e^{At} e^{Bt} = e^{(A+B)t}$ не имеет места.

Изображение матричной экспоненты по Лапласу имеет вид $e^{At} \rightarrow (pE - A)^{-1}$, где $(pE - A)^{-1}$ – так называемая резольвента матрицы A . Эта формула представляет собой обобщение изображения по Лапласу обычной экспоненты $e^{at} \rightarrow \frac{1}{p-a}$.

К основным способам вычисления матричной экспоненты относятся:

1. Непосредственное суммирование членов ряда (2.21).
2. Приведение матрицы A к диагональному виду с помощью формулы $H^{-1}AH$ (каноническая форма Жордана), вычисление экспонент от диагональных элементов и обратный переход.
3. Вычисление матричной экспоненты с помощью преобразования Лапласа $e^{At} \Leftrightarrow (pE - A)^{-1}$.

4. Использование команды `expm` пакета MATLAB.

Пример 14. Найдем матричные экспоненты e^{At} для следующих матриц A :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Возводя их в степени и выполняя поэлементное суммирование членов ряда (2.21), получаем:

$$e^{A_1 t} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}, \quad e^{A_2 t} = \begin{bmatrix} e^t & 2e^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix},$$

$$e^{A_3 t} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}, \quad e^{A_4 t} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{2t} + 1 & e^{2t} - 1 \\ e^{2t} - 1 & e^{2t} + 1 \end{bmatrix}.$$

В частности, для матрицы A_4 имеем:

$$A_4^2 = 2A_4, \quad A_4^3 = 4A_4, \quad \dots, \quad A_4^k = 2^{k-1} A_4.$$

Суммирование ряда (2.21) дает

$$e^{A_4 t} = E + \frac{1}{2} A_4 \left(\frac{2t}{1!} + \frac{(2t)^2}{2!} + \frac{(2t)^3}{3!} + \frac{(2t)^4}{4!} + \dots \right) = E + \frac{1}{2} A_4 (e^{2t} - 1).$$

Пример 15. Найдем для матрицы $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ матричную экспоненту $e^{\mathbf{A}t}$ с помощью преобразования Лапласа.

Решение. Формируем матрицу $p\mathbf{E} - \mathbf{A}$ и вычисляем матричный резольвенту:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{p^2 + 3p + 2} \begin{bmatrix} p+3 & 1 \\ -2 & p \end{bmatrix}.$$

Используя тождество $\frac{1}{p^2 + 3p + 2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$, переходим к оригиналам

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Пример 16. Дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 2x, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

Найдем ее решение с помощью матричной экспоненты.

Выписываем матрицу \mathbf{A} и находим матричную экспоненту $e^{\mathbf{A}t}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} -e^t + 2e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & 2e^t - e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Искомое решение имеет вид $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{\mathbf{A}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ или в скалярной форме

$$x(t) = e^{2t}, \quad y(t) = e^{2t}.$$

2.4.2. Метод собственных векторов

В методе матричной экспоненты для записи решения системы (2.20) используется формула $\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{X}_0$. Если собственные числа матрицы \mathbf{A} вещественны и различны, то удобнее пользоваться методом собственных векторов. Согласно ему решение записывается в форме

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \mathbf{H}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \mathbf{H}_n e^{\lambda_n t}, \quad (2.22)$$

где λ_i и \mathbf{H}_i – собственные числа и собственные векторы матрицы \mathbf{A} ; c_i – произвольные постоянные, зависящие от начальных условий.

Пример 17. Рассмотрим систему из предыдущего примера. Собственные значения матрицы \mathbf{A} этой системы $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Для них собственными векторами будут соответственно

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Согласно формуле (2.22) решение будет содержать два слагаемых

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}.$$

Запись решения в скалярной форме имеет вид

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{2t}, \quad y = 2c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

Пример 18. Дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - y + z, & x(0) &= 0, \\ \dot{y} &= x + 2y - z, & y(0) &= 0, \\ \dot{z} &= x - y + 2z, & z(0) &= 1. \end{aligned}$$

Найдем ее решение методом собственных векторов.

Переходим к матричной форме записи:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Находим собственные числа и собственные векторы матрицы \mathbf{A} :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Общее решение имеет вид $\mathbf{X}(t) = c_1 \mathbf{H}_1 e^t + c_2 \mathbf{H}_2 e^{2t} + c_3 \mathbf{H}_3 e^{3t}$. Постоянные c_1, c_2, c_3 определяем из начальных условий: $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 1$. Окончательно получаем:

$$x(t) = e^{3t} - e^{2t}, \quad y(t) = -e^{2t} + e^t, \quad z(t) = e^{3t} - e^{2t} + e^t.$$

Формула (2.22) справедлива только для матриц A простой структуры, когда среди ее собственных чисел нет кратных. Существует обобщение этой формулы на случай кратных и комплексных собственных чисел. Соответствующий материал можно найти в учебных пособиях [2, 5].

2.5. Краевые и нелинейные дифференциальные уравнения

2.5.1. Краевые задачи

Общее решение дифференциального уравнения n -го порядка

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0x(t) = 0 \quad (2.23)$$

содержит n произвольных коэффициентов. Для того чтобы их определить, задают значения переменной и ее производных в определенных моменты времени. Если указанные значения относятся к одному и тому же моменту времени, то они называются *начальными условиями*. Дифференциальные уравнения с заданными начальными условиями называются *задачей Коши*. Если же эти значения относятся к разным моментам времени, например, $x(t_1) = A_1$; $x(t_2) = A_2$, ..., $x(t_n) = A_n$, то задача называется *краевой*. Краевые задачи часто встречаются в механике, теории упругости, баллистике.

В частности, в теории оптимального управления возникает так называемая *двухточечная краевая задача*, в которой значения переменной и ее производных задаются в начальный и конечный моменты времени $t = 0$ и $t = T$. Например, при $n = 4$ возможны следующие варианты:

- 1) $x(0) = A_1$, $x'(0) = A_2$, $x(T) = A_3$, $x'(T) = A_4$;
- 2) $x'(0) = A_1$, $x''(0) = A_2$, $x(T) = A_3$, $x'(T) = A_4$

и ряд других.

Другим примером краевой задачи может служить задача баллистики, когда нужно определить угол наклона ствола орудия (угол возвышения), чтобы поразить цель. В качестве краевых условий здесь выступают координаты орудия и цели.

Аналитическое решение краевой задачи полностью аналогично решению задачи Коши. Единственное отличие заключается в том, что при определении произвольных коэффициентов, вхо-

дящих в решение, используются не начальные, а краевые условия. Например, для дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0 \quad (2.24)$$

с краевыми условиями $x(t_1) = A_1$, $x(t_2) = A_2$ сначала находят общее решение, которое в случае простых вещественных корней p_1, p_2 характеристического уравнения имеет вид $x(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}$. После этого, полагая $t = t_1$ и $t = t_2$, получают систему алгебраических уравнений для определения постоянных c_1 и c_2 :

$$\begin{aligned} c_1 e^{p_1 t_1} + c_2 e^{p_2 t_1} &= A_1, \\ c_2 e^{p_1 t_2} + c_2 e^{p_2 t_2} &= A_2. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получают уравнения и для других вариантов краевых условий. Отметим, что в некоторых особых случаях указанные уравнения могут оказаться несовместными либо, наоборот, иметь бесконечно много решений.

В тех случаях, когда дифференциальные уравнения аналитически решить не удастся, используют моделирование на вычислительных машинах. Для компьютерного решения краевой задачи ее необходимо предварительно свести к эквивалентной задаче Коши, решение которой совпадает с решением поставленной краевой задачи.

Рассмотрим два метода нахождения начальных условий эквивалентной задачи Коши для краевой задачи: метод пристрелки и метод частных решений.

Метод подбора начальных условий (метод пристрелки). Сущность этого метода состоит в том, что недостающие начальные условия задаются произвольно и с ними решают задачу Коши. Если полученное решение не удовлетворяет заданным краевым условиям, то начальные условия изменяют и решение повторяют. Совокупность начальных условий, при которых решение в граничных точках соответствует краевым условиям, и будет начальными условиями для эквивалентной задачи Коши, полученное решение будет соответствовать решению исходной краевой задачи. Достоинством метода пристрелки является то, что он применим для решения как линейных, так и нелинейных дифференциальных уравнений. Основным недостаток его заключается в трудоемкости процесса подбора начальных условий.

Метод частных решений. В основе этого метода лежит принцип суперпозиции, поэтому он применим только для линейных систем. Сущность метода частных решений поясним на примере дифференциального уравнения (2.23) с краевыми условиями $x(t_1) = A_1, x(t_2) = A_2, \dots, x(t_n) = A_n$.

Требуется найти решение $x(t)$, которое проходит через все указанные точки.

Для того чтобы перейти к эквивалентной задаче Коши, необходимо найти начальные условия $x(0), \dot{x}(0), \dots, x^{(n-1)}(0)$. Поиск этих значений будем осуществлять следующим образом.

Сначала получим n частных решений $x_1(t), \dots, x_n(t)$ уравнения (2.23), отвечающих начальным условиям

$$x_1(0) = 1, \dot{x}_1(0) = 0, \dots, x_1^{(n-1)}(0) = 0;$$

.....

$$x_n(0) = 0, \dot{x}_n(0) = 0, \dots, x_n^{(n-1)}(0) = 1.$$

Запишем решение уравнения (2.23) в виде линейной комбинации этих частных решений

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t). \quad (2.25)$$

Подставляя в уравнение (2.25) заданные краевые условия, получим систему алгебраических уравнений

$$x(t_1) = A_1 = c_1 x_1(t_1) + c_2 x_2(t_1) + \dots + c_n x_n(t_1),$$

.....

$$x(t_n) = A_n = c_1 x_1(t_n) + c_2 x_2(t_n) + \dots + c_n x_n(t_n). \quad (2.26)$$

Так как значения $x_i(t_j)$ известны (они определяются численно при получении n частных решений), то систему (2.26) можно рассматривать как систему n уравнений с n неизвестными c_1, \dots, c_n . После их определения начальные условия эквивалентной задачи Коши можно найти, $n - 1$ раз продифференцировав уравнение (2.25) и положив после этого $t = 0$: $x(0) = c_1, \dot{x}(0) = c_2, \dots, x^{(n-1)}(0) = c_n$.

Окончательное решение получим, моделируя задачу Коши с этими начальными условиями. Алгоритм решения краевой задачи методом частных решений приведен на рис. 2.6.

Отметим, что указанный выбор начальных условий для получения частных решений не только упрощает вычисления, но и

гарантирует линейную независимость частных решений, поэтому если краевая задача имеет решение, то оно всегда может быть найдено описанным способом.

Пример 19. Дано дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$$

с краевыми условиями $x(0) = x(1) = 1$. Требуется найти начальные условия эквивалентной задачи Коши.

Решение. Для получения двух частных решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ задаем начальные условия $x_1(0) = 1, \dot{x}_1(0) = 0$ и $x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 1$.

Аналитически или численно решая исходное уравнение с указанными начальными условиями, находим значения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ при $t = 1$:

$$x_1(1) = 2e^{-1} - e^{-2} \approx 0,6004; \quad x_2(1) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0,2325.$$

Записываем общее решение исходного уравнения в виде (2.25):

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t).$$

Подставляя сюда $t = 0$ и $t = 1$, получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0, \\ 1 &= c_1 \cdot 0,6004 + c_2 \cdot 0,2325. \end{aligned}$$

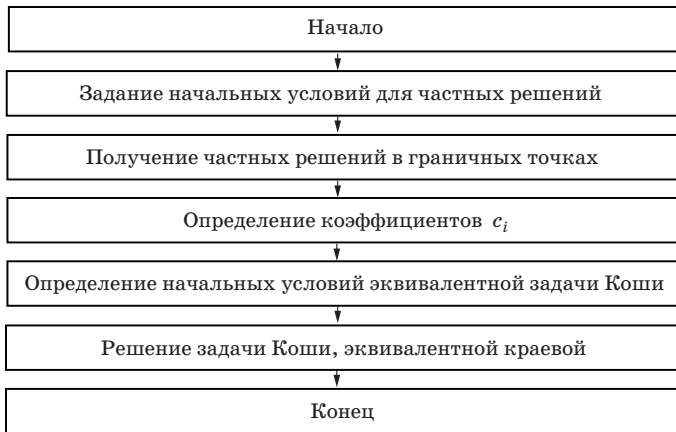


Рис. 2.6. Алгоритм решения краевой задачи методом частных решений

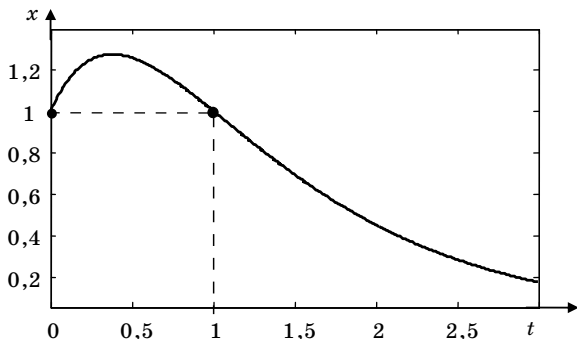


Рис. 2.7. Решение краевой задачи для примера 19

Отсюда $c_1 = 1$, $c_2 = e - 1 \approx 1,718$. Следовательно,

$$x(t) = x_1(t) + 1,718x_2(t), \quad \dot{x}(t) = \dot{x}_1(t) + 1,718\dot{x}_2(t).$$

Полагая $t=0$, из второго уравнения получаем недостающее начальное условие $\dot{x}(0) = e - 1 \approx 1,718$. Таким образом, начальные условия эквивалентной задачи Коши имеют вид $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1,718$.

Тем самым исходная краевая задача сведена к задаче Коши, которая может быть решена в любом математическом пакете, например MATLAB или SIMULINK. Ее аналитическое решение описывается формулой

$$x(t) = (1 + e)e^{-t} - e \cdot e^{-2t} \approx 3,718e^{-t} - 2,718e^{-2t}.$$

Соответствующий график (рис. 2.7) проходит через точки $x(0) = x(1) = 1$.

Достоинством метода частных решений является отсутствие процедуры эмпирического подбора начальных условий. Недостаток метода заключается в невозможности применения его для нелинейных задач.

Заметим, что в пакете MATLAB для решения краевых задач есть специальная функция-решатель **bvp4c** (boundary value problem for continuous) и демофункция **mat4bvp**.

2.5.2. Нелинейные дифференциальные уравнения

Нелинейное дифференциальное уравнение порядка n имеет вид

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0.$$

Его решением является любая функция $x = x(t)$, обращающая уравнение в тождество. Аналитическое решение нелинейных дифференциальных уравнений в большинстве случаев оказывается невозможным, поэтому применение компьютерного моделирования здесь особенно эффективно.

К наиболее простым нелинейным дифференциальным уравнениям относятся:

– уравнение Риккати: $\dot{x} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$,

– уравнение Бернулли: $\dot{x} + f(t)x = \varphi(t)x^n$,

– уравнение Дюффинга: $\ddot{x} + ax = bx^3$,

– уравнение Ван-дер-Поля: $\ddot{x} + (ax^2 - b)\dot{x} + x = 0$.

Эти уравнения возникают при исследовании и моделировании различных физических, технических и социально-экономических задач.

Рассмотрим одну из таких задач, приводящую к уравнению Бернулли.

Пример 20 (динамика численности популяции). Изменение численности популяции во времени $x(t)$ зависит от ряда факторов (площадь обитания, запасов пищи и т. п.). В первом приближении математическая модель может быть описана следующим уравнением первого порядка

$$\dot{x} = ax - bx^\alpha, \quad x(0) = x_0, \quad (2.27)$$

где \dot{x} – скорость роста популяции; a и b – коэффициенты рождаемости и смертности; α – константа, величина больше единицы.

Очевидно, что уравнение (2.27) является частным случаем уравнения Бернулли. Первое слагаемое в его правой части характеризует естественный рост популяции (скорость прироста пропорциональна численности). Второе слагаемое отражает рост смертности с увеличением численности из-за ухудшения жизненных условий (скученность, нехватка питания, эпидемии).

Нетрудно убедиться, что при $a = 0$ (отсутствие рождаемости) величина $x(t)$ асимптотически стремится к нулю (популяция вымирает). Напротив, при $b = 0$ (отсутствие смертности) численность экспоненциально возрастает. При ненулевых значениях a и b численность популяции с течением времени стабилизируется, приближаясь к стационарному уровню $x_{ст}$, который не зависит от начальной численности x_0 . Его можно найти из уравнения (2.27), положив $\dot{x} = 0$, что дает

$$bx_{\text{ст}}^{\alpha-1} = a, \text{ или } x_{\text{ст}} = (a/b)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Чтобы найти, по какому закону изменяется численность популяции, решим уравнение (2.27).

Разделяя переменные и интегрируя обе части, получаем

$$\int \frac{dx}{ax - bx^\alpha} = t.$$

Путем замены переменных $z = x^{1-\alpha}$ это равенство преобразуется к виду

$$\frac{1}{1-\alpha} \int \frac{dz}{az - b} = t.$$

Интегрирование его приводит к выражению

$$a(1-\alpha)t = \ln(az - b) + c.$$

Определив постоянную интегрирования $c = -\ln(az_0 - b)$, где $z_0 = x_0^{1-\alpha}$, подставим ее в последнее равенство:

$$a(1-\alpha)t = \ln \frac{az - b}{az_0 - b}.$$

Выражая отсюда z и возвращаясь обратно к переменной x , получаем искомую зависимость

$$x(t) = \left[\frac{b}{a} + \left(x_0^{1-\alpha} - \frac{b}{a} \right) e^{a(1-\alpha)t} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (2.28)$$

Она характеризует изменение численности популяции во времени при различных значениях параметров a, b, α и начальных условиях. В частности, при $\alpha > 1$ и $t \rightarrow \infty$ имеем $x = (b/a)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, что совпадает с найденным ранее стационарным значением $x_{\text{ст}}$. Типичный вид графиков, задаваемых формулой (2.28), приведен на рис. 2.8.

Одна из кривых соответствует случаю многочисленной исходной популяции с начальными условиями x_{01} , а другая – малочисленной с начальными условиями x_{02} . В обоих случаях кривые с течением времени стремятся к одному и тому же стационарному уровню.

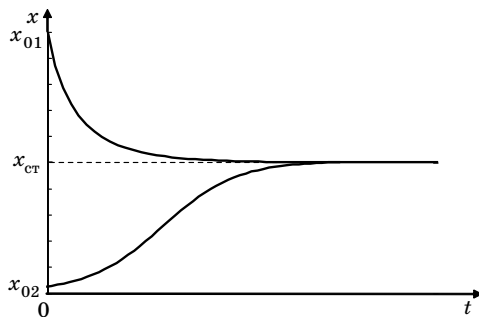


Рис. 2.8. Решение уравнения Бернулли

Промежуточное положение между линейными (с постоянными коэффициентами) и нелинейными дифференциальными уравнениями занимают линейные уравнения с переменными коэффициентами

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = f(t).$$

Примерами таких уравнений могут служить:

- уравнение Эрмита: $\ddot{y} - 2t\dot{y} + 2ny = 0$,
- уравнение Лагерра: $t\dot{y} + (1-t)\dot{y} + ny = 0$,
- уравнение Бесселя: $t^2\ddot{y} + t\dot{y} + (t^2 - n^2)y = 0$,
- уравнение Чебышева: $(1-t^2)\ddot{y} - t\dot{y} + n^2y = 0$,
- уравнение Лежандра: $(1-t^2)\ddot{y} - 2t\dot{y} + n(n+1)y = 0$,
- уравнение Матье: $\ddot{x} + (a - 2q \cos \omega t)x = 0$.

Мощным средством решения дифференциальных уравнений (линейных и нелинейных), позволяющим резко сократить затраты времени и усилий, являются математические программные системы типа MATLAB, SIMULINK, MAPLE, MATHEMATICA. В них для численного решения дифференциальных уравнений используют методы Эйлера, Рунге – Кутта, Адамса и др. Результаты решения в виде числовых данных, графиков, фазовых портретов могут быть получены для большого диапазона изменения переменных, начальных условий и возмущающих воздействий.

Задачи и упражнения

1. Как изменится решение линейного однородного дифференциального уравнения, если изменить знаки всех начальных

условий на противоположные? Если вдвое изменить величину всех начальных условий?

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + 2y = 0.$$

Ответ. $y = e^t (c_1 \sin t + c_2 \cos t)$.

3. Решить уравнение

$$\ddot{x}(t) + 6x(t) + 9x(t) = 0 \quad \text{при} \quad x(0) = 1, \quad x(1) = -2.$$

Решение. Записываем характеристическое уравнение $p^2 + 6p + 9 = 0$. У него кратные корни $p_{1,2} = -3$, следовательно, общее решение имеет вид $x = (c_1 t + c_2) e^{-3t}$. Находим постоянные коэффициенты: $c_1 = c_2 = 1$.

Ответ. $x = (1 + t) e^{-3t}$.

4. Найти решение дифференциального уравнения

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + \dot{y} + 6y = 0, \quad y_0 = 3, \quad \dot{y}_0 = 6, \quad \ddot{y}_0 = 0.$$

Ответ. $y = 7e^{2t} - 3e^{3t} - e^{-t}$.

5. Найти решение системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\dot{x}(t) = x(t) - 3y(t),$$

$$\dot{y}(t) = 3x(t) + y(t).$$

Указание. Собственные числа и собственные векторы матрицы \mathbf{A} в данном случае имеют вид:

$$p_{1,2} = 1 \pm 3i, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

6. Найти частное решение неоднородного уравнения

$$6\ddot{y} - 5\dot{y} + y = e^{t/2}.$$

Ответ. $y = te^{t/2}$.

7. Найти общее решение неоднородного уравнения

$$\ddot{y} + \dot{y} - 5\dot{y} + 3y = 8e^t.$$

Ответ. $y = c_1 e^{-3t} + (c_2 + c_3 t + t^2) e^t$.

8. Решить задачу Коши

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + \dot{x} = 4, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 2, \quad \ddot{x}(0) = -2.$$

Ответ. $x(t) = 4t + 3 - 2e^t$.

9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = 2z - x + y, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = z(0) = 0.$$

Указание. Собственные числа матрицы $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ равны 0, 1, 1.

Ответ. $x(t) = -1 + 2e^t$, $y(t) = -3 + 3e^t$, $z(t) = 1 - e^t$.

10. Дана система дифференциальных уравнений десятого порядка

$$\dot{x}_1 = 0,1x_2, \quad \dot{x}_2 = 2/9x_3, \quad \dot{x}_3 = 3/8x_4, \quad \dot{x}_4 = 4/7x_5,$$

$$\dot{x}_5 = 5/6x_6, \quad \dot{x}_6 = 6/5x_7, \quad \dot{x}_7 = 7/4x_8, \quad \dot{x}_8 = 8/3x_9,$$

$$\dot{x}_9 = 9/2x_{10}, \quad \dot{x}_{10} = -10(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10})$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = \dots = x_{10}(0) = 0.$$

Требуется перейти от этой системы к дифференциальному уравнению десятого порядка относительно переменной x_2 и решить его.

Указание. Характеристический полином дифференциального уравнения для переменной x_2 имеет вид $(p + 1)^{10}$. Все его десять корней одинаковы и равны -1 .

Ответ. $x_2 = -\frac{10}{9!}t^9 e^{-t}$.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Существует два подхода к численному моделированию дифференциальных уравнений – программный и структурный. В первом случае составляют программу, в результате выполнения которой получают решение дифференциального уравнения в виде массива численных значений. Во втором случае программа как таковая не составляется, а вместо этого по дифференциальному уравнению строится структурная схема на некоторых типовых блоках. Такой подход (иногда его называют *визуальным программированием*) используется, в частности, в пакете SIMULINK. В данном разделе рассматривается второй подход.

3.1. Принцип структурного моделирования

Исходным материалом для структурного моделирования дифференциальных уравнений служит схема моделирования. На ней изображаются вычислительные блоки (усилители, сумматоры, интеграторы) и связи между ними. Любая такая схема может быть описана дифференциальным уравнением или системой дифференциальных уравнений и, наоборот, любому дифференциальному уравнению можно сопоставить некоторую схему моделирования. Эта идея, высказанная впервые известным английским физиком лордом Кельвином, и лежит в основе структурного моделирования.

Соответственно возникают две взаимосвязанные задачи:

– дано дифференциальное уравнение или система дифференциальных уравнений, требуется составить схему моделирования (прямая задача);

– дана схема моделирования, составленная из сумматоров, интеграторов и других блоков, требуется найти ее математическое описание в виде дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений (обратная задача).

Таким образом, в прямой задаче нужна методика перехода от дифференциальных уравнений к схеме моделирования, а в обратной – методика перехода от схемы моделирования к дифференциальным уравнениям.

При проведении компьютерного моделирования структурная схема набирается на экране дисплея с помощью мыши или клавиатуры. По своему смыслу этот процесс аналогичен вводу программы, однако он более прост и нагляден. Удобным сред-

ством для моделирования структурных схем является система SIMULINK – составная часть пакета MATLAB. Она содержит библиотеки различных блоков, из которых в рабочем окне с помощью мышки строится структурная схема модели.

Рассмотрим некоторые из типовых вычислительных блоков, используемых в SIMULINK.

Масштабный усилитель (обозначается треугольником с надписью gain) реализует математическую зависимость $y = ax$, где a – коэффициент усиления. Если $a = -1$, то масштабный усилитель превращается в инвертор – блок, изменяющий знак входного сигнала. Инвертор реализует зависимость $y = -x$.

Сумматор (обозначается кружком или прямоугольником с надписью sum) реализует зависимость $y = \pm x_1 \pm x_2 \pm x_3$, знаки суммирования и число слагаемых можно изменять, щелкнув по блоку мышкой. Оба эти блока находятся в библиотеке (группе блоков) Math Operations.

Простейший динамический блок – *интегратор* (изображается треугольником или прямоугольником с обозначением $\frac{1}{s}$ внутри и надписью integrator). Он находится в библиотеке Continuous и реализует зависимость

$$y(t) = y_0 + \int_0^t x(t) dt.$$

Для установки начального условия y_0 надо войти внутрь блока, щелкнув по нему мышкой. Например, если $y_0 = 2$ и на вход интегратора поступает сигнал $x = 1$, то выходной сигнал определяется формулой $y = 2 + t$. Это линейно изменяющееся напряжение, осциллограмма которого имеет вид наклонной прямой.

Соединяя блоки определенным образом между собой, получают схемы для реализации различных функций времени, решения дифференциальных уравнений, моделирования технических объектов.

Простейшую схему получаем, используя интегратор, охваченный положительной или отрицательной обратной связью (рис. 3.1, а, б).

Чтобы найти вид выходного сигнала первой из этих схем, выпишем уравнение для сигнала \dot{y} :

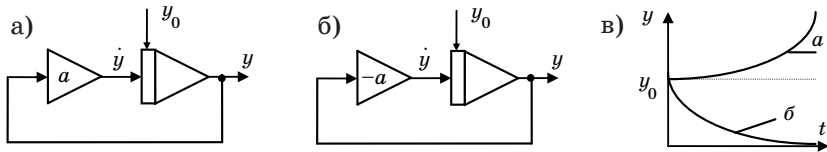


Рис. 3.1. Получение экспоненциальных функций

$$\dot{y} = ay; \quad y(0) = y_0,$$

где

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка относительно переменной y . Решим его методом разделения переменных:

$$\frac{dy}{y} = a dt, \quad \ln y = at + c, \quad y = y_0 e^{at}.$$

Аналогичные выкладки для второй схемы приводят к выражению $y = y_0 e^{-at}$ (см. графики этих сигналов на рис. 3.1, в).

3.2. Типовые схемы моделирования

Рассмотрим простейшие схемы моделирования на двух интеграторах. Для каждой из них найдем математическое описание в виде дифференциального уравнения и, решив его, получим аналитическое выражение для выходного сигнала, подобно тому, как это было сделано выше для схемы на одном интеграторе с обратной связью.

3.2.1. Схема на двух интеграторах с отрицательной обратной связью

На рис. 3.2, а приведена схема, которая представляет собой кольцо из двух интеграторов, охваченных отрицательной обратной связью.

Начальные условия на интеграторах определяют начальное состояние схемы. Найдем аналитические выражения для выходных сигналов схемы моделирования, приняв $y_0 = 0$, $x_0 = 1$.

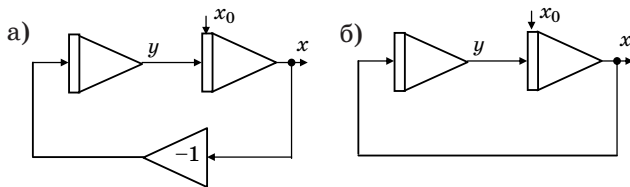


Рис. 3.2. Схемы с отрицательной (а) и положительной (б) обратной связью

Пользуясь схемой, выпишем уравнения для выходных сигналов интеграторов: $\dot{x} = y$; $\dot{y} = -x$, откуда следует дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + x = 0, x_0 = 1, \dot{x}_0 = 0. \quad (3.1)$$

Поскольку корни характеристического полинома этого уравнения чисто мнимые $p_{1,2} = \pm i$, общее решение имеет вид

$$x(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

Постоянные коэффициенты c_1 и c_2 находим из начальных условий: $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, т. е. $x(t) = \cos t$. Сигнал $y(t)$ определяется условием $y(t) = \dot{x}(t)$, откуда $y(t) = -\sin t$. Следовательно, осциллограммы выходных сигналов интеграторов будут иметь вид, показанный на рис. 3.3, а.

Если подать сигналы x и y на горизонтальный и вертикальный входы осциллографа, то на его экране воспроизведется зависимость $y = f(x)$. Она имеет вид окружности (рис. 3.3, б), уравнение которой получаем, складывая квадраты сигналов $x(t)$ и $y(t)$:

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (3.2)$$

Радиус окружности равен 1, начальная точка имеет координаты $(1, 0)$, направление ее движения показано на рис. 3.3, б стрелкой. Уменьшение начальных условий приведет к уменьшению радиуса окружности, как это показано пунктирной линией на рис. 3.3, б. Плоскость с координатами x, y , где $y = \dot{x}$, называется *фазовой плоскостью*; графики на ней – *фазовыми траекториями*, а совокупность фазовых траекторий, отвечающих разным начальным условиям, – *фазовым портретом системы*. В нашем случае фазовый портрет представляет собой совокупность концентрических окружностей с центром в начале координат.

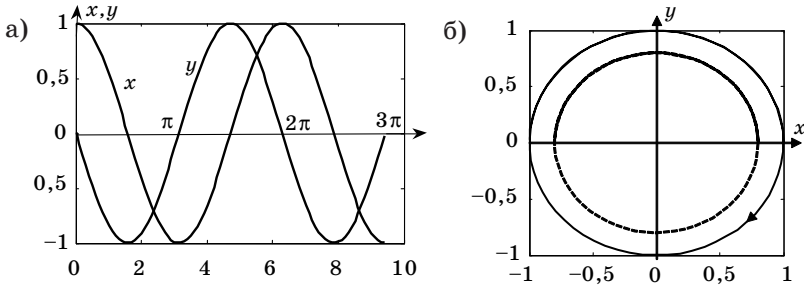


Рис. 3.3. Выходные сигналы и фазовый портрет схемы, изображенной на рис. 3.2, а

Опишем способ получения уравнений фазовых траекторий, не требующий предварительного решения уравнения (3.1). Он основан на использовании так называемого интегрирующего множителя. Умножим обе части уравнения (3.1) на множитель $2\dot{x}$:

$$2\ddot{x}\dot{x} + 2x\dot{x} = 0.$$

Первое слагаемое представляет собой производную по времени от \dot{x}^2 , а второе – производную от x^2 , поэтому после интегрирования получаем

$$\dot{x}^2 + x^2 = c \text{ или } x^2 + y^2 = c.$$

Последнее уравнение отличается от уравнения (3.2) только значением константы в правой части: $c = x_0^2 + y_0^2$.

Тем самым мы получили описание фазового портрета, не находя явных выражений для $x(t)$ и $y(t)$. Такой прием (метод интегрирующего множителя) особенно удобен в тех случаях, когда дифференциальное уравнение, соответствующее схеме моделирования, не имеет аналитического решения.

Если изменить коэффициент усиления в обратной связи схемы, приведенной на рис. 3.2, а, то окружности на рис. 3.3, б превратятся в эллипсы. Эту схему часто используют в вычислительной технике как генератор гармонических колебаний.

3.2.2. Схема на двух интеграторах с положительной обратной связью

Рассмотрим схему, приведенную на рис. 3.2, б. Она описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} - x = 0. \tag{3.3}$$

Корни характеристического полинома этого уравнения $p_{1,2} = \pm 1$, общее решение имеет вид

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Используя формулы Эйлера для гиперболических функций

$$\operatorname{cht} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{sht} = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

общее решение можно записать в виде

$$x(t) = c'_1 \operatorname{sht} + c'_2 \operatorname{cht}.$$

Если $x_0 = 1$, $\dot{x}_0 = 0$, то $c'_1 = 0$, $c'_2 = 1$, т. е. $x(t) = \operatorname{cht}$.

Выходной сигнал другого интегратора $y(t)$ определяется условием $y(t) = \dot{x}(t)$, откуда $y(t) = \operatorname{sht}$. Следовательно, схема выработывает гиперболические функции cht и sht (см. графики на рис. 3.4, а). На фазовой плоскости x, y им будет отвечать гипербола

$$x^2 - y^2 = 1. \quad (3.4)$$

Фазовый портрет описывается уравнением

$$x^2 - y^2 = c, \quad c = x_0^2 - y_0^2. \quad (3.5)$$

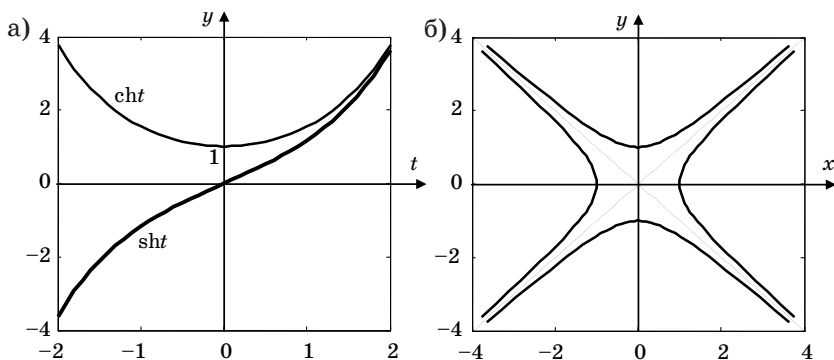


Рис. 3.4. Выходные сигналы (а) и фазовый портрет (б) схемы, изображенной на рис. 3.2, б

Ему соответствует семейство равнобочных гипербол с асимптотами $y = \pm x$ (рис. 3.4, б).

3.2.3. Схема на аperiodических звеньях с отрицательной обратной связью

Усложним схему, приведенную на рис. 3.2, а, заменив интеграторы аperiodическими звеньями с передаточной функцией $\frac{1}{p+a}$. Результирующая схема показана на рис. 3.5, а, а ее реализация на сумматорах и интеграторах – на рис. 3.5, б.

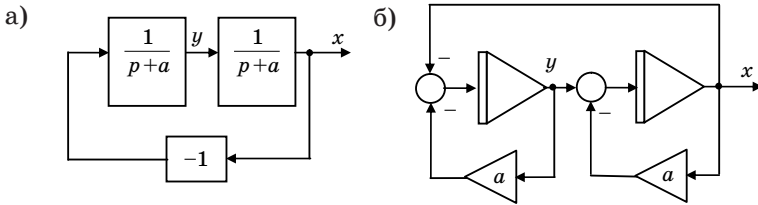


Рис. 3.5. Схема на аperiodических звеньях

Пользуясь схемой, выпишем уравнения для выходных сигналов интеграторов:

$$\dot{x} = y - ax, \quad \dot{y} = -ay - x.$$

Исключим переменную y . Для этого продифференцируем первое уравнение и подставим в него \dot{y} из второго уравнения:

$$\dot{x} = \dot{y} - a\dot{x}, \quad \ddot{x} = -a\dot{x} - x - ay.$$

Подставляя сюда y , выраженное из первого уравнения $y = \dot{x} + ax$, получаем дифференциальное уравнение второго порядка относительно переменной x :

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + (a^2 + 1)x = 0.$$

Его характеристический полином $p^2 + 2ap + a^2 + 1$ имеет комплексные корни $p_{1,2} = -a \pm i$. Им соответствует решение вида

$$x(t) = c_1 e^{-at} \sin t + c_2 e^{-at} \cos t.$$

Для определения коэффициентов c_1, c_2 зададим начальные условия $x_0 = 1, \dot{x}_0 = -a$. Подставляя их в выражения для $x(t), \dot{x}(t)$ при $t = 0$, получаем

$$c_2 = 1, c_1 = 0, \text{ т. е. } x(t) = e^{-at} \cos t.$$

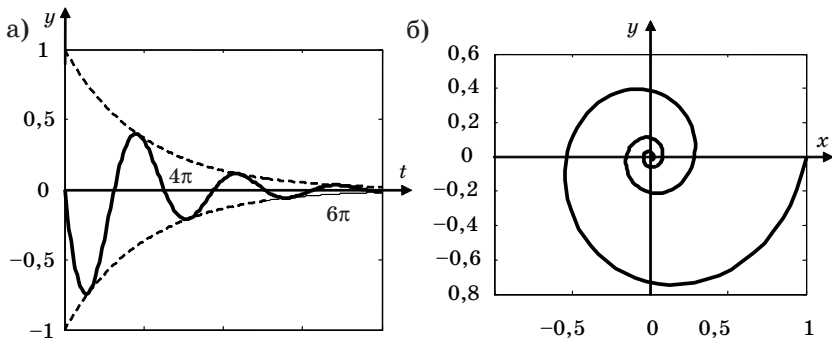


Рис. 3.6. Графики для схемы на аperiodических звеньях

Выражение для y находим по формуле $y = \dot{x} + ax$: $y(t) = -e^{-at} \sin t$. График этого сигнала для $a = 0,2$ приведен на рис. 3.6, а. На рис. 3.6, б показан график в плоскости x, y . В декартовой системе координат он описывается уравнением

$$\ln(x^2 + y^2) = 2a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Оно получается из рассмотрения выражений $x^2 + y^2 = e^{-2at}$ и $\frac{y}{x} = -\operatorname{tg} t$.

В полярных координатах уравнение этой кривой имеет вид $\rho = e^{a\varphi}$, т. е. она является логарифмической спиралью.

Одно из замечательных свойств этой кривой состоит в том, что она на каждом витке пересекает оси координат под одним и тем же углом (теоретически количество витков равно бесконечности).

3.3. Моделирование дифференциального уравнения

При структурном моделировании дифференциальных уравнений необходимо составить схему моделирования, отвечающую заданному уравнению. Существует несколько методов построения схем моделирования дифференциальных уравнений. К наиболее известным относится *метод понижения производной (метод Кельвина)*.

Рассмотрим составление схемы моделирования этим методом для линейного дифференциального уравнения n -го порядка

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = f(t). \quad (3.6)$$

с начальными условиями $y(0) = u_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = u_n$.

Процедура построения схемы по методу Кельвина содержит четыре шага.

Шаг 1. Уравнение (3.6) разрешается относительно старшей производной

$$y^{(n)} = -a_{n-1}y^{(n-1)} - \dots - a_1\dot{y} - a_0y + f(t). \quad (3.7)$$

Шаг 2. Составляется цепочка из n последовательно соединенных интеграторов (рис. 3.7), на вход которой подается старшая производная $y^{(n)}$, тогда на выходах интеграторов будут сигналы $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, \dot{y}, y$;

Шаг 3. Путем суммирования этих сигналов в соответствии с уравнением (3.7) формируется старшая производная (рис. 3.8);

Шаг 4. Обе схемы, показанные на рис. 3.7 и 3.8, объединяются в одну схему (рис. 3.9).

Структурная схема моделирования, полученная в результате выполнения четвертого шага, с указанием начальных условий,

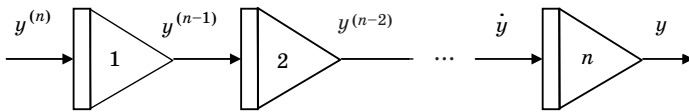


Рис. 3.7. Цепочка интеграторов (шаг 2)

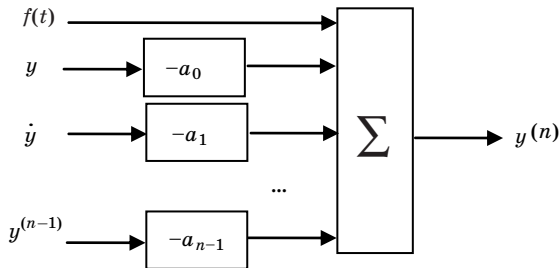


Рис. 3.8. Получение старшей производной (шаг 3)

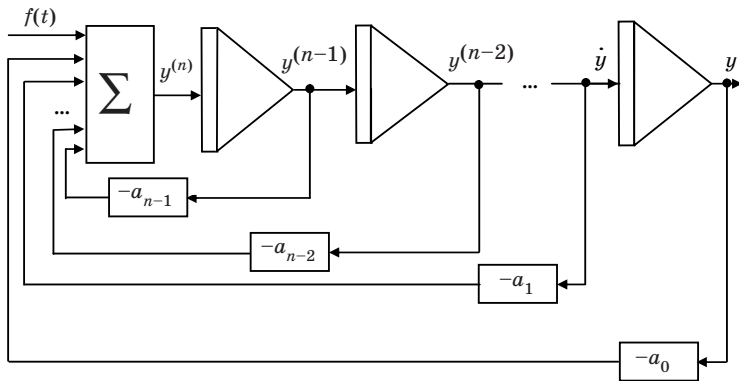


Рис. 3.9. Объединение схем (шаг 4)

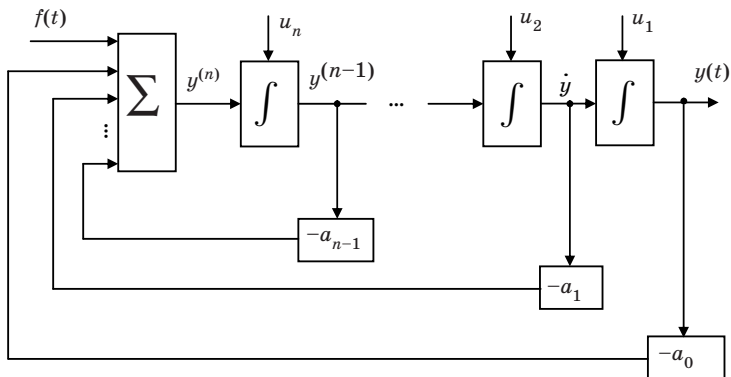


Рис. 3.10. Схема моделирования линейного дифференциального уравнения n -го порядка

приведена на рис. 3.10. Она содержит n интеграторов, сумматор и n усилителей.

Пример 1. Пусть дано однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = 0, \quad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 4. \quad (3.8)$$

Для построения схемы моделирования воспользуемся методом Кельвина.

Шаг 1. Разрешаем исходное уравнение относительно старшей производной: $\ddot{x} = -2\dot{x} - 3x$.

Шаг 2. Полагаем вторую производную известной и выполняем ее двойное интегрирование. Для этого потребуется два последовательно включенных интегратора, на выходах которых получим сигналы \dot{x} и x .

Шаг 3. Формируем вторую производную, используя уравнение, полученное на первом шаге. Для этого потребуется сумматор, складывающий сигналы \dot{x} и x , домноженные на коэффициенты -2 и -3 .

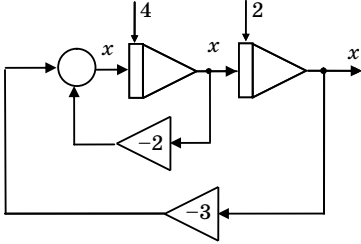


Рис. 3.11. Схема моделирования для примера 1

Шаг 4. Объединяем схемы, полученные на втором и третьем шагах, в общую схему моделирования, указываем начальные условия интеграторов. В результате получаем схему, показанную на рис. 3.11. Она содержит два интегратора, два масштабных усилителя и сумматор (обозначен кружочком).

Пример 2. На рис. 3.12, а приведена схема моделирования уравнения третьего порядка

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 0$$

с начальными условиями $y_0 = 1, \dot{y}_0 = \ddot{y}_0 = 0$, построенная по методу Кельвина.

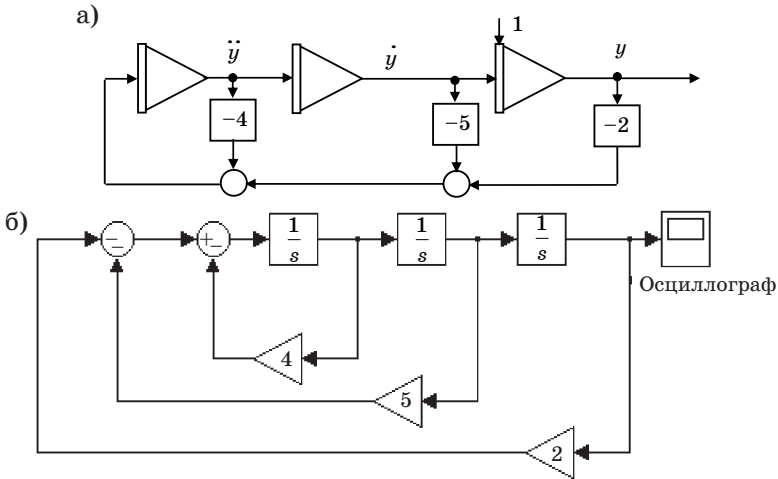


Рис. 3.12. Схемы моделирования для примера 2

На рис. 3.12, б эта схема показана в том виде, в каком она представляется в рабочем окне SIMULINK.

Моделирование нелинейных дифференциальных уравнений также может производиться по методу Кельвина.

Пример 3. Нелинейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \sin x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

используется для описания колебаний маятника длины $l = 9,81$ при отсутствии трения. Предполагается, что угол x , характеризующий отклонение маятника от положения равновесия, может быть большим и, в частности, превышать 180° (тогда маятник совершает вращательные движения, как оборотные качели или гимнаст на турнике, выполняющий «солнышко»).

Схема моделирования такого дифференциального уравнения отличается от схемы, приведенной на рис. 3.2, а тем, что инвертор в обратной связи заменяется функциональным блоком, реализующим функцию $-\sin x$ (рис. 3.13, а).

Графики сигнала $x(t)$ при разных начальных условиях приведены на рис. 3.13, б. Один из них отвечает случаю колебаний без переворота (начальные условия $x_0 = 0, \dot{x}_0 = 1$), второй – вращательному движению маятника (начальные условия $x_0 = 0, \dot{x}_0 = 2,2$).

На рис. 3.13, в показаны траектории на фазовой плоскости x, \dot{x} . При малых начальных условиях это семейство замкнутых кривых с центром в начале координат, при больших – волнообразные незамкнутые кривые, отвечающие вращательному движению.

Найдем уравнения этих кривых, используя метод интегрирующего множителя. Домножим обе части исходного дифференциального уравнения на $2\dot{x}$ и выполним интегрирование:

$$2\ddot{x}\dot{x} + 2\dot{x}\sin x = 0, \quad \dot{x}^2 - 2\cos x = c.$$

Если $x_0 = 0$, то $c = \dot{x}_0^2 - 2$ и последнее выражение приводится к виду

$$\dot{x}^2 + 4\sin^2 \frac{x}{2} = \dot{x}_0^2.$$

При малых x получаем уравнение окружности $\dot{x}^2 + x^2 = \dot{x}_0^2$. При $\dot{x}_0 > 2$ происходит вращательное движение маятника и кривые становятся волнообразными.

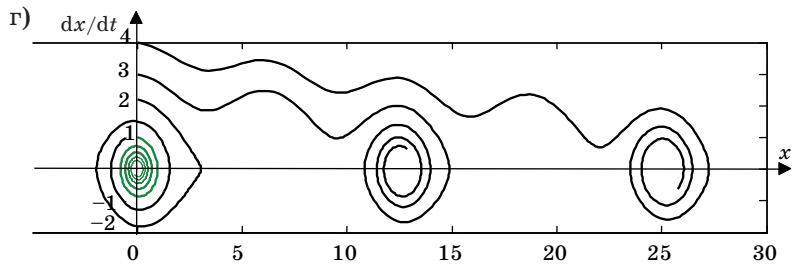
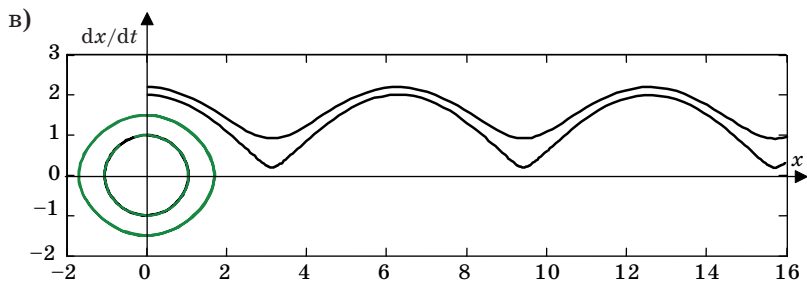
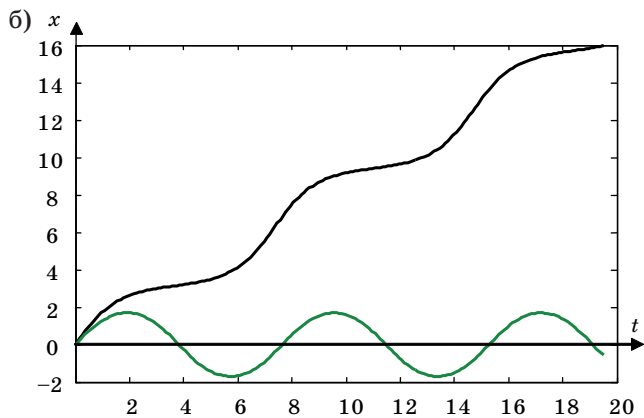
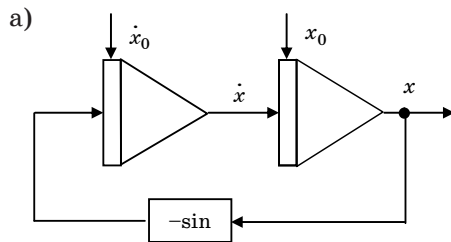


Рис. 3.13. Моделирование математического маятника

Подчеркнем, что метод интегрирующего множителя позволил получить аналитическое описание фазовых траекторий, хотя исходное дифференциальное уравнение не интегрируется в элементарных функциях.

На рис. 3.13, *г* приведены четыре фазовые траектории для маятника с трением, описываемого уравнением

$$\ddot{x} + 0,1\dot{x} + \sin x = 0, \quad x_0 = 0.$$

Они получены при запуске модели маятника из положения покоя с начальной скоростью $\dot{x}_0 = 1, 2, 3, 4$. Два первых случая отвечают колебательному движению без переворота, два других – движению с одним и двумя переворотами.

Пример 4. Нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

называется *уравнением Ван-дер-Поля*. Два варианта его схемы моделирования приведены на рис. 3.14, *а, б*.

Каждая из схем содержит два интегратора, блок перемножения (помечен крестиком) и функциональный блок для реализации функции $x^2 - 1$.

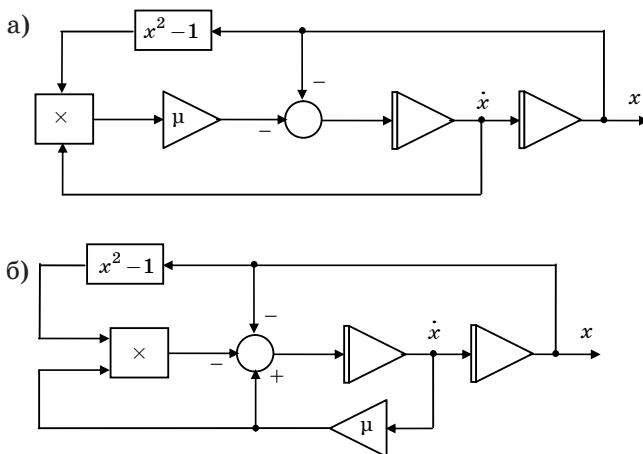


Рис. 3.14. Моделирование уравнения Ван-дер-Поля

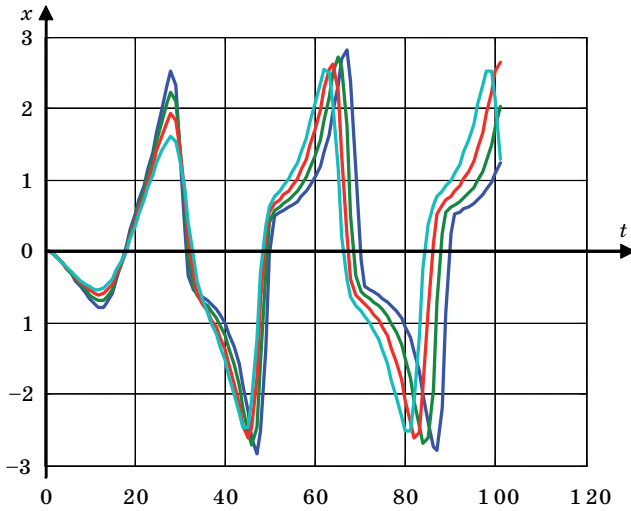


Рис. 3.15. Решения уравнения Ван-дер-Поля

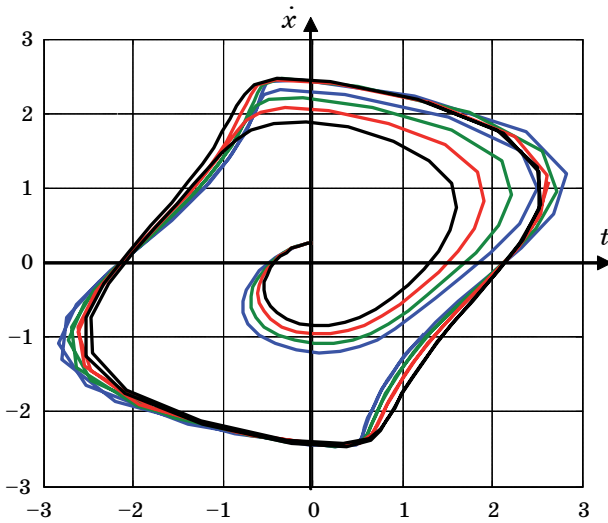


Рис. 3.16. Фазовый портрет

Схемы получены методом Кельвина для следующих вариантов записи исходного уравнения:

$$\dot{x} = -\mu(x^2 - 1)\dot{x} - x, \quad \ddot{x} = -\mu x^2 \dot{x} + \mu \dot{x} - x.$$

Вид решений $x(t)$ уравнения Ван-дер-Поля при разных значениях параметра μ приведен на рис. 3.15, а на рис. 3.16 показана траектория решения на фазовой плоскости (x, \dot{x}) . На последнем рисунке хорошо виден предельный цикл, соответствующий установившемуся режиму работы.

3.4. Моделирование системы дифференциальных уравнений

Наряду с дифференциальным уравнением вида (3.6) часто используют описание моделируемых объектов с помощью системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n, \quad x_i(0) = x_{i0}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.9)$$

где x_i – так называемые переменные состояния; a_{ij} – постоянные коэффициенты.

Матричная запись системы (3.9) имеет вид

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \quad (3.10)$$

где \mathbf{X} – вектор-столбец с компонентами x_1, \dots, x_n ; \mathbf{X}_0 – вектор начальных условий; \mathbf{A} – квадратная матрица с элементами a_{ij} .

Например, при моделировании летательного аппарата составляющими вектора \mathbf{X} могут быть текущие координаты самолета и скорости их изменения, тогда матрица \mathbf{A} будет характеризовать динамику самолета.

Если в матричном уравнении (3.10) отразить наличие входного и выходного сигналов, то получим стандартное описание в пространстве состояний

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}\mathbf{X}, \quad (3.11)$$

или в более подробной записи

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} u, \quad y = [c_1 \dots c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Квадратная матрица \mathbf{A} , входящая в это описание, характеризует внутреннюю структуру системы и ее собственную динамику (свободное движение), а матрицы \mathbf{b} и \mathbf{c} – структуру ее входного и выходного устройств.

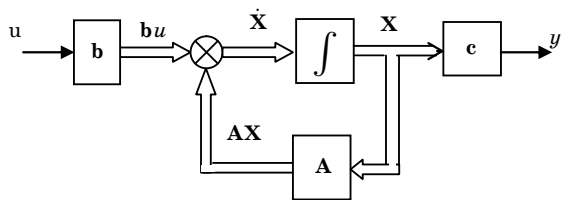


Рис. 3.17. Реализация системы в пространстве состояний

Матричному уравнению (3.11) соответствует блок-схема, содержащая блок интеграторов, блок сумматоров и блоки матричных усилителей (рис. 3.17).

Для моделирования систем (3.9) или (3.11) методом Кельвина достаточно составить схемы для каждого уравнения отдельно и соединить их между собой.

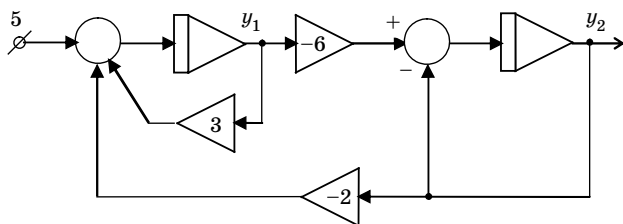


Рис. 3.18. Схема моделирования для примера 5

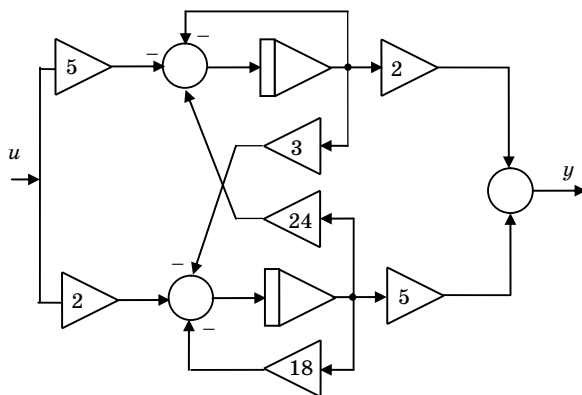


Рис. 3.19. Схема моделирования для примера 6

Пример 5. Схема моделирования системы из двух дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_1 = 3y_1 - 2y_2 + 5, \quad \dot{y}_2 = -6y_1 - y_2$$

имеет вид, показанный на рис. 3.18. Она содержит два интегратора, два сумматора и три усилителя.

Пример 6. На рис. 3.19 показана схема моделирования объекта второго порядка, задаваемого уравнениями

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -1 & 24 \\ -3 & -18 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = [2 \quad 5]\mathbf{X}.$$

Схема составлена непосредственно по уравнениям, она включает два интегратора, три сумматора и семь усилителей для умножения на постоянные коэффициенты (по числу неединичных элементов матриц).

3.5. Эквивалентные схемы моделирования

Метод Кельвина позволяет строить схемы моделирования для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, а также для систем таких уравнений. Соответствующая методика проста и достаточно универсальна. Однако это не единственный метод моделирования.

Фактически для каждого дифференциального уравнения можно составить много схем, имеющих разную структуру – параллельную, последовательную, цепную и др. С математической точки зрения они будут эквивалентными, однако их технические характеристики – сложность, вычислительная устойчивость, удобство реализации – могут существенно различаться.

Поясним это на примере линейного дифференциального уравнения третьего порядка

$$\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = 0. \quad (3.12)$$

На рис. 3.20 приведены два варианта схемы моделирования этого уравнения.

Первая из них построена по методу Кельвина, вторая схема представляет собой зеркальное отображение первой. Она имеет те же элементы и коэффициенты, но отличается направлением прохождения сигналов, это так называемая *дуальная схема*.

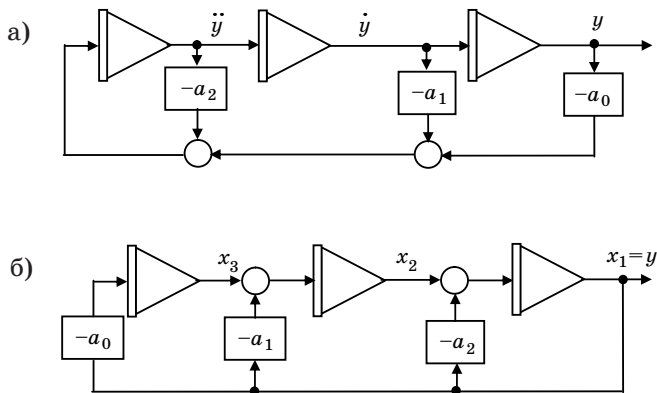


Рис. 3.20. Дуальные схемы

Чтобы доказать эквивалентность обеих схем, найдем дифференциальное уравнение для второй из них. Обозначим выходные сигналы интеграторов этой схемы через x_1 , x_2 , x_3 и выпишем дифференциальные уравнения для каждого интегратора:

$$\dot{x}_1 = x_2 - a_2 x_1, \quad \dot{x}_2 = x_3 - a_1 x_1, \quad \dot{x}_3 = -a_0 x_1. \quad (3.13)$$

Исключим из этих уравнений переменные x_2 , x_3 , для чего дважды дифференцируем первое уравнение с учетом двух других:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + a_2 \dot{x}_1 + a_1 x_1 &= x_3, \\ \ddot{x}_1 + a_2 \dot{x}_1 + a_1 x_1 + a_0 x_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Поскольку $x_1 = y$, последнее уравнение совпадает с уравнением (3.12), следовательно, обе схемы эквивалентны и при установке согласованных начальных условий дадут один и тот же выходной сигнал.

Обозначим начальные условия исходного уравнения через y_0 , \dot{y}_0 , \ddot{y}_0 . Тогда согласованные начальные условия схемы, приведенной на рис. 3.20, б, рассчитываются по формулам:

$$x_{10} = y_0, \quad x_{20} = \dot{y}_0 + a_2 y_0, \quad x_{30} = \ddot{y}_0 + a_2 \dot{y}_0 + a_1 y_0,$$

которые вытекают из уравнений (3.13), (3.14) при $t = 0$.

Два других варианта моделирования дифференциального уравнения (3.12) – параллельная и последовательная схемы – показаны на рис. 3.21.

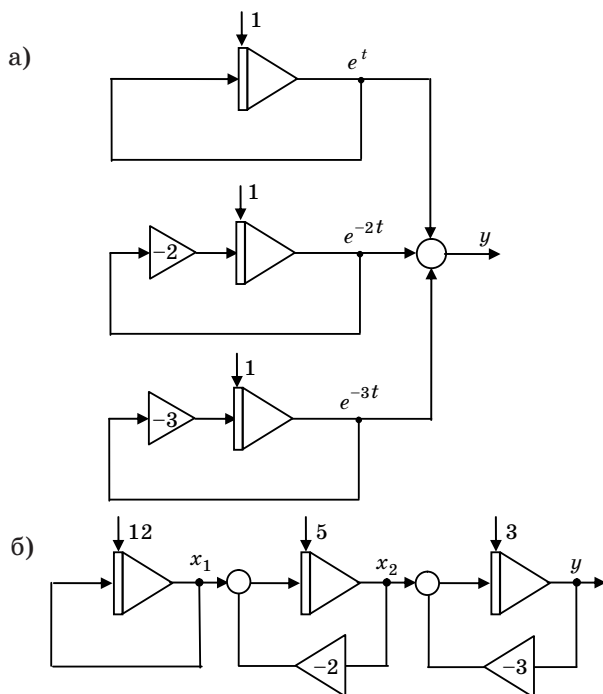


Рис. 3.21. Параллельная (а) и последовательная (б) схемы для уравнения (3.12)

Они отвечают случаю, когда исходное дифференциальное уравнение (3.12) имеет вид

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + y - 6y = 0$$

с начальными условиями $y_0 = 3$, $\dot{y}_0 = -4$, $\ddot{y}_0 = 14$.

Корни характеристического полинома в этом случае вещественны $p_1 = 1$, $p_2 = -2$, $p_3 = -3$, им соответствует решение

$$y(t) = e^t + e^{-2t} + e^{-3t}.$$

В параллельной схеме (рис. 3.21, а) каждое из слагаемых решения формируется отдельной схемой и результаты складываются.

В последовательной схеме (рис. 3.21, б) на выходах интеграторов будут сигналы

$$x_1 = 12e^t, \quad x_2 = 4e^t + e^{-2t}, \quad y = e^t + e^{-2t} + e^{-3t}.$$

Таким образом, обе схемы (рис. 3.21) при указанных начальных условиях эквивалентны в смысле равенства их выходных сигналов.

Кроме четырех приведенных вариантов схем моделирования дифференциального уравнения (3.12) можно предложить и другие, например параллельно-последовательные, цепные и т. д. Определенную проблему при этом составляет пересчет начальных условий при переходе от одной эквивалентной схемы к другой. На практике лучше выбирать наиболее простую схему, либо схему, отвечающую физическому смыслу задачи.

Пример 7. Построим эквивалентные схемы моделирования для системы, рассмотренной в примере 6. Она описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 24x_2 - 5u, \\ \dot{x}_2 &= -3x_1 - 18x_2 + 2u, \\ y &= 2x_1 + 5x_2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Схема моделирования, построенная непосредственно по этим уравнениям, приведена на рис. 3.19.

Чтобы получить другие варианты схем, перейдем к дифференциальному уравнению второго порядка относительно переменной y . Дважды продифференцируем последнее из уравнений (3.15), подставляя в него вместо \dot{x}_1, \dot{x}_2 правые части двух первых уравнений:

$$\begin{aligned} y &= 2x_1 + 5x_2, \\ \dot{y} &= -17x_1 - 42x_2, \\ \ddot{y} &= 143x_1 - 348x_2 + u. \end{aligned}$$

Домножив первое уравнение на 90, второе – на 19 и сложив с третьим:

$$\ddot{y} + 19\dot{y} + 90y = u, \tag{3.16}$$

получим дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее исходную систему. Схема его моделирования методом Кельвина показана на рис. 3.22, *а*.

На рис. 3.22, *б* приведен параллельный вариант схемы моделирования этого уравнения. Найдем дифференциальное урав-

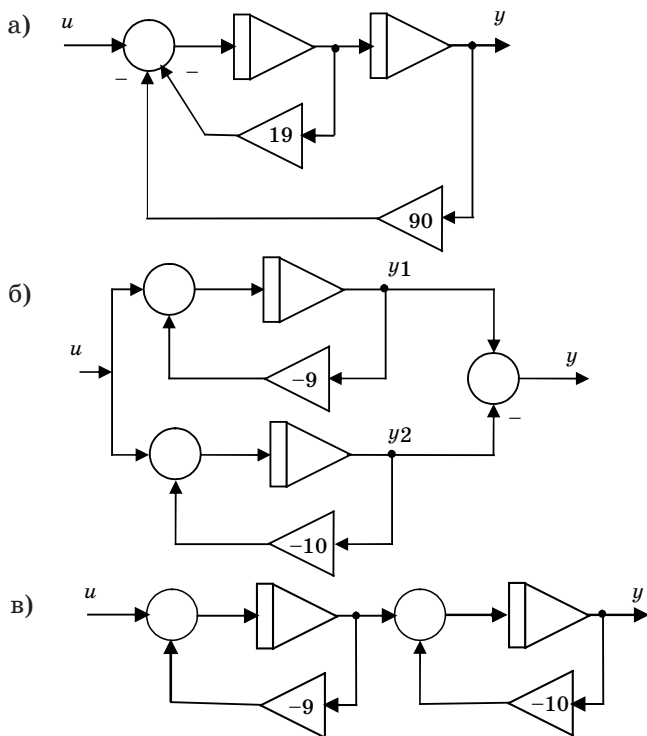


Рис. 3.22. Три варианта схемы для примера 7

нение для ее выходного сигнала. Он определяется равенством $y = y_1 - y_2$, где выражения для y_1 и y_2 имеют вид

$$\dot{y}_1 = u - 9y_1, \quad \dot{y}_2 = u - 10y_2.$$

Дважды продифференцировав равенство для y с учетом этих выражений, получим

$$\begin{aligned} y &= y_1 - y_2, \\ \dot{y} &= -9y_1 + 10y_2, \\ \ddot{y} &= -81y_1 - 100y_2 + u. \end{aligned}$$

Домножим первое уравнение на 90, второе – на 19 и сложим их с третьим. Результатом будет уравнение (3.16), что доказывает эквивалентность двух первых схем (см. рис. 3.22, а, б).

Аналогичный анализ последовательного варианта схемы, показанной на рис. 3.22, в, также приводит к уравнению (3.16).

Таким образом, все три приведенных варианта эквивалентны. Каждый из них требует всего два умножения на постоянные коэффициенты в отличие от исходной схемы (см. рис. 3.19), требующей семь умножений. Они более просты и удобны для моделирования, чем исходный.

Задачи и упражнения

1. Определить, при каких значениях a и при каких начальных условиях решение уравнения $\ddot{x} + a\dot{x} + x = 0$ имеет вид:

- а) $x = \sin t$, б) $x = \cos t$, в) $x = e^t$,
 г) $x = e^{-t}$, д) $x = e^{3t}$, е) $x = e^{t/3}$.

2. В чем заключается метод Кельвина (метод понижения производной)? Пользуясь этим методом, составить схемы моделирования для всех вариантов п. 1.

3. Привести схемы моделирования в SIMULINK следующих дифференциальных уравнений:

- а) $\ddot{x} + 9x = 0$, $x_0 = 1$, $\dot{x}_0 = 0$;
 б) $\ddot{x} + 0,5\dot{x} + \sin x = 0$, $x_0 = \dot{x}_0 = 1$.

4. Используя метод Кельвина, составить схемы моделирования следующих дифференциальных уравнений:

- а) $\ddot{x} - 10 = 0$, $x(0) = \dot{x}(0) = 15$;
 б) $\ddot{x} = \dot{x}$, $x(0) = \dot{x}(0) = -1$;
 в) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 7x = -8$, $x(0) = -10$, $\dot{x}(0) = -5$, $\ddot{x}(0) = 3$;
 г) $x^{(5)} = 0$, $x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = \dddot{x}(0) = 0$, $x^{(4)}(0) = -20$.

5. Схема моделирования представляет собой кольцо из трех интеграторов с единичными коэффициентами и одинаковыми начальными условиями. Найти моделируемое дифференциальное уравнение и его аналитическое решение.

6. Процесс нагревания теплоизолированного стержня описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

Требуется составить три варианта схемы моделирования.

7. На рис. 3.14 приведены эквивалентные схемы моделирования уравнения Ван-дер-Поля. Привести эквивалентные схемы моделирования уравнения Бернулли $\dot{y} + ay = by^n$ и уравнения Матье $\ddot{x} + (a - 2q \cos 2t)x = 0$.

8. Движение спутника вокруг Земли в плоскости орбиты характеризуется дифференциальными уравнениями:

$$\ddot{x} = -\frac{kx}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad \ddot{y} = -\frac{ky}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$$

где x, y – геоцентрические координаты спутника; k – гравитационная постоянная. Требуется составить схему моделирования.

9. Исследуйте движение математического маятника из примера 3 при начальных условиях $x_0 = 0, \dot{x}_0 = 2$. Покажите, что при этом $x = 4 \arctg e^t - \pi, x_0 = 0, x_\infty = \pi$, т. е. маятник асимптотически приходит в вертикальное положение и остается там. Нанесите соответствующие траектории на графики, приведенные на рис. 3.13.

10. Составить схемы моделирования дифференциальных уравнений Риккати и Дюффинга

$$\dot{x} = ax^2 + bx + c, \quad \ddot{x} + ax = bx^3.$$

11. Составить схемы моделирования дифференциальных уравнений Эрмита, Лагерра, Бесселя, Чебышева, Лежандра и Матье, приведенных в разд. 2 (см. с. 65).

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Передаточные функции широко используются как средство описания линейных систем. Наибольшее распространение они получили в теории автоматического управления, из других областей можно назвать теорию электрических цепей, механику, теорию колебаний. Описание с помощью передаточных функций поддерживается в большинстве пакетов компьютерного моделирования, в частности в пакете MATLAB для формирования математической модели в виде передаточных функций служат команды-конструкторы `tf` и `zpk`.

Передаточные функции тесно связаны с другими описаниями линейных систем, такими как дифференциальные уравнения, описание в пространстве состояний, весовая и переходная характеристики.

4.1. Передаточные функции и дифференциальные уравнения

Как и в случае дифференциальных уравнений, при структурном моделировании передаточных функций можно выделить прямую и обратную задачи. Первая из них – это задача перехода от передаточной функции к схеме моделирования, построенной на усилителях, сумматорах и интеграторах. Вторая (обратная) задача состоит в получении передаточной функции данной схемы моделирования. Она возникает при анализе устойчивости структурных схем, отыскании их нулей и полюсов, а также при проверке правильности построенной схемы моделирования.

Прежде чем перейти к решению этих задач, напомним основные определения.

Пусть $u(t)$ и $y(t)$ – входной и выходной сигналы линейной системы S (рис. 4.1), $U(p)$ и $Y(p)$ – их изображения по Лапласу.

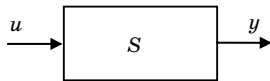


Рис. 4.1. Исследуемая система

Передаточной функцией $Q(p)$ такой системы называется отношение изображений по Лапласу выходного и входного сигналов (начальные условия системы считаем нулевыми)

$$Q(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}. \quad (4.1)$$

Напомним, что изображение по Лапласу определено для функций $f(t)$, равных нулю при $t < 0$. Оно задается формулой

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (4.2)$$

Для часто встречающихся функций времени существуют специальные таблицы, где для различных функций-оригиналов $f(t)$ приведены их изображения.

Пример 1. Найдем изображения по Лапласу трех типовых функций – дельта-функции $\delta(t)$ (бесконечно короткий импульс единичной площади, расположенный в начале координат), единичной функции $1(t)$ (равной единице при $t \geq 0$) и экспоненты e^{at} .

Подставив каждую из них в формулу (4.2) и вычислив интеграл, получим:

$$\delta(t) \rightarrow 1, \quad 1(t) \rightarrow \frac{1}{p}, \quad e^{at} \rightarrow \frac{1}{p-a}.$$

Заметим, что в определении передаточной функции не оговаривается вид входного сигнала. Дело в том, что для линейных блоков отношение $Y(p)/U(p)$ не зависит от вида $u(t)$ (для отношения $y(t)/u(t)$ это, разумеется, неверно). Поэтому при нахождении передаточной функции можно использовать любой входной сигнал, не равный тождественно нулю.

Пример 2. Найдем передаточную функцию интегратора.

Полагая $u(t) = 1(t)$, получим $y(t) = t, t \geq 0$. Изображения входного и выходного сигналов, соответственно, равны $1/p$ и $1/p^2$, следовательно, передаточная функция интегратора имеет вид $Q(p) = 1/p$.

Определение передаточной функции с помощью формулы (4.1) остается справедливым для линейных стационарных блоков произвольного порядка, а также для схем, составленных из таких блоков.

Удобство использования передаточной функции состоит в том, что она позволяет определять реакцию $y(t)$ линейной системы на любой конкретный входной сигнал $u(t)$. Для этого находят изображение $U(p)$ входного сигнала (по таблице преобразований Лапласа) и умножают его на передаточную функцию $Q(p)$, получая тем самым изображение выходного сигнала $Y(p)$:

$$Y(p) = Q(p)U(p). \quad (4.3)$$

Затем, используя таблицу, выполняют обратный переход от найденного изображения к оригиналу $y(t)$.

Пример 3. Найдем реакцию апериодического звена с передаточной функцией $Q(p) = 1/(0,1p + 1)$ на управляющее воздействие $u(t) = 1(t)$.

Поскольку $U(p) = \frac{1}{p}$, то $Y(p) = \frac{1}{p(0,1p + 1)}$. Представляем $Y(p)$ в виде суммы простейших дробей

$$Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + 10}.$$

Обращаясь к таблице преобразований Лапласа, находим оригинал $y(t) = 1 - e^{-10t}$. Графики сигналов $u(t)$ и $y(t)$ приведены на рис. 4.2.

Пример 4. Найдем реакцию звена с передаточной функцией $Q(p) = \frac{2p}{p + 1}$ на входной сигнал $u = \cos t$.

Изображение входного сигнала имеет вид $U(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$, поэтому $Y(p) = \frac{2p^2}{(p + 1)(p^2 + 1)}$.

Решение. Выполняем разложение на простейшие дроби

$$\frac{2p^2}{(p + 1)(p^2 + 1)} = \frac{A}{p + 1} + \frac{Bp}{p^2 + 1} + \frac{C}{p^2 + 1}.$$

Постоянные A , B , C находим, приводя выражение в правой части к общему знаменателю и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p в числителях правой и левой частей:

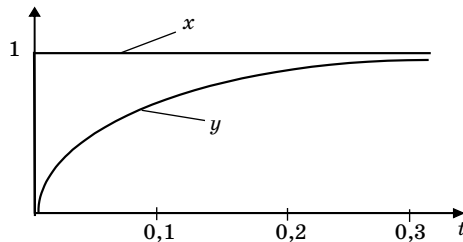


Рис. 4.2. Переходная функция апериодического звена

$A = B = 1; C = -1$. Возвращаясь к оригиналам, получаем $y(t) = e^{-t} + \cos t - \sin t$.

Ввиду того, что реакция звена на импульсное или ступенчатое воздействия исчерпывающим образом характеризует линейное звено, в теории управления для них используются специальные термины – *импульсная весовая характеристика* (весовая функция) и *импульсная переходная характеристика* (переходная функция), причем первая из них равна производной по времени от второй.

Отсюда вытекает, что при компьютерном моделировании весовую характеристику блока с передаточной функцией $Q(p)$, т. е. реакцию на $u(t) = \delta(t)$, можно получить, подавая единичный скачок на блок с передаточной функцией $pQ(p)$.

Если моделируемая система задана дифференциальным уравнением

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_mu^{(m)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u, \quad (4.4)$$

то передаточную функцию можно получить, вводя обозначение $p = d/dt$ и заменяя переменные y и u их изображениями Y и U :

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0)Y = (b_mp^m + \dots + b_0)U.$$

Тогда передаточная функция $Q(p) = Y(p)/U(p)$ представляется как отношение двух операторных полиномов:

$$Q(p) = \frac{b_mp^m + \dots + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{B(p)}{A(p)}. \quad (4.5)$$

Такая передаточная функция называется *дробно-рациональной*, при этом обычно $m \leq n$.

Пример 5. Требуется найти передаточную функцию системы, заданной дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \ddot{u} + 3\dot{u} + 4u,$$

а также ее реакцию на входной сигнал $u(t) = e^{-3t}$.

Решение. Переходя к изображениям по Лапласу, получаем

$$Q(p) = \frac{p^2 + 3p + 4}{p^2 + 3p + 2}, \quad U(p) = \frac{1}{p + 3}.$$

Следовательно, изображение функции $y(t)$ имеет вид

$$Y(p) = \frac{p^2 + 3p + 4}{(p^2 + 3p + 2)(p + 3)} = \frac{p^2 + 3p + 4}{(p + 1)(p + 2)(p + 3)}.$$

Для нахождения оригинала $y(t)$ представляем последнее выражение в виде суммы элементарных слагаемых

$$Y(p) = \frac{c_1}{p + 1} + \frac{c_2}{p + 2} + \frac{c_3}{p + 3}.$$

Постоянные коэффициенты c_1, c_2, c_3 находим методом неопределенных коэффициентов. В данном случае $c_1 = 1, c_2 = -2, c_3 = 2$. Поэтому изображению $Y(p)$ соответствует оригинал

$$y(t) = e^{-t} - 2e^{-2t} + 2e^{-3t}.$$

Для линейных систем с несколькими входами u_1, \dots, u_r и выходами y_1, \dots, y_s векторные изображения входных и выходных сигналов также связаны соотношением (4.3) с той разницей, что $\mathbf{Y}(p) = [Y_1(p), \dots, Y_s(p)]^T$, $\mathbf{U}(p) = [U_1(p), \dots, U_r(p)]^T$, $\mathbf{Q}(p) = [Q_{ij}(p)]$ – матричная передаточная функция размеров $s \times r$, элементами которой являются дробно-рациональные передаточные функции вида (4.5).

Если исходное описание системы задано уравнениями в пространстве состояний

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}, \quad (4.6)$$

то от него также можно перейти к передаточной функции. Применяя к этим уравнениям преобразование Лапласа, получим

$$p\mathbf{X}(p) = \mathbf{A}\mathbf{X}(p) + \mathbf{B}\mathbf{U}(p), \quad \mathbf{Y}(p) = \mathbf{C}\mathbf{X}(p).$$

Выражая из первого уравнения вектор $\mathbf{X}(p)$ и подставляя его во второе, находим вход-выходное соотношение

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(p).$$

Следовательно,

$$\mathbf{Q}(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}. \quad (4.7)$$

Эта формула связывает описания (4.3) и (4.6) и позволяет по известным матрицам $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ определить матричную передаточную функцию $\mathbf{Q}(p)$.

Отметим, что аналитическое определение изображения $Y(p)$ и оригинала $y(t)$ сопряжено со сложностями того же порядка, что и аналитическое решение дифференциальных уравнений. Поэтому метод моделирования является основным методом получения решения уравнения (4.3) для передаточных функций высокого порядка и единственным при априорно неизвестных функциях $u(t)$. Рассмотрим методы структурного моделирования линейных систем, заданных передаточными функциями.

4.2. Структурное моделирование передаточных функций

К наиболее известным методам структурного моделирования дробно-рациональных передаточных функций относятся метод непосредственного интегрирования и метод комбинирования производных.

Метод непосредственного интегрирования. Метод основан на принципе суперпозиции, согласно которому решение уравнения (4.4) может быть представлено в виде суммы решений уравнений

$$y_i^{(n)} + a_{n-1}y_i^{(n-1)} + \dots + a_0y_i = b_i u^{(i)}, \quad i = \overline{0, m}. \quad (4.8)$$

Для моделирования этих дифференциальных уравнений воспользуемся не методом Кельвина, а дуальным методом, описанным в подразд. 3.5. В соответствии с ним каждое из уравнений (4.8) может быть промоделировано схемой, сигнальный граф которой показан на рис. 4.3. Отличие заключается лишь в порядке производной сигнала $u^{(i)}(t)$ на входе.

Дифференцирование входного сигнала – крайне нежелательная операция. Поэтому, вместо того чтобы подавать i -ю производную сигнала $u(t)$ на вход первого интегратора, удобнее подать сам сигнал $u(t)$ на вход $(i + 1)$ -го интегратора.

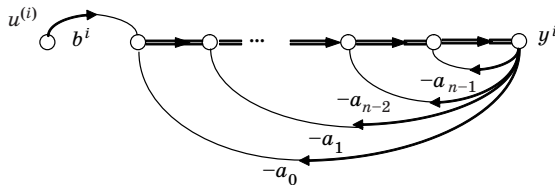


Рис. 4.3. Моделирование уравнения (4.8)

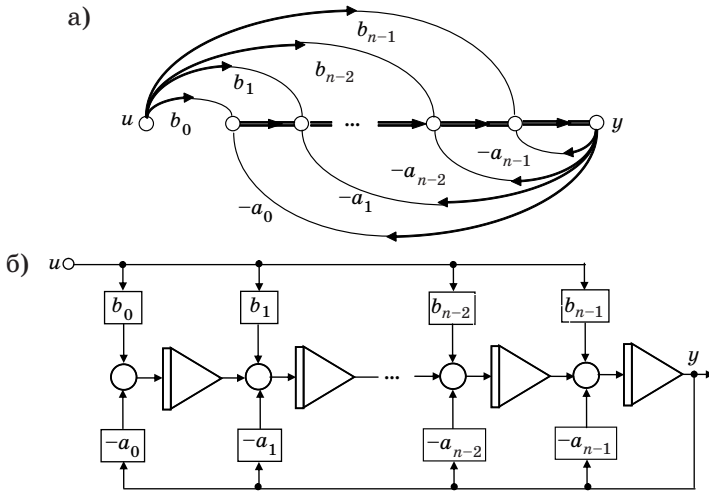


Рис. 4.4. Сигнальный граф (а) и схема (б) моделирования методом непосредственного интегрирования

Согласно принципу суперпозиции для моделирования исходного уравнения (4.4) необходимо подать входное воздействие $u(t)$ с коэффициентами b_0, b_1, \dots, b_m на все интеграторы одновременно, как это показано на рис. 4.4, а.

Соответствующая схема моделирования (рис. 4.4, б) содержит n интеграторов, $2n$ усилителей и n сумматоров, каждый из которых имеет не более трех входов. Если $m < n - 1$, то число усилителей в верхней части схемы уменьшается.

Метод комбинирования производных. Этот метод является двойственным по отношению к предыдущему. Его удобно изложить, используя операторное представление (4.5). Введем вспомогательную переменную z , умножив на нее числитель и знаменатель передаточной функции:

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{B(p)z}{A(p)z},$$

после чего можно записать $U = A(p)z, Y = B(p)z$.

Раскрывая эти выражения, получим два уравнения – дифференциальное и алгебраическое:

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{z} + a_0z = u, \quad (4.9)$$

$$y = b_m z^{(m)} + \dots + b_1\dot{z} + b_0z. \quad (4.10)$$

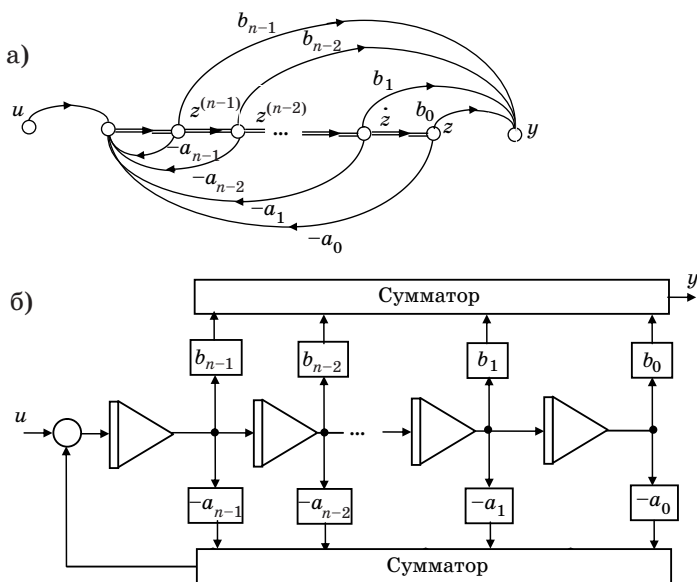


Рис. 4.5. Симметричный граф (а) и схема (б) моделирования методом комбинирования производных

Моделируя первое из них методом Кельвина, найдем вспомогательную переменную z , а также $n - 1$ ее первых производных, как это показано в нижней части рис. 4.5, а. Искомую переменную y получим, суммируя сигналы $z, \dot{z}, \dots, z^{(n-1)}$, умноженные на коэффициенты b_0, b_1, \dots, b_{n-1} , согласно алгебраическому уравнению (4.10). Соответствующий сигнальный граф при $m = n-1$ приведен на рис. 4.5, а.

Ему отвечает схема моделирования (рис. 4.5, б), основу которой, как и ранее, составляет цепочка из n интеграторов. По сравнению с предыдущим случаем количество сумматоров уменьшилось до двух, но одновременно возросло число их входов, так что общее количество суммирований осталось прежним.

Отметим, что схемы моделирования, приведенные на рис. 4.4 и 4.5, дуальны друг к другу, а их сигнальные графы зеркально симметричны.

Кроме двух рассмотренных вариантов схем, уравнению (4.4) можно поставить в соответствие много других схем моделиро-

вания, основанных на различных формах записи передаточной функции (4.5) – (в виде суммы или произведения элементарных дробей, в виде цепной дроби и др. (некоторые из них будут описаны в подразд. 4.6).

4.3. Моделирование цепочки аperiodических звеньев

Исследуемая система представляет собой последовательное соединение n аperiodических звеньев первого порядка. Ее структура показана на рис. 4.6.

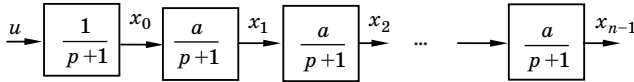


Рис. 4.6. Цепочка аperiodических звеньев

Модели такого вида используются при исследовании распределенных линий задержки, при изучении распространения возбуждения вдоль нервных волокон, при моделировании транспортных потоков и решении других задач.

Если на вход первого звена цепочки подать импульсное воздействие в виде дельта-функции $u = \delta(t)$, то на выходах звеньев получим сигналы, которые можно интерпретировать как задержанный и растянутый во времени входной импульс.

Передаточная функция системы, показанной на рис. 4.6, равна произведению передаточных функций элементарных звеньев

$Q(p) = \frac{a^{n-1}}{(p+1)^n}$. От нее можно перейти к описанию в пространстве состояний $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}u$, где матрица \mathbf{A} имеет двухдиагональный вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Возможен другой вариант описания в пространстве состояний, когда матрица \mathbf{A} имеет так называемую форму Фробениуса:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Ее последняя строка образована коэффициентами характеристического полинома системы

$$A(p) = (p+1)^n = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0,$$

причем $a_i = c_n^i$ — биномиальные коэффициенты.

Описание с матрицей \mathbf{A} вида (4.11) получаем, если принять в качестве переменных состояния выходные сигналы аperiodических звеньев, представленных на рис. 4.6, т. е. взять $\mathbf{X} = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]^T$.

Описание с матрицей \mathbf{A} вида (4.12) получаем, рассматривая передаточную функцию системы

$$Q(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{a^{n-1}}{(p+1)^n} = \frac{a^{n-1}}{p^n + np^{n-1} + \dots + np + 1}.$$

Переход к дифференциальному уравнению относительно $y = x_{n-1}$ дает

$$y^{(n)} + ny^{(n-1)} + \dots + ny' + y = a^{n-1}u(t).$$

После этого в качестве переменных состояния принимается сигнал y и его производные $\mathbf{X} = [y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}]^T$, что сразу приводит к матрице \mathbf{A} вида (4.12) и вектору $\mathbf{b} = [0 \dots 0 1]^T$.

Структурная схема, передаточная функция и матричные уравнения представляют собой три способа описания исследуемой системы. В их эквивалентности можно убедиться, вычисляя на основе каждого из них передаточную функцию системы $Q(p)$ от входа u до выхода x_{n-1} .

Расчет выходных сигналов звеньев

Найдем реакцию каждого из звеньев цепочки (рис. 4.6) на входной сигнал в виде дельта-функции $u = \delta(t)$.

При выводе формул для выходных сигналов звеньев используем два пути:

1) поочередное решение дифференциальных уравнений первого порядка для каждого из звеньев, начиная с первого;

2) применение преобразования Лапласа.

В первом случае выписываем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_0 + x_0 = 0, \quad \dot{x}_1 + x_1 = ax_0, \quad \dot{x}_2 + x_2 = ax_1, \dots$$

с начальными условиями $x_0(0) = 1, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \dots$

Решения этих уравнений имеют вид:

$$x_0 = e^{-t}, \quad x_1 = ate^{-t}, \quad x_2 = \frac{(at)^2}{2!}e^{-t}, \quad x_3 = \frac{(at)^3}{3!}e^{-t}, \dots \quad (4.13)$$

Во втором случае сначала записываем передаточные функции от входа системы (см. рис. 4.6) до выхода каждого звена:

$$Q_0(p) = \frac{1}{p+1}, \quad Q_1(p) = \frac{a}{(p+1)^2}, \quad Q_2(p) = \frac{a^2}{(p+1)^3}, \dots$$

При входном сигнале $u = \delta(t)$ выписанные передаточные функции совпадают с изображениями выходных сигналов соответствующих блоков. Находя их оригиналы с помощью таблицы преобразований Лапласа, получаем формулы (4.13).

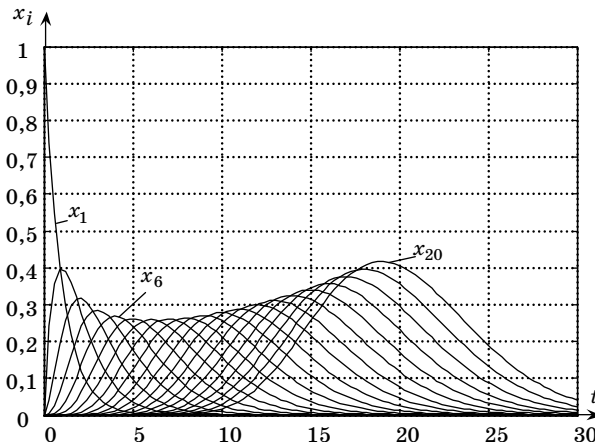


Рис. 4.7. Выходные сигналы аperiodических звеньев

Графики выходных сигналов звеньев образуют семейство кривых. На рис. 4.7 приведен их вид для случая двадцати звеньев при $a = 13/12$.

Огибающая этого семейства имеет явно выраженный минимум, который достигается на выходе шестого звена. Формула $a \cong 1 + 1/2k$ позволяет рассчитывать значение коэффициента усиления a для получения сигнала минимальной амплитуды на выходе звена с заданным номером k . Например, задавая $k = 10$, получаем $a \cong 1,05$, а задавая $k = 20$, получаем $a \cong 1,025$.

Графики (см. рис. 4.7) получены в пакете MATLAB с помощью команды **impulse** для матрицы **A** вида (4.11) и единичной матрицы **C**. Структурное моделирование системы в SIMULINK осуществляется непосредственно по схеме, приведенной на рис. 4.6, с использованием блоков **Transfer Function**.

Расчет реакций системы на входной сигнал в виде единичного скачка также может быть осуществлен с помощью описанных способов.

4.4. Моделирование блок-схем

Наиболее просто строится схема моделирования, если исходный объект задан структурными блоками и связями между ними. Дадим описание соответствующей процедуры.

Построение схемы моделирования. В предыдущем подразделе исходным материалом для моделирования служила блок-схема системы с указанием передаточных функций ее звеньев. В таких случаях удобно использовать поблочное моделирование. Его суть заключается в том, что сначала строятся модели каждого из звеньев, а затем составляется общая схема моделирования системы.

Поясним рассматриваемый метод на примере системы автоматического управления, изображенной на рис. 4.8. Она содер-

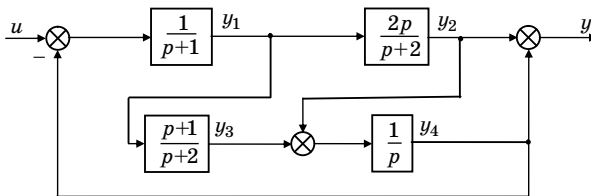


Рис. 4.8. Блок-схема системы управления

жит четыре блока первого порядка и три сумматора. Уравнения блоков имеют следующий вид:

$$y_1 = \frac{1}{p+1}(u - y_4), \quad y_2 = \frac{2p}{p+2}y_1,$$

$$y_3 = \frac{p+1}{p+2}y_1, \quad y_4 = \frac{1}{p}(y_2 + y_3), \quad y = y_2 + y_4.$$

Схема моделирования этой системы в SIMULINK практически повторяет приведенную структуру, она будет содержать четыре блока для моделирования передаточных функций и три сумматора.

По передаточным функциям отдельных блоков можно найти общую передаточную функцию системы $Q(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$, связывающую изображения по Лапласу входного и выходного сигналов. Для этого надо исключить из выписанных пяти уравнений четыре внутренние переменные y_1, y_2, y_3, y_4 . Выполняя соответствующие алгебраические выкладки и выражая выходной сигнал $Y(p)$ через входной $U(p)$, получаем

$$Y(p) = \frac{(p+1)(2p+1)}{p^3 + 3p^2 + 5p + 1}U(p).$$

Следовательно, передаточная функция системы имеет вид

$$Q(p) = \frac{2p^2 + 3p + 1}{p^3 + 3p^2 + 5p + 1}.$$

От передаточной функции легко осуществить переход к описанию системы с помощью дифференциального уравнения. В рассматриваемом случае для этого достаточно в уравнении

$$(p^3 + 3p^2 + 5p + 1)Y(p) = (2p^2 + 3p + 1)U(p)$$

раскрыть скобки и заменить оператор p оператором дифференцирования d/dt

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 5y + y = 2\ddot{u} + 3\dot{u} + u.$$

Переход от структурной схемы к матричному описанию. Остановимся на процедуре перехода от структурной схемы к описанию в пространстве состояний. Наиболее просто это дела-

ется для схем, реализованных на интеграторах и апериодических звеньях. Тогда в качестве переменных состояния принимают выходные сигналы этих звеньев и выписывают дифференциальные уравнения первого порядка для каждого из них. Матричная запись этих уравнений в виде $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}U$, $\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}U$ и будет представлять собой искомое описание в пространстве состояний.

Если же в структурной схеме присутствуют более сложные блоки, то надо сначала для каждого из них нарисовать схемы моделирования на интеграторах или апериодических звеньях (используя, например, метод комбинирования производных или метод непосредственного интегрирования), а потом уже применить описанную процедуру.

Поясним это на примере рассматриваемой системы (см. рис. 4.8). Она содержит два блока, требующих предварительного преобразования. Выделим целую часть их передаточных функций:

$$\frac{2p}{p+2} = 2 - \frac{4}{p+2}, \quad \frac{p+1}{p+2} = 1 - \frac{1}{p+2}.$$

Такой записи отвечают схемы на апериодических звеньях, показанные на рис. 4.9, а, б. В результате мы получаем реализацию исходной системы на трех апериодических звеньях и одном интегрирующем звене. Обозначим выходные сигналы этих звеньев через x_1 , x_2 , x_3 , x_4 и составим для каждого из них дифференциальное уравнение первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_4 + u, \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 2x_3, \\ \dot{x}_4 &= 3x_1 + x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Кроме того, запишем алгебраическое уравнение для выходного сигнала $y = 2x_1 + x_2 + x_4$.

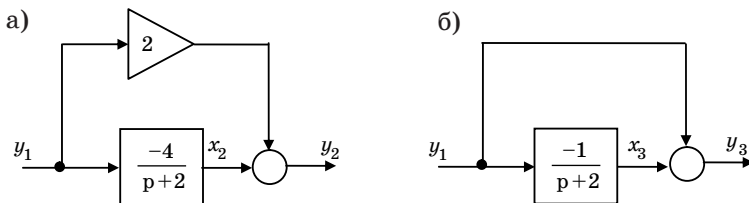


Рис. 4.9. Реализация блоков на апериодических звеньях

Матричная запись этих уравнений имеет вид

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}\mathbf{X},$$

где

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [2 \quad 1 \quad 0 \quad 1].$$

Ее удобно использовать для моделирования системы в MATLAB, а также для анализа устойчивости и минимальности полученной модели.

Отметим, в частности, что размерность матричного описания равна четырем, в то время как передаточная функция $Q(p)$ имеет третий порядок. Это говорит о неминимальности полученной реализации и о неуправляемости или ненаблюдаемости исходной системы автоматического управления.

От матриц \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} можно перейти к передаточной функции, используя формулу $Q(p) = \mathbf{c}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$. В нашем случае ее применение приводит к передаточной функции четвертого порядка

$$Q(p) = \frac{2p^3 + 7p^2 + 7p + 2}{p^4 + 5p^3 + 11p^2 + 11p + 2}.$$

Выделяя в числителе и знаменателе общий множитель $p + 2$ и сокращая на него, получим передаточную функцию третьего порядка

$$Q(p) = \frac{(p+1)(p+2)(2p+1)}{(p+2)(p^3+3p^2+5p+1)} = \frac{2p^2+3p+1}{p^3+3p^2+5p+1},$$

которая совпадает с передаточной функцией, найденной ранее по структурной схеме.

4.5. Передаточные функции и формула Мэсона

Мы рассмотрели два способа отыскания передаточной функции системы, заданной структурной схемой – непосредственно по уравнениям блоков либо выполняя предварительный переход

к описанию в пространстве состояний. Определенный недостаток первого способа связан с трудоемкостью процедуры исключения внутренних переменных. Недостатком второго способа является необходимость обращать операторную матрицу $pE - A$.

Более экономный путь отыскания передаточной функции схемы опирается на использование формулы Мэсона. Для ее применения нужно построить сигнальный граф структурной схемы. Ветви (дуги) сигнального графа соответствуют блокам структурной схемы, а вершины (узлы) – входным и выходным сигналам блоков. Это иллюстрируется рис. 4.10, на котором приведены сигнальные графы для усилителя с коэффициентом усиления k , интегратора и аperiodического звена с передаточной функцией $\frac{1}{p+a}$.

Будем изображать интеграторы в графах двойными линиями без указания коэффициента передачи, а для обозначения сигналов используем в графах и формулах малые буквы без указания аргумента. Если в некоторую вершину графа входит несколько ветвей, то она обозначает сумму соответствующих сигналов.

Сигнальные графы дают возможность находить передаточную функцию системы, минуя этап выписывания уравнений отдельных блоков и исключения промежуточных переменных. Это делается с помощью правила Мэсона, которое состоит в следующем.

Пусть дан сигнальный граф линейной системы и требуется найти передаточную функцию $Q(p)$ от его входной вершины до выходной. Обозначим через P_1, \dots, P_k коэффициенты передачи всех прямых путей, ведущих от входа к выходу. При этом предполагается, что каждый прямой путь содержит ветви одного направления (путь «по стрелкам») и не проходит дважды через одну вершину. Обозначим через L_1, \dots, L_m коэффициенты пере-

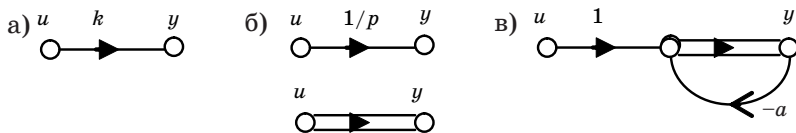


Рис. 4.10. Сигнальные графы усилителя (а), интегратора (б) и аperiodического звена (в)

дачи всех замкнутых контуров, имеющихя в графе. Здесь также предполагается, что обход каждого контура производится в одном направлении и не проходит дважды через одну и ту же вершину.

Определителем графа называется величина

$$\Delta = 1 - \sum_{i=1}^m L_i + \sum_{i,j=1}^m {}^* L_i L_j - \sum {}^* L_i L_j L_k + \dots, \quad (4.14)$$

где звездочка означает, что суммирование проводится только для произведений непересекающихся контуров, т. е. контуров, не имеющих ни одной общей вершины.

Минором i -го прямого пути Δ_i называется определитель графа, получаемого удалением ветвей, принадлежащих пути P_i исходного графа. Если после удаления некоторого прямого пути в графе не останется ни одного замкнутого контура, то минор этого пути будет равен единице.

Согласно правилу Мэсона искомая передаточная функция вычисляется по формуле

$$Q(p) = \frac{1}{\Delta} (P_1 \Delta_1 + \dots + P_k \Delta_k), \quad (4.15)$$

где Δ – определитель графа; P_i – i -й прямой путь от входной вершины графа до выходной; Δ_i – минор i -го прямого пути.

Пример 6. На рис. 4.11, а приведена структурная схема силового привода, содержащего электромашинный усилитель с передаточной функцией $Q_1(p)$, исполнительное звено с передаточной функцией $Q_2(p)$ и цепь обратной связи с передаточной функцией $Q_3(p)$.

Схема описывается уравнениями

$$Y_1(p) = Q_1(p) \varepsilon(p), \quad Y(p) = Q_2(p) Y_1(p),$$

$$Y_3(p) = Q_3(p) Y(p), \quad \varepsilon(p) = U(p) - Y_3(p),$$

где $Q_1(p) = \frac{k}{T_1 p + 1}$; $Q_2(p) = \frac{1}{T_2 p}$; $Q_3(p) = \frac{1}{T_3 p + 1}$.

Требуется найти передаточную функцию привода.

Решение. Сначала переходим к сигнальному графу (рис. 4.11, б).

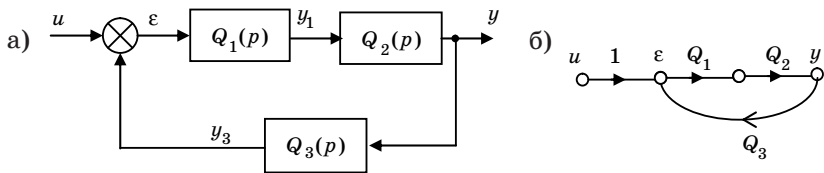


Рис. 4.11. Структурная схема (а) и сигнальный граф (б) привода

В данном случае имеем один прямой путь $P_1 = Q_1 Q_2$ и один замкнутый контур $L_1 = -Q_1 Q_2 Q_3$. Вычисляем определитель графа и минор пути P_1 :

$$\Delta = 1 - L_1 = 1 + Q_1 Q_2 Q_3; \Delta_1 = 1.$$

Подставляя эти значения в формулу Мэсона (4.15), находим выражение для передаточной функции

$$Q(p) = \frac{1}{\Delta} P_1 = \frac{Q_1(p) Q_2(p)}{Q_1(p) Q_2(p) Q_3(p) + 1}.$$

Для получения окончательного ответа нужно в этом выражении раскрыть значения $Q_i(p)$ и выполнить необходимые преобразования. В результате получаем

$$Q(p) = \frac{k T_3 p + k}{T_1 T_2 T_3 p^3 + (T_1 T_2 + T_2 T_3) p^2 + T_2 p + k}.$$

Заметим, что к этой формуле можно прийти сразу, если использовать более подробный граф, приведенный на рис. 4.12.

В соответствии с ним имеем один прямой путь и три контура

$$P_1 = \frac{k}{T_1 T_2 p^2}, \quad L_1 = -\frac{1}{T_1 p}, \quad L_2 = -\frac{1}{T_3 p}, \quad L_3 = -\frac{k}{T_1 T_2 T_3 p^3},$$

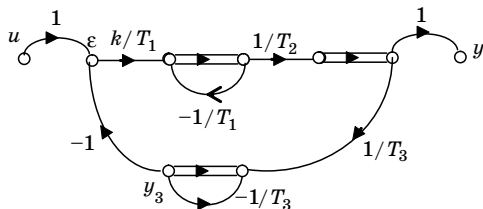


Рис. 4.12. Развернутый сигнальный граф привода

вычисляем определитель графа и минор пути P_1 :

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1L_2, \Delta_1 = 1 - L_2.$$

Подстановка этих выражений в формулу Мэзона дает иско- мую передаточную функцию

$$Q(p) = \frac{1}{\Delta} P_1 \Delta_1 = \frac{P_1(1 - L_2)}{1 - L_1 - L_2 - L_3 + L_1L_2} = \frac{kT_3p + k}{T_1T_2T_3p^3 + (T_1T_2 + T_2T_3)p^2 + T_2p + k}.$$

Пример 7. Определить передаточную функцию системы, за- данной сигнальным графом (рис. 4.13).

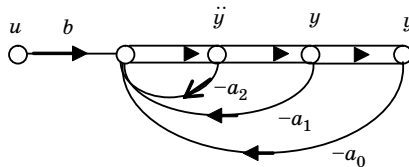


Рис. 4.13. Сигнальный граф системы третьего порядка

Решение. Воспользуемся формулой Мэзона (4.15). В данном случае имеется один прямой путь $P_1 = b/p^3$ и три контура

$$L_1 = -\frac{a_0}{p^3}, \quad L_2 = -\frac{a_1}{p^2}, \quad L_3 = -\frac{a_2}{p}.$$

Определитель графа имеет вид

$$\Delta = 1 + \frac{a_0}{p^3} + \frac{a_1}{p^2} + \frac{a_2}{p} = \frac{1}{p^3}(p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0).$$

Отсюда для передаточной функции получаем

$$Q(p) = \frac{P_1}{\Delta} = \frac{b}{p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0}.$$

Пример 8. Моделируемая система управления задана своей блок-схемой (рис. 4.14). Схема содержит четыре блока с одина- ковыми передаточными функциями $W(p) = \frac{1}{p+1}$. Требуется по- лучить описание системы в пространстве состояний и двумя спо- собами найти общую передаточную функцию $Q(p)$.

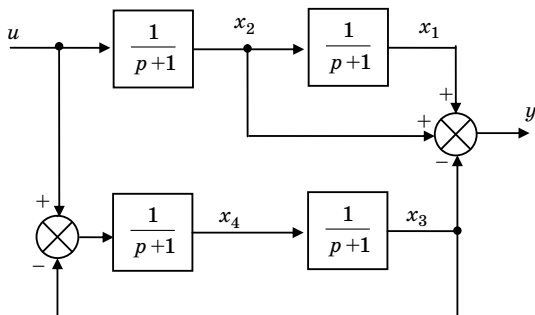


Рис. 4.14. Блок-схема для примера 8

Решение. Выписываем дифференциальные уравнения для отдельных блоков схемы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + u, \\ \dot{x}_3 &= -x_3 + x_4, \quad \dot{x}_4 = -x_3 - x_4 + u, \quad y = x_1 + x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Следовательно, матрицы описания в пространстве состояний имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{c} = [1 \quad 1 \quad -1 \quad 0].$$

Поскольку матрица \mathbf{A} имеет клеточно-диагональную структуру, ее характеристический полином $Q(p)$ равен произведению характеристических полиномов диагональных клеток:

$$a(p) = \begin{vmatrix} p+1 & -1 \\ 0 & p+1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p+1 & -1 \\ 1 & p+1 \end{vmatrix} = (p+1)^2 (p^2 + 2p + 2).$$

Для получения передаточной функции воспользуемся формулой $Q(p) = \mathbf{c}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$.

Найдем сначала матрицу $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$:

$$\begin{aligned}
 (p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} p+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & p+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p+1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & p+1 \end{bmatrix}^{-1} = \\
 &= \begin{bmatrix} p+1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p+1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & p+1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{a(p)}.
 \end{aligned}$$

Домножая справа и слева на матрицы \mathbf{b} и \mathbf{c} , получаем передаточную функцию модели

$$\begin{aligned}
 Q(p) &= \mathbf{c}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = [1 \ 1 \ -1 \ 0] \times \\
 &\times \left[\frac{1}{(p+1)^2}, \frac{1}{p+1}, \frac{1}{p^2+2p+2}, \frac{p+1}{p^2+2p+2} \right]^T = \\
 &= \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p^2+2p+2} = \frac{p^3+3p^2+4p+3}{p^4+4p^3+7p^2+6p+2}.
 \end{aligned}$$

Найдем ту же передаточную функцию с помощью формулы Мэсона. Анализ схемы показывает, что в ней имеется один замкнутый контур с передаточной функцией $L = -W^2$ и три прямых пути от входа до выхода $P_1 = W^2$, $P_2 = W$, $P_3 = -W^2$. Миноры этих путей соответственно равны $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$, $\Delta_3 = 1$.

Определитель схемы Δ находится по формуле $1-L = 1+W^2$. Подставляя все эти значения в формулу Мэсона $Q(p) = \sum_i P_i \Delta_i / \Delta$, получаем

$$\begin{aligned}
 Q(p) &= \frac{1}{\Delta} (W^2 \Delta + W \Delta - W^2) = W^2 + W - W^2 / \Delta = \\
 &= \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p^2+2p+2}.
 \end{aligned}$$

Применяя к последнему выражению обратное преобразование Лапласа, находим весовую функцию системы

$$q(t) = e^{-t} + te^{-t} - e^{-t} \sin t = e^{-t} (1 + t - \sin t).$$

Пример 9. Система задана описанием в пространстве состояний

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}\mathbf{X}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [0 \quad 1 \quad 1].$$

Требуется составить схему моделирования и найти ее передаточную функцию.

Решение. Матричному описанию соответствует сигнальный граф, показанный на рис. 4.15.

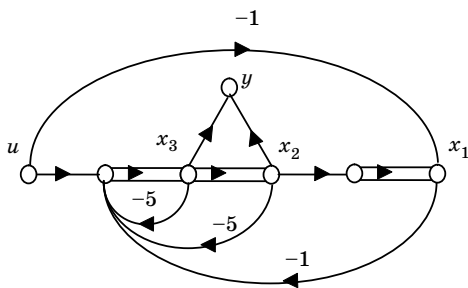


Рис. 4.15. Сигнальный граф для примера 9

Найдем передаточную функцию, используя формулу Мэсона. Выпишем контуры, прямые пути и определитель графа:

$$L_1 = -\frac{5}{p}, \quad L_2 = -\frac{5}{p^2}, \quad L_3 = -\frac{1}{p^3};$$

$$P_1 = \frac{1}{p}, \quad P_2 = P_3 = \frac{1}{p^2}, \quad P_4 = \frac{1}{p^3};$$

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 - L_3 = \frac{p^3 + 5p^2 + 5p + 1}{p^3}.$$

Миноры всех путей равны единице: $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 1$. Отсюда получаем передаточную функцию

$$Q(p) = \frac{1}{\Delta} (P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3 + P_4\Delta_4) = \frac{p^2 + 2p + 1}{p^3 + 5p^2 + 5p + 1}.$$

Передаточная функция имеет совпадающие нуль и полюс -1 , поэтому ее порядок может быть понижен путем сокращения на общий множитель $p + 1$:

$$Q(p) = \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p^2 + 4p + 1)} = \frac{p+1}{p^2 + 4p + 1}.$$

Пример 10. На рис. 4.16 приведена блок-схема автоматизированного электропривода постоянного тока.

Требуется найти передаточную функцию $W(p)$ при следующих значениях параметров:

$$k_0 = 2, \quad k_1 = 4, \quad k_2 = 8,8, \quad k_3 = 3,2, \quad k_4 = 0,02, \quad k_5 = k_6 = 0,016; \\ T_1 = 0,5, \quad T_2 = 0,44, \quad T_3 = 0,2.$$

Решение. Чтобы воспользоваться формулой Мэсона перейдем от структурной схемы к сигнальному графу (рис. 4.17), обозначив

$$W_i = \frac{k_i}{T_i p + 1}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.16)$$

Выпишем выражения для замкнутых контуров сигнального графа и его определителя:

$$L_1 = -k_4 W_1 W_2, \quad L_2 = -k_0 k_5 k_6 W_1 W_2 W_3,$$

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 = 1 + W_1 W_2 (k_4 + k_0 k_5 k_6 W_3),$$

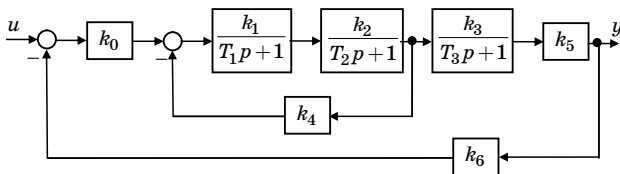


Рис. 4.16. Структура электропривода

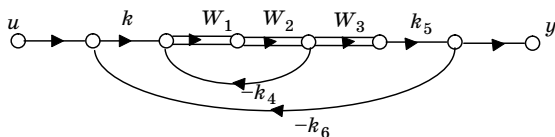


Рис. 4.17. Сигнальный граф электропривода

а также для прямого пути и его минора:

$$P_1 = k_0 k_5 W_1 W_2 W_3, \quad \Delta_1 = 1.$$

Подставив эти выражения в формулу Мэсона:

$$W(p) = \frac{1}{\Delta} P_1 \Delta_1 = \frac{k_0 k_5 W_1 W_2 W_3}{W_1 W_2 (k_4 + k_0 k_5 k_6 W_3) + 1},$$

с учетом обозначений (4.16) получаем

$$W(p) = \frac{k_0 k_1 k_2 k_3 k_5}{T_1 T_2 T_3 p^3 + (T_1 T_3 + T_1 T_2 + T_2 T_3) p^2 + (k_1 k_2 k_4 T_3 + T_1 + T_2 + T_3) p + k_1 k_2 k_4 + k_0 k_1 k_2 k_3 k_5 k_6}.$$

Подстановка численных значений параметров дает

$$W(p) = \frac{81,92}{p^3 + 9,273 p^2 + 29,11 p + 40,04}.$$

Выполним моделирование электропривода в пакете MATLAB. Для этого вводим коэффициенты числителя и знаменателя передаточной функции $W(p)$ и с помощью команд **tf** и **step** получаем график переходной характеристики (рис. 4.18).

Пример 11. На рис. 4.19 показана структурная схема сервопривода пятого порядка с двумя входами, пропорциональными регуляторами тока и скорости. Требуется найти его передаточную функцию и описание в пространстве состояний.

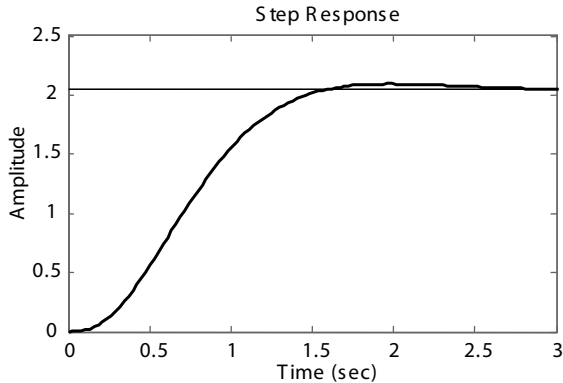


Рис. 4.18. Переходная характеристика электропривода

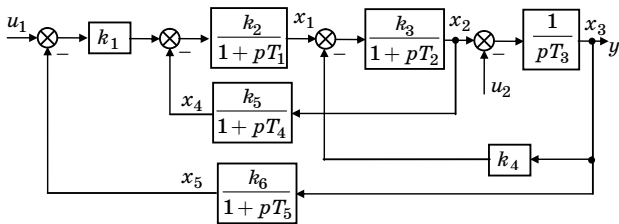


Рис. 4.19. Структурная схема сервопривода

Решение.

1. Операторное описание сервопривода имеет вид

$$y(p) = W_1(p)u_1 + W_2(p)u_2.$$

Найдем передаточные функции $W_1(p)$ и $W_2(p)$ с помощью формулы Мэсона. Для этого нарисуем сигнальный граф (рис. 4.20), на котором обозначено

$$Q_1 = \frac{k_2}{1 + pT_1}, \quad Q_2 = \frac{k_3}{1 + pT_2}, \quad Q_3 = \frac{1}{pT_3},$$

$$Q_4 = \frac{k_5}{1 + pT_4}, \quad Q_5 = \frac{k_6}{1 + pT_5}.$$

Выпишем прямые пути от входов u_1, u_2 до выхода y :

$$P_1 = k_1 Q_1 Q_2 Q_3, \quad P_2 = -Q_3.$$

Граф содержит три контура с передачами:

$$L_1 = -Q_1 Q_2 Q_4, \quad L_2 = -k_4 Q_2 Q_3, \quad L_3 = -k_1 Q_1 Q_2 Q_3 Q_5.$$

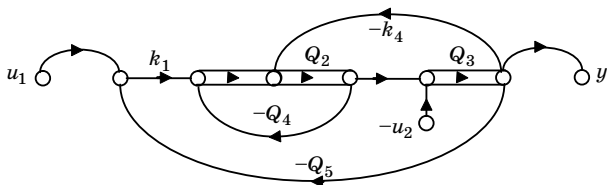


Рис. 4.20. Сигнальный граф электропривода

Искомые передаточные функции определяются формулами

$$W_1 = \frac{1}{\Delta} P_1 \Delta_1, \quad W_2 = -P_2 \Delta_2 / \Delta, \quad (4.17)$$

где Δ – определитель графа; Δ_1 и Δ_2 – определители путей P_1 и P_2 :

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) = 1 + Q_1 Q_2 Q_4 + k_4 Q_2 Q_3 + k_1 Q_1 Q_2 Q_3 Q_5, \\ \Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = 1 - L_1 = 1 + Q_1 Q_2 Q_4.$$

Подставив их в формулы (4.17), получим:

$$W_1 = \frac{k_1 Q_1 Q_2 Q_3}{1 + Q_1 Q_2 Q_4 + k_4 Q_2 Q_3 + k_1 Q_1 Q_2 Q_3 Q_5}, \quad (4.18) \\ W_2 = -\frac{Q_3 (1 + Q_1 Q_2 Q_4)}{1 + Q_1 Q_2 Q_4 + k_4 Q_2 Q_3 + k_1 Q_1 Q_2 Q_3 Q_5}.$$

2. Для матричного описания примем в качестве переменных состояния x_1, \dots, x_5 выходные сигналы отдельных блоков и запишем уравнения для каждого из них:

$$x_1 = \frac{k_2}{1 + pT_1} (k_1 (u_1 - x_5) - x_4), \quad x_2 = \frac{k_3}{1 + pT_2} (x_1 - k_4 x_3), \\ x_3 = \frac{1}{pT_3} (x_2 - u_2), \quad x_4 = \frac{k_5}{1 + pT_4} x_2, \\ x_5 = \frac{k_6}{1 + pT_5} x_3, \quad y = x_3.$$

Произведем перегруппировку членов в уравнениях, выделив в левых частях члены вида px_i :

$$px_1 = \frac{k_2}{T_1} (k_1 (u_1 - x_5) - x_4) - \frac{1}{T_1} x_1, \\ px_2 = \frac{k_3}{T_2} (x_1 - k_4 x_3) - \frac{1}{T_2} x_2, \\ px_3 = \frac{1}{T_3} (x_2 - u_2), \quad px_4 = \frac{k_5}{T_4} x_2 - \frac{1}{T_4} x_4, \\ px_5 = \frac{k_6}{T_5} x_3 - \frac{1}{T_5} x_5, \quad y = x_3.$$

Учитывая, что умножение на p соответствует взятию производной, нетрудно перейти к дифференциальным уравнениям для переменных x_1, \dots, x_5 . Поскольку они очевидны, приведем сразу выражения для матриц \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & 0 & -\frac{k_2}{T_1} & -\frac{k_1 k_2}{T_1} \\ \frac{k_3}{T_2} & -\frac{1}{T_2} & -\frac{k_3 k_4}{T_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_5}{T_4} & 0 & -\frac{1}{T_4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_5}{T_5} & 0 & -\frac{1}{T_5} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{k_1 k_2}{T_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0].$$

От них можно перейти к операторному описанию, используя формулу $y(p) = \mathbf{c}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}u(p)$.

Подставим в передаточные функции (4.18) единичные значения всех параметров:

$$W_1 = \frac{(p+1)^2}{p^5 + 4p^4 + 7p^3 + 8p^2 + 6p + 2},$$

$$W_2 = -\frac{(p+1)(p^3 + 3p^2 + 3p + 2)}{p^5 + 4p^4 + 7p^3 + 8p^2 + 6p + 2}.$$

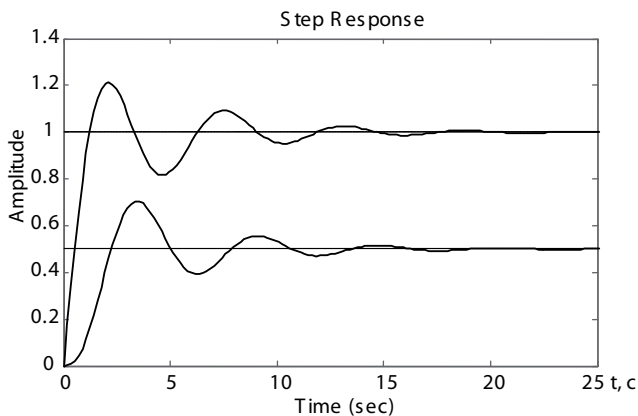


Рис. 4.21. Переходные характеристики сервопривода

Дополнительный анализ показывает, что эти передаточные функции неминимальны. После сокращения общих сомножителей числителя и знаменателя получаем

$$W_1 = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 2},$$

$$W_2 = -\frac{(p+2)(p^2 + p + 1)}{(p+1)(p^3 + 2p^2 + 2p + 2)}.$$

Графики переходных характеристик, полученные в MATLAB, показаны на рис. 4.21.

Из них видно, что при выбранных значениях параметров переходные процессы затянуты и имеет место большое перерегулирование.

4.6. Канонические реализации передаточных функций

Каждой модели, заданной структурной схемой, соответствует одна передаточная функция. В то же время обратный переход неоднозначен – одной и той же передаточной функции можно поставить в соответствие много схем моделирования (много эквивалентных реализаций). Среди них выделяют так называемые *канонические реализации* (канонические формы), обладающие особенно простой структурой.

Канонические реализации должны удовлетворять условиям существования и единственности, которые означают, что реализация указанного вида существует для каждой передаточной функции, и притом ровно одна. Кроме того, предполагается, что каноническая реализация должна быть «красивой», матрицы ее описания в пространстве состояний или другие системные матрицы должны иметь простой вид с большим числом нулевых элементов.

Для скалярных систем, заданных передаточной функцией:

$$Q(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}, \quad (4.19)$$

известно несколько десятков канонических схем моделирования. Их можно разделить на четыре группы – фробениусовы (сопровождающие), модальные, цепные и сбалансированные. Дадим их краткую характеристику.

Фробениусовы канонические формы. Так называются реализации, параметрами которых служат коэффициенты b_i, a_i числителя и знаменателя передаточной функции (4.19). В подразд. 4.2 были рассмотрены две такие реализации, получаемые методом непосредственного интегрирования и методом комбинирования производных. Их структурные схемы и сигнальные графы приведены на рис. 4.4 и 4.5. Матрица A описания в пространстве состояний первой из этих реализаций имеет фробениусов вид (4.12). Аналогичная матрица для второй получается путем ее транспонирования. Другие названия этих реализаций – идентификационная каноническая форма и каноническая форма фазовых переменных. В пакете MATLAB фробениусовы реализации могут быть получены с помощью команд **ss** и **canon**.

Модальные канонические формы. Параметрами модальных реализаций служат корни характеристического полинома системы. Наиболее известны параллельная и последовательная реализации передаточной функцией. Параллельная реализация получается путем разложения передаточной функции (4.19) на сумму элементарных дробей

$$Q(p) = \frac{r_1}{p - p_1} + \dots + \frac{r_n}{p - p_n}$$

(для простоты считаем все корни полинома $A(p)$ вещественными и различными).

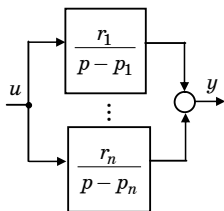


Рис. 4.22. Параллельная реализация

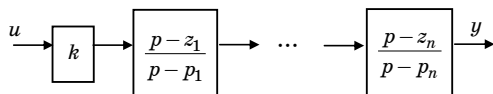


Рис. 4.23. Последовательная реализация

Такой записи отвечает параллельное соединение n аperiodических звеньев (рис. 4.22).

В случае комплексных и кратных корней структура параллельной реализации усложняется, в ней могут появляться звенья второго и более высоких порядков. В пакете MATLAB параллельная каноническая реализация строится командой `canon` с опцией «modal».

Последовательная реализация получается путем представления передаточной функции в виде произведения элементарных сомножителей. В случае вещественных нулей и полюсов системы она имеет вид

$$Q(p) = k \frac{p - z_1}{p - p_1} \frac{p - z_2}{p - p_2} \dots \frac{p - z_m}{p - p_m} \frac{1}{p - p_{m+1}} \dots \frac{1}{p - p_n}. \quad (4.20)$$

Такой записи передаточной функции отвечает последовательное соединение звеньев, показанное на рис. 4.23 для случая $m = n - 1$.

При наличии комплексных нулей и полюсов разложение (4.20) будет содержать сомножители второго порядка, в пакете MATLAB это разложение получается командой `zpk`.

Пример 12. Найдем параллельную и последовательную канонические реализации передаточной функции

$$Q(p) = \frac{1}{p^2 + 19p + 90}.$$

Для этого представим ее в виде суммы и произведения элементарных дробей

$$Q(p) = \frac{1}{p + 9} - \frac{1}{p + 10} = \frac{1}{p + 9} \frac{1}{p + 10}.$$

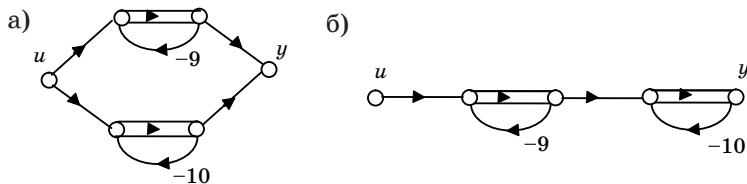


Рис. 4.24. Сигнальные графы для примера 12

Сигнальные графы соответствующих схем моделирования приведены на рис. 4.24.

Цепные канонические формы. Ряд канонических реализаций основан на разложении передаточной функции в цепные дроби. Они применяются в математике и вычислительной технике для приближенного представления чисел и функций, в теории электрических цепей – при анализе и синтезе лестничных схем и других областях. Представляя передаточную функцию в виде некоторой цепной дроби и строя соответствующую схему моделирования, можно получить канонические реализации Шварца, Рауса и Кауэра.

Стандартный способ получения цепных дробей – алгоритм Евклида. Согласно ему сначала выделяется целая часть дроби (числовой или дробно-рациональной), остаток «переворачивается», вновь выделяется его целая часть и т. д. В случае передаточной функции $Q(p) = B(p) / A(p)$ деление полиномов $A(p)$ на $B(p)$ можно начинать со старших или младших степеней, в зависимости от этого будем получать первую или вторую форму Кауэра.

Для второй формы Кауэра получаем цепную дробь, содержащую $2n$ ступенек вида:

$$Q(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\beta_1 + \frac{1}{p \left(\alpha_2 + \frac{1}{\beta_2 + \dots + \frac{1}{p \left(\alpha_n + \frac{1}{\beta_n} \right)} \right)}}}},$$

где α_i, β_i – числовые коэффициенты; n – порядок передаточной функции.

Такой записи отвечает регулярная структурная реализация, сигналный граф которой приведен на рис. 4. 25.

Отметим еще одну каноническую форму, получаемую в результате выполнения только одного шага алгоритма Евклида. Это так называемая *контурная каноническая форма*.

Для ее построения передаточная функция (4.19) представляется в виде

$$Q(p) = \frac{1}{A_0(p) + \frac{B_0(p)}{B(p)}}$$

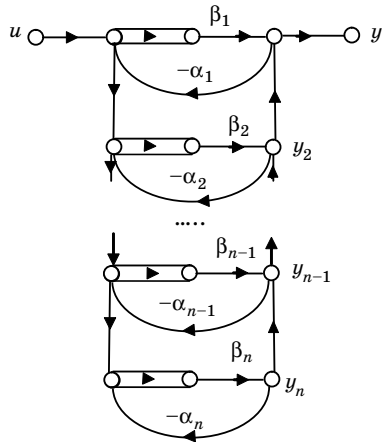


Рис. 4.25. Симметричная цепная каноническая форма

где полиномы $A_0(p)$ и $B_0(p)$ представляют собой целую часть и остаток от деления $A(p)$ на $B(p)$:

$$A(p) / B(p) = A_0(p) + B_0(p) / B(p).$$

Отсюда, обозначив $Q_0(p) = \frac{1}{A_0(p)}$, $Q_1(p) = \frac{B_0(p)}{B(p)}$, получаем контурное представление скалярной системы

$$Q(p) = \frac{Q_0(p)}{1 + Q_0(p)Q_1(p)}. \quad (4.21)$$

Формуле (4.21) соответствует встречно-параллельное соединение систем с передаточными функциями $Q_0(p)$ и $Q_1(p)$, показанное на рис. 4.26.

Таким образом, для получения контурного представления надо записать обратную передаточную функцию $\frac{1}{Q(p)} = \frac{A(p)}{B(p)}$, выделить в ней целую часть – полином $A_0(p)$ и остаток – полином $B_0(p)$. Это можно сделать всегда, и притом единственным образом. В пакете MATLAB для этого удобно использовать команду `deconv`.

Пример 13. Найдем контурное представление системы, заданной следующей передаточной функцией:

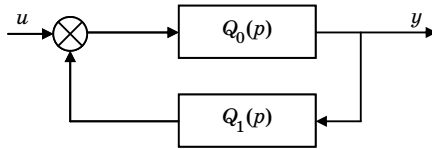


Рис. 4.26. Контурное представление передаточной функции

$$Q = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{p^2 + 2p + 5}{p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 2p + 1}.$$

В данном случае $n = 4$, $m = 2$.

Решение. Для получения контурного представления выполним один шаг алгоритма Евклида:

$$\frac{A(p)}{B(p)} = p^2 - 2 + \frac{6p + 11}{p^2 + 2p + 5}, \quad A_0(p) = p^2 - 2, \quad B_0(p) = 6p + 11.$$

Выписываем передаточные функции $Q_0(p)$ и $Q_1(p)$:

$$Q_0(p) = \frac{1}{p^2 - 2}, \quad Q_1(p) = \frac{6p + 11}{p^2 + 2p + 5}.$$

Следовательно, искомое представление имеет вид:

$$Q(p) = \frac{1}{A_0(p) + \frac{B_0(p)}{B(p)}} = \frac{1}{p^2 - 2 + \frac{6p + 11}{p^2 + 2p + 5}}.$$

На рис. 4.27 показан сигнальный граф, отвечающий такой записи передаточной функции.

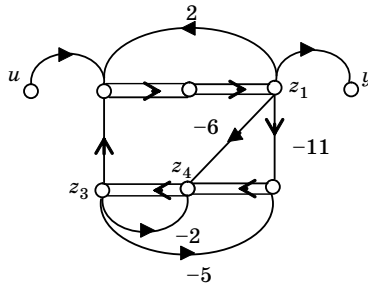


Рис. 4.27. Контурная каноническая форма системы для примера 13

Он содержит единственный прямой путь от входа до выхода длины $n - m = 2$.

Нулевой полином исходной системы совпадает с характеристическим полиномом нижней части сигнального графа и равен $p^2 + 2p + 5$, его корни – это передаточные нули исходной системы.

Отметим два свойства контурного представления. Во-первых, в нем явно выделяется подсистема $Q_0(p)$, отвечающая за запаздывание ее выходного сигнала относительно входного.

Во-вторых, полюсы подсистемы $Q_1(p)$ равны передаточным нулям исходной системы. Тем самым исследование нулей исходной системы сводится к исследованию полюсов вспомогательной системы меньшего порядка. Благодаря этому контурное представление полезно для отыскания передаточных нулей исходной системы и для расчета ее нулевых режимов, т. е. ненулевых входных сигналов $f(t)$ и согласованных с ними начальных условий, при которых выходной сигнал проверяемой системы тождественно равен нулю. Все множество нулевых режимов может быть получено путем экспериментов с подсистемой $Q_1(p)$, причем функции $f(t)$ – это множество выходных сигналов системы $Q_1(p)$, получаемых при ее свободном движении из различных начальных условий.

Сбалансированные реализации. Особый класс канонических реализаций образуют сбалансированные представления. Они не отличаются простотой структурной реализации и для них неизвестен какой-нибудь специальный вид записи передаточной функции, как это имело место для предыдущих канонических форм. Главная отличительная черта сбалансированного представления – диагональность грамианов управляемости и наблюдаемости W_c и W_o . Они определены только для устойчивых систем и представляют собой симметричные матрицы, удовлетворяющие уравнениям Ляпунова:

$$W_c A^T + A W_c = -b b^T, \quad W_o A + A^T W_o = -c^T c,$$

где A , b , c – матрицы описания в пространстве состояний (применение этих матриц для анализа управляемости и наблюдаемости будет описано в разд. 6).

Сбалансированное представление обладает рядом полезных свойств. Оно мало чувствительно к погрешностям вычислений и обеспечивает хорошее качество редукции. Алгоритм построения

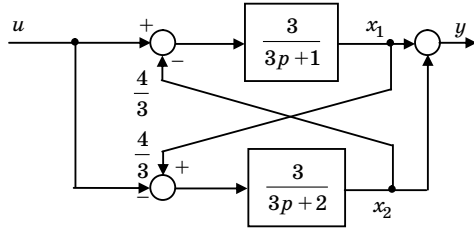


Рис. 4.28. Пример сбалансированной реализации

сбалансированного представления довольно сложен, в пакете MATLAB он реализуется командой **balreal**.

В качестве примера на рис. 4.28 приведена сбалансированная структурная реализация передаточной функции

$$Q(p) = \frac{3}{p^2 + p + 2}.$$

Характерной чертой этой схемы является ортогональность сигналов x_1, x_2 , получаемых при $u = \delta(t)$. Это прямое следствие диагональности грамианов управляемости и наблюдаемости:

$$W_c = W_o = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 0,75 \end{bmatrix}.$$

Завершая раздел, посвященный моделированию передаточных функций, остановимся на их взаимосвязи с другими видами описания линейных систем – дифференциальными уравнениями, структурными схемами и описанием в пространстве состояний.

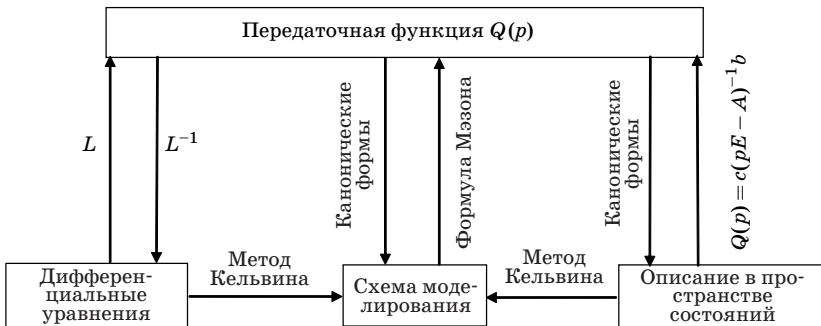


Рис. 4.29. Взаимосвязь описаний линейной системы

Рис. 4.29 иллюстрирует способы перехода от одного из этих описаний к другим.

Проще всего выглядит взаимосвязь между передаточной функцией и дифференциальным уравнением – для этого используется прямое и обратное преобразования Лапласа L и L^{-1} . Переход от схемы моделирования к передаточной функции может быть осуществлен с помощью формулы Мэсона, обратный переход – с помощью одной из канонических форм (фробениусовой, параллельной, последовательной и т. д.).

Описание в пространстве состояний можно получить, используя канонические реализации передаточной функции; для обратного преобразования служит формула $\mathbf{Q}(p) = \mathbf{c}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$. Универсальным средством для построения схемы моделирования по заданным дифференциальным уравнениям или описанию в пространстве состояний служит метод Кельвина.

Все эти виды описания поддерживаются соответствующими функциями системы MATLAB и SIMULINK.

Задачи и упражнения

1. Найти реакцию аperiodического звена с передаточной функцией $\mathbf{Q}(p) = \frac{1}{p+a}$ на входной сигнал $u = e^{-\lambda t}$. Определить максимум выходного сигнала при $a = 1, \lambda = 2$.

Решение. Используя формулу $y(p) = \mathbf{Q}(p)u(p)$, получаем

$$y(p) = \frac{1}{p+a} \cdot \frac{1}{p+\lambda} = \frac{1}{\lambda-a} \left(\frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+\lambda} \right),$$

откуда

$$y(t) = \frac{1}{\lambda-a} \left(e^{-at} - e^{-\lambda t} \right)$$

Первое слагаемое описывает собственное движение системы, второе – вынужденную составляющую.

Для определения максимума берем производную и приравняем ее нулю:

$$ae^{-at} = \lambda e^{-\lambda t}, e^{(a-\lambda)t} = \frac{a}{\lambda}, t_{\max} = \frac{\ln a - \ln \lambda}{a - \lambda}$$

При $a = 1, \lambda = 2$ получим:

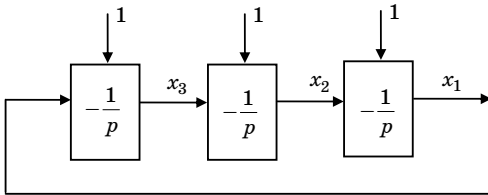
$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t}; t_{\max} = \ln(2) \approx 0,69; y(t_{\max}) = 0,25.$$

При $\lambda = a$ (особый случай) решение принимает вид:

$$y(p) = \frac{1}{(p+a)^2}; \quad y(t) = te^{-at}.$$

При этом $t_{\max} = 1/a, y(t_{\max}) = 1/ae$.

2. Моделируемая система (см. рисунок) представляет собой кольцо из трех инвертирующих интеграторов, охваченных общей обратной связью. Начальные условия всех интеграторов одинаковы и равны 1.



Найти характеристический полином схемы и вид выходных сигналов интеграторов.

Ответ. Характеристический полином равен $p^3 + 1$, на выходах интеграторов будут вырабатываться одинаковые затухающие экспоненты $x_i(t) = e^{-t}$.

3. На рисунке показана структура системы парового отопления двухэтажного здания.



Горячая вода из нагревателя поступает в батареи первого и второго этажей (резервуары 1 и 2). Остывшая вода вновь поступает в резервуар 1. Вход u возмещает возможные расходы воды.

Система описывается дифферен-

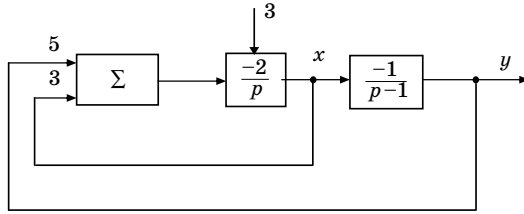
циальными уравнениями

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_3 + 3u, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2, \quad \dot{x}_3 = x_1 + x_2 - 2x_3.$$

Требуется построить схему моделирования и найти весовые функции от входа u до выходов x_1, x_2, x_3 .

Ответ. Весовые функции $q_1 = 1 + 2e^{-3t}; q_2 = q_3 = 1 - e^{-3t}$.

4. На рисунке приведена структурная схема системы. Найти функции $x(t), y(t)$.



Решение. По схеме можно записать два операторных уравнения $-px = 2(3x + 5y)$; $(1 - p)y = -x$.

Исключаем переменную x : $p(1 - p)y = 2(3(p - 1)y + 10p^2y)$.

Получаем характеристическое уравнение $p^2 + 5p + 4 = 0$. Его корни $p_1 = -1$, $p_2 = -4$.

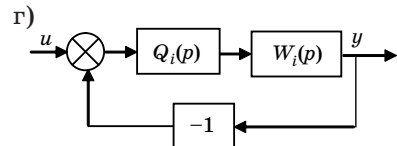
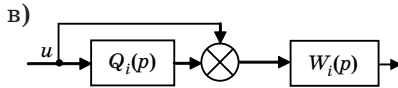
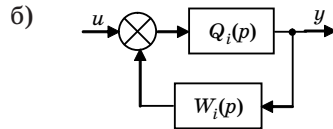
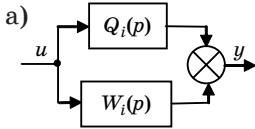
Следовательно,

$$y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t},$$

$$x = y - \dot{y} = 2C_1 e^{-t} + 5C_2 e^{-4t}.$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из начальных условий $C_1 = -1$, $C_2 = 1$.

5. На рисунке показаны четыре варианта соединения блоков $Q_i(p)$, $W_i(p)$.



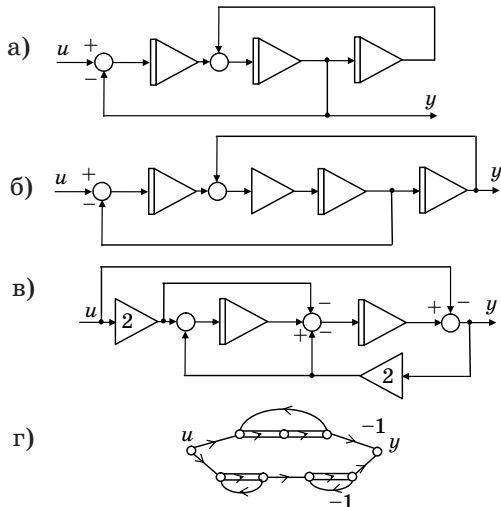
Для каждого из них составить схему, пользуясь методом структурного моделирования и выписать матрицы \mathbf{A} , \mathbf{b} , с описания в пространстве состояний.

Передаточные функции блоков $Q_i(p)$, $W_i(p)$ ($i = 1, 2, 3$) имеют вид:

$$Q_1(p) = \frac{p}{p^2 + a_0}, \quad Q_2(p) = \frac{1}{p^2 + a_1 p}, \quad Q_3(p) = \frac{1}{p^2 + a_0},$$

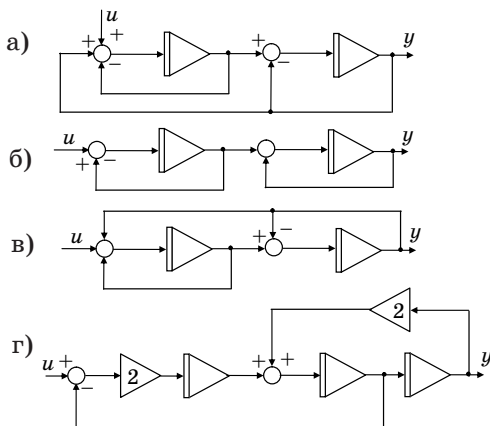
$$W_1(p) = \frac{1}{p + a_3}, \quad W_2(p) = \frac{p}{p + a_3}, \quad W_3(p) = \frac{p + a_0}{p^2 + a_0}.$$

6. Используя формулу Мэсона, найти передаточные функции приведенных ниже схем.



Ответ. а) $\frac{1}{p^2}$; б) $\frac{2}{p^3}$; в) -1 ; г) 0 .

7. Используя формулу Мэсона, найти весовые функции приведенных ниже схем.



Ответ. а) $1 - e^{-2t}$; б) sht ; в) t ; г) t^2 .

8. Получить две фробениусовы канонические формы для систем с матрицами **A** вида:

$$\text{а) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \quad 1],$$

$$\text{б) } \mathbf{A} = -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [0 \quad 1],$$

$$\text{в) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \quad 1],$$

$$\text{г) } \mathbf{A} = -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [0 \quad 1].$$

9. Найти параллельную и последовательную канонические формы для систем с передаточной функцией:

$$\text{а) } \frac{1}{p^2 + 3p + 2}, \quad \text{б) } \frac{p}{p^2 + 3p + 2}; \quad \text{в) } \frac{p + 1}{p^2 + 3p + 2}; \quad \text{г) } \frac{p - 1}{p^2 + 3p + 2}.$$

10. Найти вторую каноническую форму Кэуэра и контурное представление скалярной системы для систем с передаточными функциями из упражнения.

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ВРЕМЕНИ

В ряде случаев при компьютерном моделировании возникает необходимость генерировать функции времени, заданные численно, графически или аналитически. В качестве примеров можно указать:

- получение возмущающих функций и воспроизведение переменных коэффициентов при моделировании дифференциальных уравнений;
- получение тестовых воздействий для исследования систем автоматического управления;
- реализацию функций для нахождения корней трансцендентных или алгебраических уравнений;
- получение графиков плоских и пространственных кривых.

5.1. Компьютерная реализация функций времени

Существует несколько способов компьютерной реализации функций – табличное представление, разложение в ряд, использование порождающих дифференциальных или разностных уравнений. Они отличаются друг от друга точностью, быстродействием, программными и аппаратными затратами.

Табличный способ. В данном случае функция задается своими значениями на некотором наборе точек. Таким образом, исходные данные представляют собой таблицу чисел. Для обеспечения достаточной точности необходимо иметь значительное число точек. Это приводит к увеличению размера таблицы и, соответственно, возрастанию требуемого объема оперативной памяти (дискового пространства), однако данный способ обладает максимальным быстродействием и производительностью.

Разложение в ряды. Исходной информацией здесь является аналитическое представление функции. Это позволяет представить ее в виде ряда, т. е. суммы некоторых слагаемых. Например, для вычисления экспоненты можно использовать разложение в ряд Тейлора:

$$e^t = 1 + \frac{t^1}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots,$$

что потребует хранения в памяти не таблицы функции, а только первых коэффициентов ряда (1, 1, 1/2, 1/6, 1/24, ...).

Это приводит к экономии памяти (хранятся только несколько коэффициентов разложения), однако необходимо дополнительное время и вычислительные ресурсы на выполнение алгоритма. Заметим, что данный способ используется в большинстве карманных калькуляторов.

Построение определяющего дифференциального уравнения. Еще большей экономии памяти можно достичь, если хранить в ней только коэффициенты дифференциального или разностного уравнения, решением которых является данная функция. Такой способ удобен, в частности, для бортовых вычислительных машин, когда аргументы функций, например время или углы, монотонно изменяются во время полета. Решая соответствующее дифференциальное уравнение в бортовом компьютере, постепенно, точка за точкой, получают искомые значения функций. Эта идея лежит в основе динамического способа, который и рассматривается далее.

Проще всего этим способом генерировать функции, которые являются решениями линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. К таким функциям относятся $e^{\alpha t}$, t^n , $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ и их комбинации. Задача сводится к отысканию определяющего дифференциального или разностного уравнений

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0, \quad (5.1)$$

$$y_{n+k} + a_{n-1}y_{n+k-1} + \dots + a_1y_{k+1} + a_0y_k = 0, \quad (5.2)$$

для которых они являются решением.

Существует несколько методов построения определяющих уравнений для заданных функций. Рассмотрим четыре из них: метод последовательного дифференцирования, метод характеристического полинома, использование определителя Вронского и метод списков.

5.2. Метод последовательного дифференцирования

Процедура поиска определяющего уравнения этим методом сводится к вычислению некоторого числа производных исходной функции, на основании которых можно составить линейное дифференциальное уравнение.

Пусть задана функция $y = f(t)$ и требуется найти дифференциальное уравнение (5.1), решением которого она является. Для

отыскания этого уравнения рассмотрим наряду с функцией $y(t)$ ее производные $\dot{y}(t), \ddot{y}(t), \ddot{\ddot{y}}(t), \dots$, причем дифференцирование будем выполнять до тех пор, пока очередная функция не окажется линейной комбинацией предыдущих:

$$y^{(n)}(t) = a_0 y(t) + a_1 \dot{y}(t) + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)}(t).$$

Найденное соотношение и будет представлять собой искомое дифференциальное уравнение.

Для проверки системы функций, полученных после очередного дифференцирования, на линейную зависимость можно использовать стандартные математические критерии: вычисление определителя Грама, отыскание сингулярных чисел, определение ранга и т. п.

Пример 1. Найдем дифференциальное уравнение, имеющее своим решением функцию $y(t) = Ae^{-\alpha t}$.

Решение. Дифференцируя, получаем функцию $\dot{y}(t) = -A\alpha e^{-\alpha t}$, пропорциональную исходной. Следовательно, определяющее уравнение имеет вид $\dot{y} + \alpha y = 0$.

Решением этого уравнения является $y(t) = Ce^{-\alpha t}$. Для того чтобы обеспечить равенство $C = A$, необходимо задать начальное условие $y(0) = A$. Соответствующая схема моделирования показана на рис. 5.1.

Пример 2. Пусть требуется получить функцию $y(t) = \sin kt$.

Решение. Для отыскания определяющего уравнения дважды дифференцируем исходную функцию: $\dot{y} = k \cos t, \ddot{y} = -k^2 \sin t$. Отсюда получаем, что искомое уравнение имеет вид $\ddot{y} + k^2 y = 0, y_0 = 0, \dot{y}_0 = k$.

Схема моделирования показана на рис. 5.2. Ее часто используют в технике в качестве генератора гармонических колебаний.

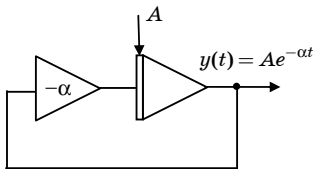


Рис. 5.1. Получение функции $Ae^{-\alpha t}$

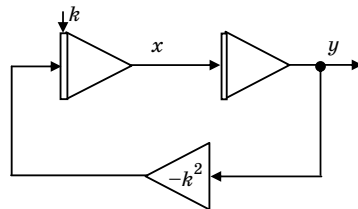


Рис. 5.2. Получение функций $\sin kt$ и $\cos kt$

Пример 3. Найдем определяющее дифференциальное уравнение для функции $y(t) = te^t$.

Решение. Дважды дифференцируя, получаем $\dot{y} = e^t + te^t = e^t + y$, $\ddot{y} = e^t + \dot{y}$. Разность двух последних равенств дает $\ddot{y} - \dot{y} = \dot{y} - y$ или $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0$. Это и есть искомое дифференциальное уравнение.

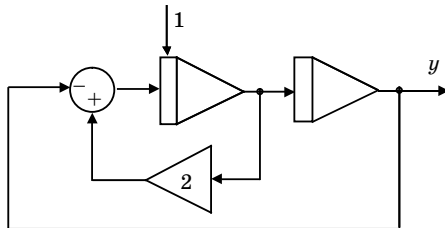


Рис. 5.3. Получение функции te^t

Схема его моделирования показана на рис. 5.3.

5.3. Метод характеристического полинома

В этом методе используется соответствие между корнями характеристического полинома и решениями дифференциального уравнения.

Исходная функция $y(t)$ представляется в виде суммы элементарных слагаемых. По их виду с помощью табл. 2.1 (см. разд. 2) определяются корни соответствующего характеристического полинома и составляется характеристическое уравнение вида $(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) = 0$. От него легко перейти к дифференциальному уравнению

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = 0,$$

где коэффициенты a_i рассчитываются по известным корням p_i с помощью формул Виета

$$a_0 = (-1)^n p_1 p_2 \dots p_n, \dots, a_{n-1} = -(p_1 + p_2 + \dots + p_n).$$

Пример 4. Пусть требуется воспроизвести функцию $y(t) = e^{-t} \sin 2t + t \cos t$. Здесь первому слагаемому соответствует пара комплексных корней $p_{1,2} = -1 \pm 2j$, а второму – кратные чисто мнимые корни $p_{3,4} = p_{5,6} = \pm j$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$(p+1-2j)(p+1+2j)(p-j)(p+j)(p-j)(p+j)=0$$

или после раскрытия скобок

$$p^6 + 2p^5 + 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 2 = 0.$$

В результате получим следующее дифференциальное уравнение

$$y^{(6)} + 2y^{(5)} + 4y^{(4)} + 4y^{(3)} + 5y^{(2)} + 2y' + 2y = 0.$$

Начальные условия находим как значения исходной функции и пяти ее производных при $t = 0$. Схема моделирования будет представлять цепочку из шести интеграторов, охваченную обратными связями.

Другой вариант заключается в раздельном рассмотрении слагаемых исходной функции и получении дифференциального уравнения для каждого из них.

Характеристические уравнения для первого и второго слагаемых имеют вид соответственно:

$$p^2 + 2p + 2 = 0, \quad p^4 + 2p^2 + 1 = 0.$$

Это приводит к двум определяющим дифференциальным уравнениям

$$y_2'' + 2y_2' + 2y_2 = 0, \quad y_1^{(4)} + 2y_1'' + y_1 = 0.$$

Искомая функция $y(t)$ получается как сумма $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$. Схема моделирования будет содержать два параллельных фрагмента (второго и четвертого порядка).

Рассмотренный метод прост, но применим только для воспроизведения функций, которые являются решениями линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Процедура построения определяющих разностных уравнений выглядит аналогично, только операция дифференцирования заменяется сдвигом функции на такт дискретного времени.

Пример 5. Найдем определяющее разностное уравнение вида (5.2) для функции $y(t) = te^{-t}$.

Решение. Перейдем к дискретному времени $t = kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Требуется получить функцию вида $y_k = (c_1 + c_2 kh)e^{-kh}$. Следовательно, характеристический полином разностного урав-

нения должен иметь кратный корень $z_1 = z_2 = e^{-h}$. Восстанавливая полином по корням, получаем

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - 2e^{-h}z + e^{-2h}.$$

Ему соответствует разностное уравнение второго порядка

$$y_{k+2} - 2e^{-h}y_{k+1} + e^{-2h}y_k = 0$$

с начальными условиями $y_0 = 0$, $y_1 = he^{-h}$.

При $h = 0,1$ оно принимает вид

$$y_{k+2} - 1,81y_{k+1} + 0,819y_k = 0, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0,0904837.$$

5.4. Метод определителя Вронского

Этот метод удобно применять, когда требуется воспроизвести одну из функций времени $f_1(t)$, ..., $f_n(t)$ или их линейную комбинацию.

Определитель

$$W(t) = \begin{vmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ f_1' & \dots & f_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (5.3)$$

называется определителем Вронского для функций $f_1(t)$, ..., $f_n(t)$.

В курсе дифференциальных уравнений доказывается, что если определитель Вронского $W(t)$ не равен нулю ни при каком t , то уравнение

$$\begin{vmatrix} f_1 & \dots & f_n & y \\ f_1' & \dots & f_n' & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ f_1^n & \dots & f_n^n & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.4)$$

имеет своими решениями функции $f_1(t)$, ..., $f_n(t)$.

Пример 6. Пусть нужно воспроизвести систему функций 1 , t , t^2 . Определитель Вронского (5.3) этих функций отличен от нуля:

$$W(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

В данном случае он находится без труда, в более сложных случаях определитель Вронского можно вычислить в пакете MAPLE с помощью команды **wronskian**.

Определяющее дифференциальное уравнение (5.4) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & y \\ 0 & 1 & 2t & y' \\ 0 & 0 & 2 & y'' \\ 0 & 0 & 0 & y''' \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда $y''' = 0$. Схема моделирования этого уравнения показана на рис. 5.4.

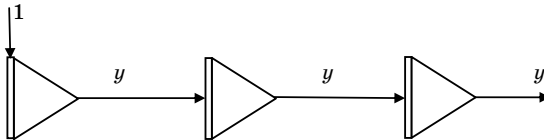


Рис. 5.4. Схема получения функций 1 , t , t^2

Если на интеграторах установить начальные условия $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$, $\ddot{y}_0 = 1$, то на выходах интеграторов будут воспроизводиться функции 1 , t , $0,5t^2$, которые совпадают с требуемыми с точностью до постоянных коэффициентов.

Пример 7. Найдем дифференциальное уравнение, решением которого являются функции e^t , $\text{sh}t$. Строим для этих функций определитель (5.4) и раскрываем его:

$$\begin{vmatrix} e^t & \text{sh}t & y \\ e^t & \text{cht} & \dot{y} \\ e^t & \text{sh}t & \ddot{y} \end{vmatrix} = -e^t (\text{cht} + \text{sh}t)(\ddot{y} - y) = 0.$$

Отсюда определяющее дифференциальное уравнение имеет вид $\ddot{y} - y = 0$. Для получения функции e^t надо взять начальные условия $y_0 = \dot{y}_0 = 1$, а для функции $\text{sh}t$ – начальные условия $y_0 = 0, \dot{y}_0 = 1$.

5.5. Метод списков

В некоторых случаях необходимо воспроизвести одновременно несколько функций времени $y_1 = f_1(t), \dots, y_m = f_m(t)$. Использование описанных выше способов приводит к получению нескольких определяющих дифференциальных уравнений разных порядков. Однако размерность модели в смысле числа используемых интеграторов или элементов задержки может оказаться завышенной.

Для получения модели минимальной размерности будем искать ее описание в виде системы определяющих дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}_0, \quad (5.5)$$

где \mathbf{X} – вектор переменных состояния; \mathbf{Y} – вектор выходных сигналов, реализующих заданные функции времени; \mathbf{X}_0 – вектор начальных условий, \mathbf{A} и \mathbf{C} – постоянные матрицы, подлежащие определению.

Алгоритм получения системы (5.5) минимального порядка, обеспечивающей выполнение равенств $y_1 = f_1(t), \dots, y_m = f_m(t)$, состоит в следующем.

Шаг 1. Составляем список S_1 линейно независимых элементарных функций $\varphi_i(t), i = \overline{1, q}$, через которые линейно выражаются заданные функции $f_1(t), \dots, f_m(t)$. В частности, можно принять $\varphi_1 = f_1(t), \dots, \varphi_m = f_m(t)$.

Шаг 2. Дифференцируем функции списка S_1 , раскрываем выражения $\varphi_1(t), \dots, \varphi_q(t)$ и составляем список S_2 новых функций $\varphi_i(t), i = \overline{q+1, r}$, появившихся после дифференцирования и не выражающихся линейно через функции списка S_1 .

Шаг 3. Дифференцируем функции списка S_2 , раскрываем выражения $\varphi_{q+1}(t), \dots, \varphi_r(t)$ и составляем список S_3 новых функций $\varphi_i(t), i = \overline{r+1, s}$, появившихся после этого дифференцирования и не выражающихся линейно через функции списков S_1 и S_2 .

Шаги, аналогичные шагам 2 и 3, повторяются до тех пор, пока окажется, что после очередного дифференцирования на k -м

шаге новых функций, линейно независимых от предыдущих, не появилось. Если такого шага не наступит, то это означает, что системы определяющих дифференциальных уравнений вида (5.5) для заданных функций не существует.

Шаг $k + 1$. Размерность системы (5.5) берется равной общему числу n функций $\varphi_i(t)$, вошедших в списки S_1, S_2, \dots, S_k . Все эти функции линейно независимы, чем гарантируется минимальное число уравнений в системе. Сами эти функции принимаются за переменные состояния системы (5.5)

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_n = \varphi_n(t). \quad (5.6)$$

Дифференцируя равенства (5.6) и выражая их правые части через $x_1(t), \dots, x_n(t)$ {это возможно, так как они должны линейно зависеть от $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ }, получим систему дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$. Матрицу \mathbf{C} находим, выражая функции $f_i(t)$ через $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$. Компоненты вектора начальных условий \mathbf{X}_0 получаем из равенств (5.6) при $t = 0$.

Проиллюстрируем описанный алгоритм на примере.

Пример 8. Пусть требуется найти определяющие уравнения в форме (5.5) для функций $x = t \sin t$, $y = t \cos t$, представляющих параметрическое описание спирали Архимеда.

Решение. Выполняем шаги согласно алгоритму.

Шаг 1. Принимая $\varphi_1 = x$, $\varphi_2 = y$, получаем список S_1 :

$$S_1 = (t \sin t, t \cos t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Шаг 2. Выполняем дифференцирование функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$:

$$\varphi_1(t) = \sin t + t \cos t, \quad \varphi_2(t) = \cos t - t \sin t.$$

Новыми функциями здесь являются $\sin t$ и $\cos t$, поэтому

$$S_2 = (\sin t, \cos t) = (\varphi_3(t), \varphi_4(t)).$$

Шаг 3. Выполняем дифференцирование функций $\varphi_3(t), \varphi_4(t)$:

$$\varphi_3(t) = \cos t, \quad \varphi_4(t) = -\sin t.$$

На данном шаге новых функций не появилось, поэтому дальнейшее дифференцирование не требуется.

Шаг 4. Размерность системы (5.5) берем равной 4, при этом равенства (5.6) имеют вид

$$x_1 = t \sin t, \quad x_2 = t \cos t, \quad x_3 = \sin t, \quad x_4 = \cos t.$$

После дифференцирования этих функций с учетом формул, полученных на предыдущих шагах, приходим к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_3, & \dot{x}_2 &= -x_1 + x_4, \\ \dot{x}_3 &= x_4, & \dot{x}_4 &= -x_3, \\ y_1 &= x_1, & y_2 &= x_2. \end{aligned}$$

Ей отвечает описание (5.5) с матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Соответствующая схема моделирования приведена на рис. 5.5. Подавая сигналы $x = x_1$, $y = x_2$ на входы x, y осциллографа, получим на дисплее график спирали Архимеда (рис. 5.6).

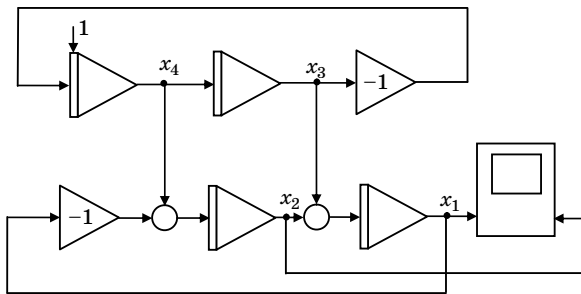


Рис. 5.5. Схема для получения спирали Архимеда

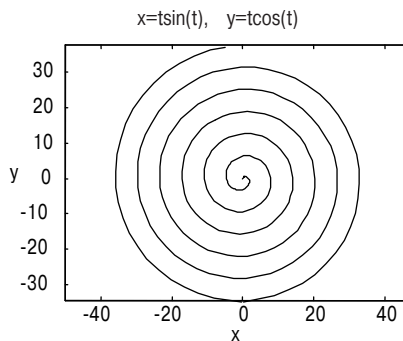


Рис. 5.6. Спираль Архимеда

Пример 9. Найдем определяющие дифференциальные уравнения в форме (5.5) для функций

$$x = 2\cos t - \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t,$$

представляющих собой параметрическое описание кардиоиды (рис. 5.7).

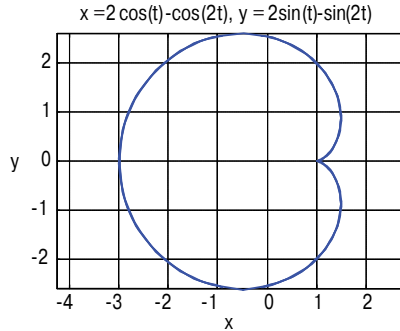


Рис. 5.7. Кардиоида

Выполняем шаги согласно алгоритму.

Шаг 1. Принимая $\varphi_1 = 2\cos t$, $\varphi_2 = \cos 2t$, $\varphi_3 = 2\sin t$, $\varphi_4 = \sin 2t$, получаем список S_1

$$S_1 = (2\cos t, \cos 2t, 2\sin t, \sin 2t).$$

Шаг 2. Выполняем дифференцирование функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= -2\sin t, & \dot{\varphi}_2 &= -2\sin 2t, \\ \dot{\varphi}_3 &= 2\cos t, & \dot{\varphi}_4 &= 2\cos 2t. \end{aligned}$$

На данном шаге новых функций не появилось, поэтому дальнейшего дифференцирования не производим.

Шаг 3. Размерность системы (5.5) берется равной 4, равенства (5.6) имеют вид

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\cos t, & x_3 &= 2\sin t, \\ x_2 &= \cos 2t, & x_4 &= \sin 2t. \end{aligned}$$

После их дифференцирования с учетом формул, полученных на шаге 2, приходим к следующей системе определяющих дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_3, & \dot{x}_3 &= x_1, \\ \dot{x}_2 &= -2x_4, & \dot{x}_4 &= 2x_2. \end{aligned}$$

Учитывая исходное уравнение, получим

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Соответствующая схема моделирования изображена на рис. 5.8.

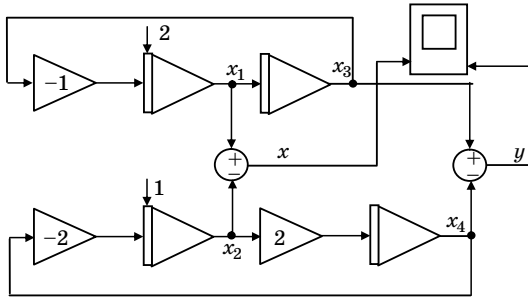


Рис. 5.8. Моделирование кардиоиды

Подавая сигналы x , y на входы осциллографа, получим изображение кардиоиды (см. рис. 5.7).

Пример 10. Пусть требуется найти определяющие уравнения в форме (5.5) для функций

$$x = \int_0^t \sin t^2 dt, \quad y = \int_0^t \cos t^2 dt,$$

представляющих параметрическое описание клотоиды (рис. 5.9).

Это кривая, у которой радиус кривизны изменяется обратно пропорционально длине дуги. Она используется как переходная дуга в дорожном строительстве. Если участок дороги имеет форму клотоиды, руль поворачивается равномерно. Такая форма дороги позволяет преодолевать поворот без существенного снижения скорости. Другое название клотоиды – спираль Корню. В оптике она используется для расчета дифракции, позволяя найти амплитуду световой волны в любой точке экрана.

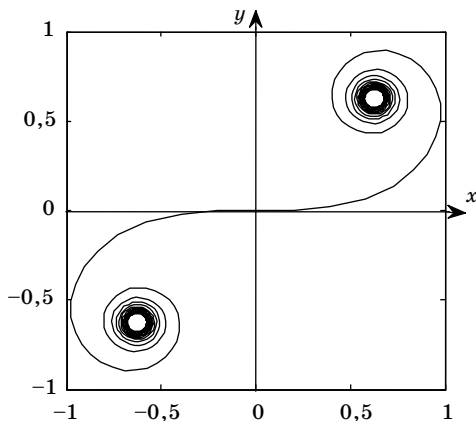


Рис. 5.9. Клотоида

Для отыскания определяющих уравнений применяем метод списков.

Шаг 1. Принимая $\varphi_1 = x$, $\varphi_2 = y$, получаем список:

$$S_1 = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Шаг 2. Выполняем дифференцирование $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ по времени:

$$\dot{\varphi}_1 = \sin t^2, \quad \dot{\varphi}_2 = \cos t^2.$$

Список S_2 имеет вид: $S_2 = (\sin t^2, \cos t^2) = (\varphi_3(t), \varphi_4(t))$.

Шаг 3. Выполняем дифференцирование функций φ_3 , φ_4 :

$$\dot{\varphi}_3 = 2t \cos t^2, \quad \dot{\varphi}_4 = -2t \sin t^2.$$

Список S_3 имеет вид $S_3 = (t \cos t^2, t \sin t^2) = (\varphi_5(t), \varphi_6(t))$.

Шаг 4. Выполняем дифференцирование функций φ_5 , φ_6 и выделяем новые компоненты

$$\varphi_7 = t^2 \sin t^2, \quad \varphi_8 = t^2 \cos t^2.$$

Нетрудно видеть, что дальнейшее дифференцирование приведет к появлению функций вида $t^k \cos t^2$, $t^k \sin t^2$, где k зависит от числа шагов и может неограниченно возрастать. Таким образом, определяющих дифференциальных уравнений вида (5.5) для заданных функций не существует, т. е. клотоида не может быть получена с помощью схемы на сумматорах и интеграторах.

Чтобы справиться с возникшей проблемой, расширим класс допустимых определяющих уравнений и позволим элементам матрицы A линейно зависеть от времени. Тогда при проверке

функций на линейную зависимость появляется возможность использовать не только постоянные, но и линейно изменяющиеся коэффициенты.

В таком случае функции, полученные на третьем шаге, оказываются линейно зависимыми от функций, полученных на втором шаге: $\varphi_5 = t\varphi_4$, $\varphi_6 = t\varphi_3$. Это приводит к системе уравнений четвертого порядка:

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = -2tx_4, \quad \dot{x}_4 = 2tx_3,$$

где обозначено $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = \dot{x}$, $x_4 = \dot{y}$.

Матрицы этой системы имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2t \\ 0 & 0 & 2t & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

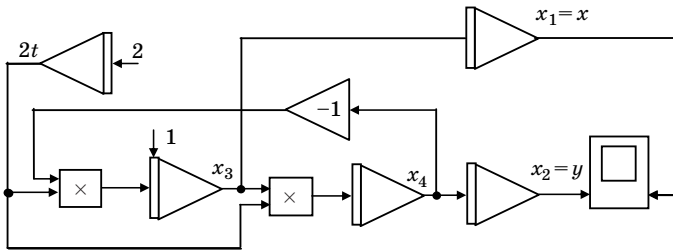


Рис. 5.10. Моделирование клотоиды

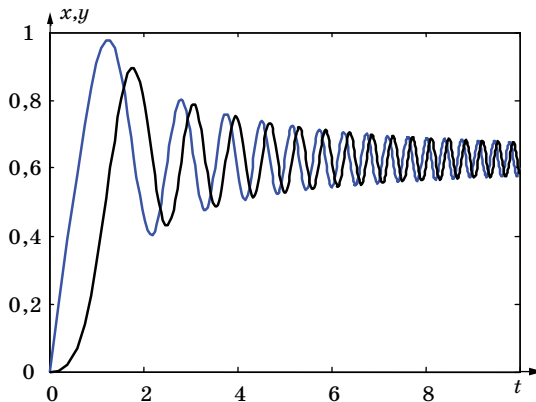


Рис. 5.11. Интегралы Френеля $C(t)$, $S(t)$

Заметим, что матрица \mathbf{A} нестационарна (ее элементы зависят от t). Соответствующая схема моделирования кроме сумматоров и интеграторов будет содержать два блока перемножения (рис. 5.10). Графики выходных сигналов схемы x , y приведены на рис. 5.11; это так называемые интегралы Френеля $C(t)$, $S(t)$. Они асимптотически стремятся к уровню $\sqrt{\pi/8} \approx 0,62$.

Зависимость $y = f(x)$, наблюдаемая на осциллографе, представляет собой клотоиду (см. правую часть на рис. 5.9). Спираль начинается из начала координат и закручивается вокруг точки с координатами $(0,62; 0,62)$.

5.6. Моделирование кривых

Необходимость воспроизведения плоских и пространственных кривых возникает при решении многих инженерных задач – изучении фазовых портретов динамических систем, автоматической обработке деталей сложных профилей на фрезерных станках, в системах машинной графики и САПР, при расчете и моделировании траекторий движущихся элементов механических и робототехнических систем и в ряде других случаев.

5.6.1. Способы задания кривых

В примерах 8, 9, 10 речь шла о моделировании плоских кривых. Остановимся на этой задаче подробнее.

Таблица 5.1

Способы задания плоских кривых

Координаты	Уравнения			
	явные	неявные	параметрические	дифференциальные
Декартовы x, y	$y = f(x)$	$F(x, y) = 0$	$x = f_1(t), y = f_2(t)$	$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0,$ $\ddot{y} + b_1\dot{y} + b_0y = 0$
Полярные ρ, φ	$\rho = f(\theta)$	$F(\theta, \rho) = 0$	$\theta = f_1(t), \rho = f_2(t)$	$\ddot{\theta} + a_1\dot{\theta} + a_0\theta = 0,$ $\ddot{\rho} + b_1\dot{\rho} + b_0\rho = 0$
Натуральные s, k	$k = f(s)$	$F(s, k) = 0$	$s = f_1(t), k = f_2(t)$	$\ddot{s} + a_1\dot{s} + a_0s = 0,$ $\ddot{k} + b_1\dot{k} + b_0k = 0$

Плоские кривые могут задаваться аналитически, графически или таблично. Основные аналитические способы задания плоских кривых (табл. 5.1) различаются используемой системой

координат (декартовы, полярные, натуральные), а также видом уравнений, связывающих эти координаты (явные, неявные, параметрические, дифференциальные).

Выбор того или иного способа задания зависит от конкретной кривой и имеющихся компьютерных средств. Например, для задания клотоиды удобнее использовать натуральное уравнение $k = as$, для реализации глиссады в бортовом вычислителе самолета – определяющее дифференциальное уравнение и т. д.

Рассмотрим основные варианты описания плоских кривых.

Уравнение кривой в декартовых координатах. Если на плоскости введена декартова система координат x, y , то кривая может быть задана в явной $y = f(x)$ или в неявной форме $F(x, y) = 0$.

Если $F(x, y)$ – многочлен степени n относительно x, y , то говорят об алгебраической кривой порядка n . Например, окружность представляет собой алгебраическую кривую второго порядка, так как ее уравнение в декартовых координатах имеет вид многочлена второй степени $x^2 + y^2 = R^2$.

Кривые, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*. Примером такой кривой является логарифмическая спираль, описываемая уравнением $\ln(x^2 + y^2) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Уравнение кривой в полярных координатах. Если положение точки на плоскости характеризовать полярным радиусом ρ (расстояние от полюса до рассматриваемой точки) и полярным углом φ , откладываемым от горизонтальной оси до радиуса, то уравнение $\rho = f(\varphi)$ будет задавать кривую в полярной системе координат.

Переход от декартова уравнения кривой $y = f(x)$ к полярному $\rho = f(\varphi)$ осуществляется путем замены координат по формулам $y = \rho \sin \varphi, \quad x = \rho \cos \varphi$.

В частности, приведенные выше уравнения окружности и логарифмической спирали в полярных координатах будут иметь вид

$$\rho = R, \quad \rho = e^{\varphi/2}.$$

Соответственно, при выполнении обратного перехода используют формулы

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Параметрическое задание кривой. Если обе координаты, например декартовы, заданы в виде функций некоторой третьей переменной t

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (5.7)$$

то такое описание называется *параметрическим*. Если t – время, то формулы (5.7) определяют закон движения точки на плоскости и соответствующая линия называется *траекторией*. Отметим, что одна и та же линия может получиться при различных уравнениях (5.7), так как законы движения по одной и той же траектории могут быть различны.

Чтобы от параметрического задания перейти к явному уравнению в декартовых координатах, надо из уравнений (5.7) исключить параметр t , выразив его, например, из первого уравнения $t = \varphi^{-1}(x)$ и подставив во второе: $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ или $y = f(x)$.

В качестве примера параметрического задания можно привести параметрическое описание окружности

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t,$$

а также параметрическое представление логарифмической спирали

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t.$$

В последнем случае для перехода к декартовым координатам удобно рассмотреть выражения $x^2 + y^2$, а также $\frac{y}{x}$, что приводит к уравнению $\ln(x^2 + y^2) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Натуральное уравнение кривой. С геометрической точки зрения кривую удобно задавать уравнением, связывающим кривизну кривой k в каждой точке с ее длиной s до этой точки (отсчет длины ведется от некоторой фиксированной точки на кривой). Получающееся уравнение $k = \varphi(s)$ не зависит от выбора системы координат и поэтому называется *натуральным уравнением кривой*.

Например, известно, что кривизна окружности постоянна и обратно пропорциональна ее радиусу. Следовательно, натуральное уравнение окружности имеет вид $k = 1/R$.

Натуральное уравнение логарифмической спирали имеет вид $k = 1/s$.

Таковы основные способы задания плоских кривых. Для пространственных кривых часто используется описание в прямоугольных декартовых координатах. В этом случае кривая мо-

жет быть задана как линия пересечения двух поверхностей, т. е. как совокупность точек, координаты которых отвечают системе уравнений

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

Широко применяется также параметрический способ задания пространственных кривых

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (5.8)$$

В этом случае кривая получается как траектория движущейся точки. Так, параметрические уравнения прямой в пространстве имеют вид

$$x = a_1 + b_1t, \quad y = a_2 + b_2t, \quad z = a_3 + b_3t.$$

Пространственную кривую можно задавать также в сферических координатах. Этот способ является пространственным аналогом полярных координат. Точка характеризуется здесь радиусом ρ и двумя углами φ и θ . Например, местоположение точки на поверхности Земли определяется долготой и широтой.

Во всех программных математических пакетах имеются средства для построения графиков кривых. Как правило, они ориентированы на явное задание кривой в декартовой или полярной системах координат, либо на параметрическое представление.

В частности, в пакете MATLAB для этих целей служат команды **plot**, **plotyy**, **plot3**; в пакете MAPLE – команды **plot**, **smartplot**. Неявное задание кривых поддерживается только в наиболее мощных математических системах: в пакете MATLAB для этого предназначены команды **ezplot** и **ezplot3**, в пакете MAPLE – команда **implicitplot**.

В ряде случаев, например в специализированных вычислительных устройствах (бортовые компьютеры, станки с программным управлением), кривые удобно задавать определяющими дифференциальными уравнениями, подобно тому, как это было сделано в предыдущем разделе для спирали Архимеда и клотоиды. Ниже описывается применение этого подхода для наиболее известных плоских и пространственных кривых.

5.6.2. Моделирование плоских кривых

Алгебраические кривые второго порядка. Самыми простыми плоскими кривыми являются алгебраические кривые первого порядка, т. е. прямые $y = ax + b$. Далее идут алгебраические кривые второго порядка: эллипс, гипербола и парабола. Их ка-

нонические уравнения в декартовых координатах имеют вид соответственно

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = px^2. \quad (5.9)$$

Эти кривые встречаются и используются во многих областях науки и техники: в геометрии (как сечения цилиндров и конусов), оптике (при построении отражательных поверхностей), в баллистике (параболы безопасности), в метрологии (эллипсы погрешностей), в теории управления (эллипсы управляемости и наблюдаемости).

При решении прикладных задач возникает необходимость отображения кривых на экране дисплея. Для решения этой проблемы воспользуемся динамическим способом, в основе которого лежит получение определяющих дифференциальных уравнений и построение соответствующих схем моделирования.

Чтобы применить его для кривых (5.9), перейдем к их параметрическому представлению

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = a \cosh t, \\ y = b \sinh t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = t, \\ y = pt^2. \end{cases} \quad (5.10)$$

Получение определяющих дифференциальных уравнений в данном случае не представляет труда. Соответствующие схемы моделирования приведены на рис. 5.12.

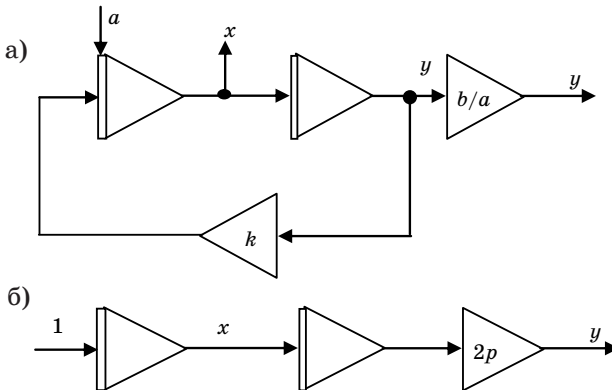


Рис. 5.12. Получение канонических кривых второго порядка: эллипса (а) и параболы (б)

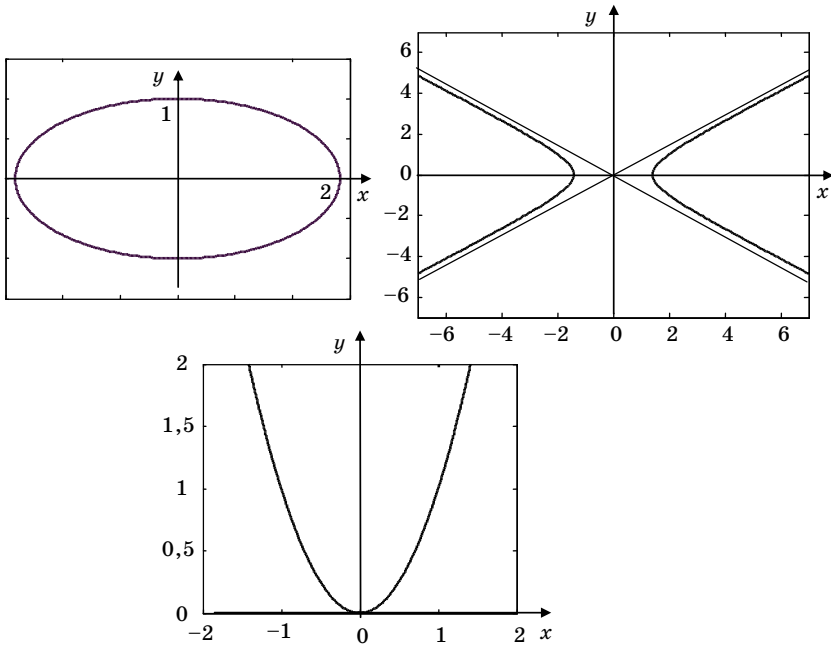


Рис. 5.13. Кривые второго порядка

Первая из схем (рис. 5.12, а) при $k = -1$ обеспечивает получение эллипса, а при $k = 1$ – гиперболы. Вторая схема (рис. 5.12, б) служит для получения параболы. Графики этих кривых для случая $a = 2, b = p = 1$ приведены на рис. 5.13.

Все они ориентированы по координатным осям, что связано с каноническим видом уравнений (5.9). В общем случае ориентация и положение кривых на плоскости могут быть произвольными, при этом уравнения (5.9) усложняются и принимают вид

$$ax^2 + 2xy + cy^2 + 2dx + 2ey = 1. \quad (5.11)$$

Соответственно возникает вопрос о том, как в этом случае получить определяющие дифференциальные уравнения.

Один из методов заключается в следующем. Про дифференцируем обе части уравнения (5.11) по времени и приведем подобные члены:

$$(ax + by + d)\dot{x} + (bx + cy + e)\dot{y} = 0.$$

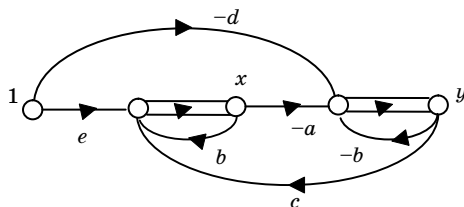


Рис. 5.14. Получение произвольных кривых второго порядка

Это равенство будет выполнено, если положить

$$\dot{x} = bx + cy + e, \quad \dot{y} = -(ax + by + d). \quad (5.12)$$

Это и есть один из вариантов искомым определяющих дифференциальных уравнений.

Другие варианты можно получить, домножая правые части уравнений (5.12) на произвольный множитель. Уравнениям (5.12) отвечает схема моделирования, сигнальный граф которой приведен на рис. 5.14.

Пример 11. Пусть требуется получить изображение кривой, заданной уравнением

$$x^2 + xy + y^2 = 1.$$

После дифференцирования и перекрестного приравнивания сомножителей получаем определяющие дифференциальные уравнения

$$\dot{x} = x + 2y, \quad \dot{y} = -x - 2y.$$

Корни характеристического уравнения этой системы лежат в правой полуплоскости $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$, т. е. схема моделирования будет неустойчивой. Чтобы получить устойчивую схему, умножим правые части уравнений на -1 :

$$\dot{x} = -x - 2y, \quad \dot{y} = x + 2y.$$

Теперь корни лежат в левой полуплоскости и система устойчива. Сигнальный граф схемы моделирования приведен на рис. 5.15, а, получаемая кривая показана на рис. 5.15, б.

Циклоиды. Примером кривых более высокого порядка служат циклоидальные кривые. Так называются кривые, описываемые точкой круга, катящегося без скольжения по прямой или по неподвижной окружности (в переводе с латинского «циклоида» означает «родственная кругу»).

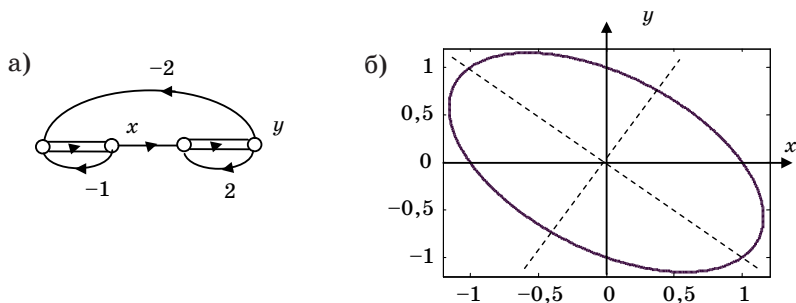


Рис. 5.15. Моделирование эллипса (пример 11)

Существует много разновидностей циклоидальных кривых, которые могут быть как алгебраическими, так и трансцендентными. В зависимости от положения образующей точки на катящемся круге (она может находиться на его ободе, а также внутри или вне его), от вида направляющей (прямая или окружность), от положения катящегося круга (качение по внутренней или внешней стороне окружности) различают удлиненные и укороченные циклоиды, эпициклоиды и гипоциклоиды.

Так, точка круглого обруча радиуса a , который катится по прямой, описывает обычную циклоиду (рис. 5.16, а).

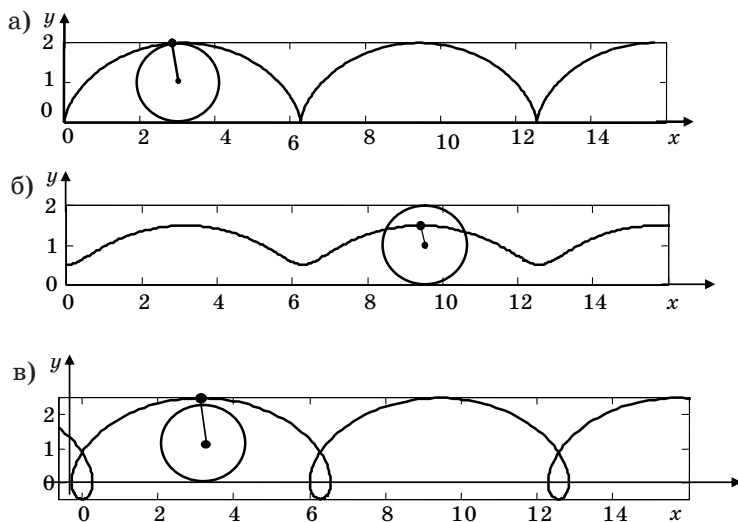


Рис. 5.16. Обычная (а), укороченная (б) и удлиненная (в) циклоиды

Ее уравнения в параметрической форме имеют вид

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Если точка катящегося круга лежит внутри его (например, точка на спице велосипедного колеса), то ее траектория называется укороченной циклоидой (рис. 5.16, б), если вне его (например, точка на наружном ободе трамвайного колеса), то ее траектория называется удлинённой циклоидой (рис. 5.16, в). Описание этих кривых в параметрической форме имеет вид

$$x = a(t - \lambda \sin t), \quad y = a(1 - \lambda \cos t),$$

причем при $\lambda < 1$ получаем укороченную циклоиду, при $\lambda = 1$ – обычную, а при $\lambda > 1$ – удлинённую.

Все три кривые могут быть получены с помощью схемы, показанной на рис. 5.17.

Нижняя часть схемы представляет собой генератор гармонических колебаний, интегратор в верхней части служит для формирования линейной функции at .

Эпициклоиды. Если один круг радиуса a катится снаружи по другому кругу радиуса A , то кривая, образованная фиксированной точкой катящегося круга, называется эпициклоидой (от лат. еpi – внешний, наружный).

Уравнения эпициклоиды в параметрической форме имеют вид

$$\begin{aligned} x &= a(m+1)\cos t - a\cos(m+1)t, \\ y &= a(m+1)\sin t - a\sin(m+1)t, \end{aligned} \quad (5.13)$$

где $m = A/a$ – отношение радиусов кругов.

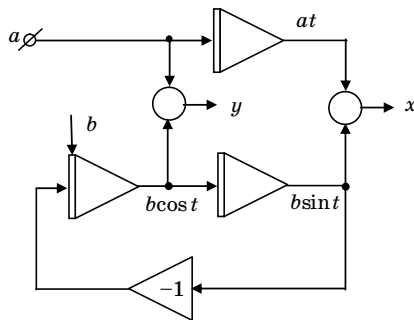


Рис. 5.17. Схема для получения циклоид ($b = -a\lambda$)

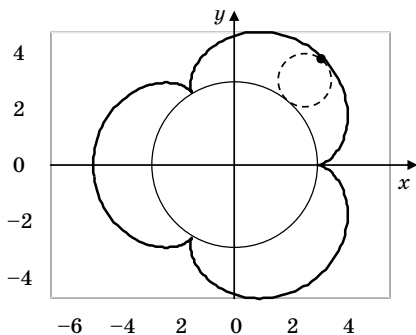


Рис. 5.18. Эпициклоида ($m=3$)

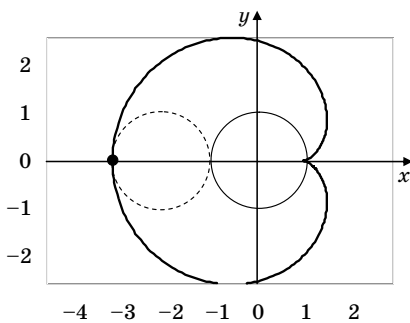


Рис. 5.19. Кардиоида ($m = 1$)

Если m – целое число, то эпициклоида состоит из m ветвей, которые обходят неподвижный круг. Пример эпициклоиды для случая $m = 3$ приведен на рис. 5.18.

При $m = 1$, когда радиусы кругов совпадают, получаем кардиоиду (от лат. *cardia* – сердце) (рис. 5.19).

Используя формулы для синуса и косинуса двойного угла, параметрическое описание кардиоиды можно привести к виду

$$x = a \cos t(1 + \cos t), \quad y = a \sin t(1 + \cos t).$$

Исключая из этих уравнений параметр t , получаем уравнение кардиоиды в декартовых координатах

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) = a^2y^2.$$

То же уравнение в полярных координатах имеет вид $\rho = a(a + \cos \varphi)$.

Моделирование кардиоиды методом списков было рассмотрено выше (см. пример 9).

Другим представителем эпициклоид является нефроида (от лат. *perhros* – почка). Она получается, если взять диаметр наружного круга в два раза меньше диаметра внутреннего круга, т. е. $m = 2$ (рис. 5.20).

Параметрические уравнения нефроиды получаем из уравнений (5.13) при $a = 1$, $m = 2$:

$$x = 3 \cos t - \cos 3t, \quad y = 3 \sin t - \sin 3t.$$

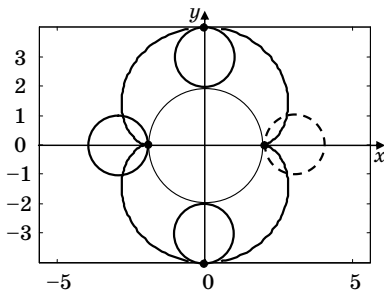


Рис. 5.20. Нефроида ($m=2$)

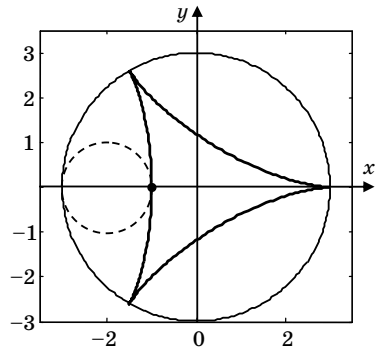


Рис. 5.21. Дельтоида

Гипоциклоиды. Кривая, образованная фиксированной точкой круга, катящегося по внутренней стороне неподвижной окружности, называется гипоциклоидой (от лат. *huro* – внизу, внутри).

Уравнения гипоциклоиды получаются из уравнений эпициклоиды (5.13) заменой $m + 1$ на $m - 1$

$$x = a(m-1)\cos t + a\cos(m-1)t,$$

$$y = a(m-1)\sin t - a\sin(m-1)t.$$

Если отношение радиусов m – целое число, то гипоциклоида имеет m ветвей, которые вписываются в неподвижный круг.

В частности, при $m = 3$ получаем правильный криволинейный треугольник, который называется дельтоидой, или кривой Штейнера (рис. 5.21)

$$x = 2a\cos t + a\cos 2t, \quad y = 2a\sin t - a\sin 2t.$$

В декартовой системе координат уравнение дельтоиды имеет вид

$$(x^2 + y^2)^2 + 8ax(3y^2 - x^2) + 18a^2(x^2 + y^2) - 27a^4 = 0.$$

При $m = 4$ получаем замкнутую кривую с четырьмя острями, называемую астроидой (от лат. *astra* – звезда) (рис. 5.22).

Параметрические уравнения астроиды можно преобразовать к простому виду

$$x = A\cos^3 t, \quad y = A\sin^3 t.$$

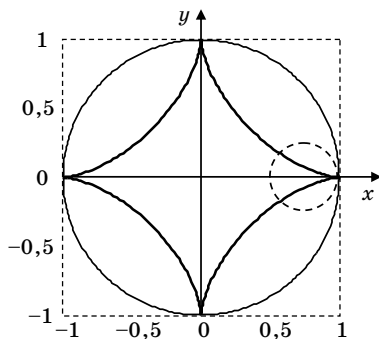


Рис. 5.22. Астроида

Исключая из них параметр t , получаем уравнение в декартовой системе координат

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{2}{3}}.$$

Все перечисленные кривые – кардиоида, нефроида, дельтоида, астроида – могут быть получены с помощью одной схемы моделирования, приведенной на рис. 5.23.

Верхняя и нижняя части схемы работают независимо и формируют гармонические колебания частоты единица и k .

Спирали. Спирали – это трансцендентные кривые, уравнения которых удобно записывать в полярных координатах. Из раз-

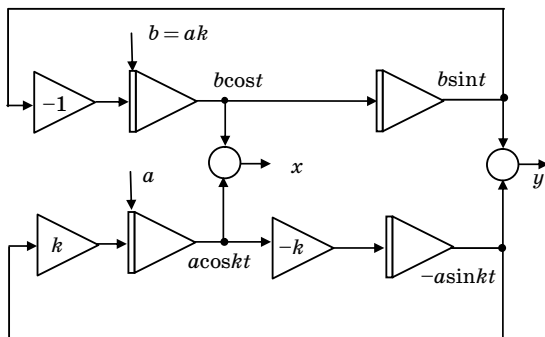


Рис. 5.23. Схема для получения эпициклоид ($k = m + 1$) и гипоциклоид ($k = m - 1$).

личных видов спиралей отметим спираль Архимеда, логарифмическую спираль и клотоиду (спираль Корню).

Спираль Архимеда можно определить как кривую, которая описывается точкой, движущейся с постоянной скоростью вдоль луча, вращающегося вокруг полюса с постоянной угловой скоростью. Она находит широкое применение в технике, начиная от снегоуборочных шнекороторов и кончая обычной мясорубкой. Полярное уравнение спирали Архимеда имеет вид: $\rho = k\varphi$, где k – коэффициент, равный смещению точки вдоль луча при повороте его на один радиан.

В параметрической форме уравнения спирали Архимеда имеют вид

$$y = kt \sin \omega t, \quad x = kt \cos \omega t.$$

Схема моделирования, полученная методом списков для $k=1$, $\omega=1$, была приведена ранее (см. пример 8 и рис. 5.5).

Логарифмическую спираль можно определить как кривую, которая пересекает все лучи, выходящие из начала координат под одним и тем же углом (рис. 5.24).

Уравнение кривой в полярных координатах $\rho = ae^{k\varphi}$. При $k=0$ кривая вырождается в окружность.

Логарифмическая спираль часто встречается в живой природе (раковины улитки, форма паутины), механике (фазовый портрет колебаний маятника с трением), астрономии (спиральная форма галактик). Известный математик XVII в. Якоб Бернулли, изучавший свойства логарифмической спирали, назвал ее *spira mirabilis* – чудесная спираль) и завещал, чтобы ее изобразили на его надгробье.

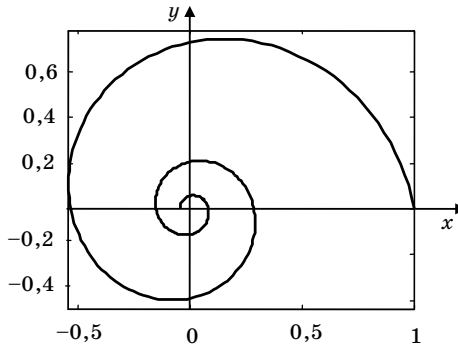


Рис. 5.24. Пример логарифмической спирали

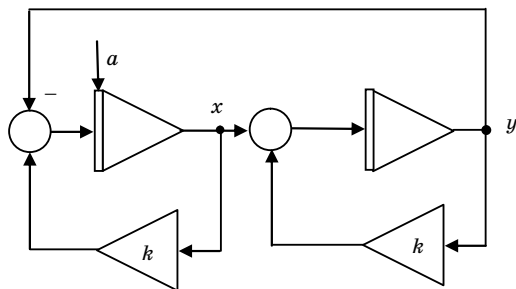


Рис. 5.25. Моделирование логарифмической спирали

Для динамического моделирования логарифмической спирали удобно использовать ее параметрическое представление

$$x = ae^{kt} \cos t, \quad y = ae^{kt} \sin t.$$

Соответствующие определяющие дифференциальные уравнения могут быть получены методом списков

$$\dot{x} = kx - y, \quad \dot{y} = x + ky.$$

Схема моделирования, построенная по этим уравнениям, содержит два интегратора (рис. 5.25).

В качестве более сложного примера можно назвать клотоиду – кривую, кривизна которой прямо пропорциональна ее длине. Эта кривая имеет две ветви, симметрично расположенные относительно начала координат (см. рис. 5.9). Вследствие непрерывного возрастания кривизны ветви закручиваются вокруг двух асимптотических точек с координатами $\pm(0,62; 0,62)$. Свое название клотоида получила по имени одной из богинь судьбы у древних греков (Лахезис пряла нить жизни, Клото проводила ее сквозь жизненные превратности, Атропа обрезала нить).

Натуральное уравнение клотоиды имеет простой вид: $k = as$. Уравнение клотоиды в других системах координат не выражается в элементарных функциях.

5.6.3. Моделирование пространственных кривых

При описании пространственных кривых будем использовать параметрическое представление (5.8)

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

Простые разновидности пространственных кривых получаются, если первые два из этих уравнений представляют собой па-

раметрическое описание классических плоских кривых, а движение по оси z имеет характер равномерного перемещения, т. е. $z = vt$.

Определяющие дифференциальные уравнения для этих функций удобно получать методом списков в форме (5.5). При этом вектор \mathbf{Y} будет иметь три компоненты, а матрица \mathbf{C} – три строки.

Пример 12. Рассмотрим пространственную спираль Архимеда, уравнения которой имеют вид

$$x = kt \sin \omega t, \quad y = kt \cos \omega t, \quad z = vt.$$

Определяющие дифференциальные уравнения для первых двух функций при $k=1$, $\omega=1$ были получены в примере 8. К ним следует добавить дифференциальное уравнение для функции z : $\dot{z} = v$.

Схема моделирования будет отличаться от схемы, приведенной на рис. 5.5, добавлением интегратора для получения z , на вход которого поступает константа v .

Наглядное изображение полученной кривой (рис. 5.26) можно увидеть с помощью одной из команд трехмерной графики (в пакете MATLAB это команда **plot3**).

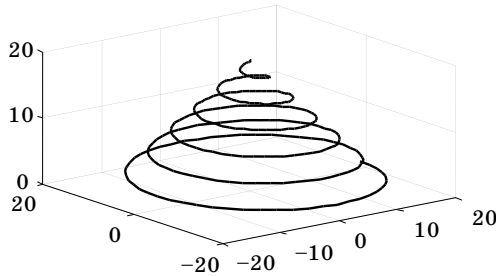


Рис. 5.26. Пространственная спираль Архимеда

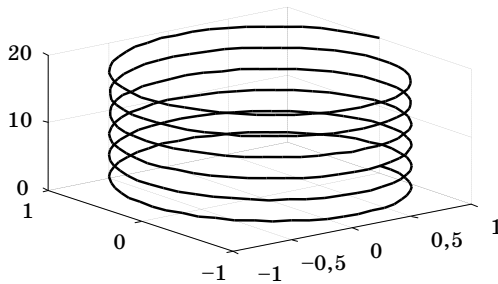


Рис. 5.27. Винтовая линия

Пример 13. Винтовой линией называется кривая, которая получается в результате наложения равномерного движения параллельно оси z и равномерного вращения вокруг этой оси. Ее параметрическое описание имеет вид $x = R \cos \omega t$, $y = R \sin \omega t$, $z = vt$.

Параметры R , ω , v характеризуют геометрические размеры винтовой линии – радиус порождающей окружности и величину шага (рис. 5.27). Заметим, что проекции винтовой линии на координатные плоскости дают окружность, синусоиду и косинусоиду.

В данном случае определяющие дифференциальные уравнения весьма просты:

$$\dot{x} = \omega y, \quad \dot{y} = -\omega x, \quad \dot{z} = v.$$

Схема моделирования приведена на рис. 5.28.

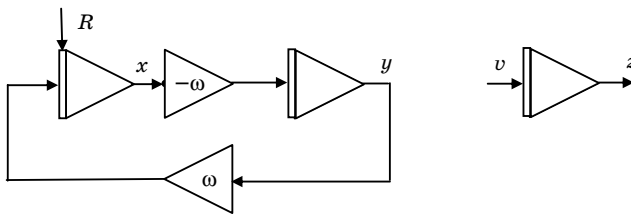


Рис. 5.28. Моделирование винтовой линии

Для наглядного изображения пространственной кривой на экране дисплея можно воспользоваться правилами аксонометрии. Они устанавливают соответствие между пространственными координатами x , y , z произвольной точки P трехмерного пространства и соответствующими координатами плоскости изображения X , Y (рис. 5.29).

В общем случае связь между координатами на плоскости и в пространстве описывается формулами линейного преобразования

$$Y = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z,$$

$$X = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z,$$

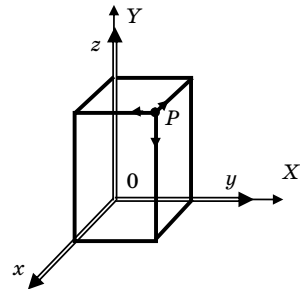


Рис. 5.29. Кабинетная аксонометрия

в котором коэффициенты a_{ij} зависят от взаимного расположения пространственной и плоской систем координат и величин линейных искажений в изображении.

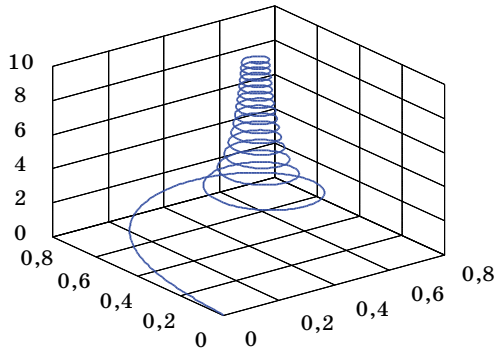


Рис. 5.30. Пространственная спираль Корню

Не при всяком выборе этих коэффициентов создается ощущение наглядности. В частности, при изображении параллелепипеда на рис. 5.29 использована так называемая *кабинетная аксонометрия*, которая описывается формулами

$$Y = y + a_{13}z, \quad X = x + a_{23}z.$$

При наблюдении на экране дисплея пространственной кривой, полученной путем моделирования, удобно взять $a_{13} = a_{23} = -0,5$. Тогда сигналы X и Y будут получаться с помощью двух сумматоров.

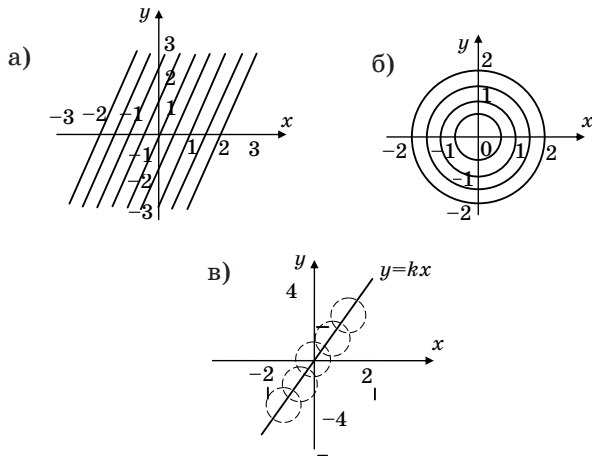
На рис. 5.30 приведено изображение пространственной спирали Корню. Ее проекциями на координатные плоскости (z, x) , (z, y) являются интегралы Френеля $C(t)$, $S(t)$, их графики приведены на рис. 5.11, а проекция на плоскость (x, y) представляет собой клотоиду.

Задачи и упражнения

1. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, решением которого являются: а) константа $x(t) = a$; б) линейная функция $x(t) = at + b$; в) парабола $x(t) = at^2$; г) косинусоида $x(t) = \cos t$, д) сумма экспонент $x(t) = ae^{\alpha t} + be^{\beta t}$.

2. Найти определяющие дифференциальные уравнения для системы функций $e^t, \sin t, \cos t$, используя: а) определитель Вронского; б) метод списков.

3. Составить дифференциальные уравнения семейств линий, приведенных на рисунке.



У к а з а н и е . Сначала для данного семейства линий находим алгебраическое уравнение $f(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$, зависящее от n произвольных параметров c_1, c_2, \dots, c_n . Затем решаем задачу отыскания определяющего дифференциального уравнения.

4. Используя декартовы, полярные и натуральные координаты, выписать уравнения единичной окружности и клотоиды.

5. Записать различными способами уравнения следующих кривых: а) прямой линии $y = kx$; б) полукубической параболы (параболы Нейля) $y = x^{3/2}$.

6. Получить определяющие дифференциальные уравнения и составить схемы моделирования для получения следующих кривых: а) эллипса $x^2 + 5y^2 = 1$; б) параболы $y = 2x^2$; в) гиперболы $xy = 2$; г) гиперболы $x^2 - y^2 = 1$; д) фигуры Лиссажу: $y = \cos 2\omega t, x = \cos 3\omega t$.

7. Найти определяющие дифференциальные уравнения в виде $\dot{X} = AX, Y = CX$ для функций: а) $x = e^{-2t}, y = ae^{-3t}$; б) $x = \text{cht} \cdot \text{sht}, y = e^t$; в) $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t$.

6. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ

Прежде чем приступить к моделированию системы, заданной своим математическим описанием или структурной схемой, необходимо выполнить анализ математической модели с целью исследования основных свойств модели, особенностей ее динамики, а также выяснения возможности упрощения (редукции) и преобразования к виду, более удобному для моделирования. Грамотно выполненный предварительный анализ может привести к значительной экономии машинного времени и вычислительных ресурсов, а также повысить точность моделирования.

К задачам анализа моделей относится определение:

- устойчивости и чувствительности;
- управляемости и наблюдаемости;
- минимальности и редуцируемости;
- стационарных режимов и переходных процессов.

Анализ целесообразно начинать с исследования качественных свойств – устойчивости, управляемости, наблюдаемости – и лишь затем переходить к изучению и расчету количественных свойств и характеристик. Завершается анализ расчетом тестовых режимов работы и оценкой вычислительной обусловленности модели.

6.1. Анализ устойчивости и чувствительности

Определение устойчивости. Устойчивость является важной характеристикой реальных процессов и систем. Система называется *устойчивой*, если она, будучи выведена из состояния равновесия, вновь возвращается в него. Простейшим примером устойчивой системы может служить маятник с трением, колеблющийся по затухающему закону. Другими примерами устойчивых систем могут служить шарик в ямке, пассивная электрическая цепь.

Переходная функция устойчивой системы с течением времени монотонно или колебательно стремится к некоторому постоянному значению. Для неустойчивой системы характерна обратная тенденция. Если ее вывести из состояния равновесия, то сама она в это состояние не возвращается.

Существует несколько определений устойчивости, в частности, различают устойчивость в малом и большом, устойчивость по Ляпунову, асимптотическую устойчивость и т. д. Примеры неустойчивых систем – перевернутый маятник, шарик на вер-

шине горы, карандаш, стоящий на острие. Во многих случаях не так легко ответить на вопрос, является ли система устойчивой.

С математической точки зрения удобнее говорить не об устойчивости самих систем, а об устойчивости соответствующих дифференциальных уравнений. Решение устойчивых дифференциальных уравнений со временем стремится к нулю. Так, уравнение, описывающее движение маятника

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0, \quad n > 0,$$

устойчиво, так как его решение

$$x = ce^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \varphi)$$

асимптотически стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Аналогичное уравнение карандаша, стоящего на острие $\ddot{x} - k^2x = 0$, неустойчиво, так как второе слагаемое в решении $x = c_1e^{-kt} + c_2e^{kt}$ неограниченно возрастает со временем.

Устойчивость линейной стационарной системы определяется свойствами ее характеристического полинома

$$A(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0.$$

Укажем способы получения этого полинома при матричном и структурном описаниях объекта. В первом случае требуется знать матрицу \mathbf{A} описания моделируемого объекта в пространстве состояний $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}u$. Характеристический полином определяют, вычисляя определитель $A(p) = |p\mathbf{E} - \mathbf{A}|$, где \mathbf{E} — единичная матрица.

Отметим, что коэффициенты a_{n-1} и a_0 характеристического полинома с точностью до знака совпадают со следом и определителем матрицы \mathbf{A} :

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{tr} \mathbf{A} = (-1)^{n-1} \sum_1^n a_{ii}; \quad a_0 = |-\mathbf{A}|.$$

При структурном описании объекта сначала по заданной схемной реализации моделируемой системы строят сигнальный граф. Затем находят его определитель Δ по формуле Мэсона (см. подразд. 4.5)

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{i,j}^* L_i L_j - \sum_{i,j,k}^* L_i L_j L_k + \dots,$$

где L_i – коэффициент передачи i -го контура графа, равный произведению коэффициентов передачи всех входящих в него ветвей (звездочка означает, что соответствующее суммирование ведется только для несоприкасающихся контуров).

Искомый характеристический полином получают путем умножения определителя на p^n , где n – суммарный порядок динамических блоков в заданной схемной реализации $A(p) = p^n \Delta$.

После того как характеристический полином найден, для анализа устойчивости может быть применен любой известный критерий – корневой, алгебраический или частотный.

Корневой критерий устойчивости. Сформулируем условия, при которых линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами является устойчивым. Как известно, решение такого уравнения содержит слагаемые вида $c_i e^{p_i t}$, где p_i – корни характеристического полинома. Отсюда ясно, что, если хотя бы один корень p_i положителен или имеет положительную вещественную часть, то в решении будет член, неограниченно возрастающий со временем, и оно будет неустойчивым.

Если изобразить корни характеристического полинома на комплексной плоскости, то условие устойчивости линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами можно сформулировать следующим образом.

Дифференциальное уравнение устойчиво тогда и только тогда, когда все корни его характеристического полинома лежат в левой комплексной полуплоскости. Наличие корня на мнимой оси означает, что решение находится на границе устойчивости.

Например, математическая модель системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0,$$

устойчива, так как корни характеристического полинома $p^2 + 2p + 5 = 0$ имеют отрицательные вещественные части $p_{1,2} = -1 \pm 2i$, т. е. лежат слева от оси ординат.

Алгебраические критерии устойчивости. Алгебраические критерии устойчивости не требуют нахождения корней характеристического полинома, а позволяют судить об устойчивости на основе анализа коэффициентов этого полинома. Основной вклад в отыскание алгебраических критериев внесли Максвелл (1868 г.), Раус (1875 г.), Гурвиц (1895 г.).

Наибольшую известность получил критерий устойчивости Гурвица. Из него, в частности, следует, что все коэффициенты устойчивого дифференциального уравнения должны быть положительны. Для уравнений второго порядка это не только необходимое, но и достаточное условие.

Для уравнений порядка n критерий Гурвица формулируется следующим образом: система с характеристическим полиномом $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$, $a_n = 1$ будет устойчивой в том и только том случае, если все определители Гурвица положительны:

$$a_0 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} > 0, \dots$$

В частности, для дифференциальных уравнений третьего порядка

$$a_3 \ddot{x} + a_2 \dot{x} + a_1 x + a_0 x = 0,$$

раскрывая третий определитель, получаем, что помимо положительности коэффициентов, дополнительно требуется, чтобы произведение средних коэффициентов было больше произведения крайних: $a_1 a_2 > a_0 a_3$.

Например, уравнение $\ddot{x} + 2\dot{x} + 0,5x + 3x = 0$ неустойчиво, так как $2 \cdot 0,5 < 1 \cdot 3$.

Аналогичное условие для дифференциальных уравнений четвертого порядка имеет вид

$$a_1 a_2 a_3 > a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4.$$

Таким образом, критерий Гурвица заменяет вычисление корней более простой операцией вычисления определителей.

Пример 1. Проанализируем устойчивость системы, заданной описанием в пространстве состояний:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

Собственные числа матрицы A этой системы вещественны: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$. Одно из них положительно, поэтому согласно корневому критерию система неустойчива.

К тому же результату приходим, рассматривая характеристический полином системы $A(p) = p^3 - 3p - 2$ и применяя критерий Гурвица.

Построение областей устойчивости. При исследовании моделей важно знать, в каких пределах можно изменять их параметры, сохраняя при этом устойчивость. Для этого разработаны специальные методы, среди которых исторически первым является метод диаграмм Вышнеградского. В случае систем третьего порядка этот метод позволяет, не решая дифференциального уравнения, судить о влиянии параметров системы на ее устойчивость.

Характеристическое уравнение третьего порядка содержит три коэффициента

$$p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Число коэффициентов можно сократить до двух, сделав замену переменной $p = \sqrt[3]{a_0} q$. В результате характеристическое уравнение принимает вид

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0, \quad A = \frac{a_2}{a_0} (\sqrt[3]{a_0})^2, \quad B = \frac{a_1}{a_0} \sqrt[3]{a_0}.$$

Теперь характеристическое уравнение содержит всего два обобщенных параметра: A и B , в плоскости которых строятся области устойчивой и неустойчивой работы системы.

В соответствии с критерием Гурвица запишем условие устойчивости: $AB > 1$. Граница области устойчивости определяется по уравнению $AB = 1$. В плоскости параметров A , B граница области устойчивости представляет собой гиперболу, называемую гиперболой Вышнеградского (нижняя кривая на рис. 6.1). Область устойчивой работы находится над гиперболой.

Используя исходное уравнение, можно построить дополнительные границы, разделяющие область устойчивых состояний на подобласти с различным расположением корней характеристического уравнения. Чтобы оценить вид переходного процесса, необходимо отметить точку с соответствующими значениями параметров A и B на диаграмме Вышнеградского.

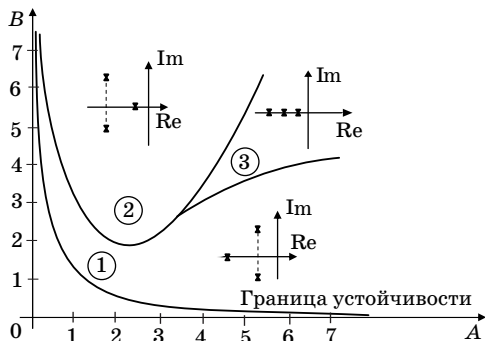


Рис. 6.1. Диаграмма Вышнеградского

Если точка соответствует области 1, где ближайшей к мнимой оси будет пара комплексно-сопряженных корней, то это – область колебательных процессов. Если она попала в область, где все корни вещественные (область 3), процесс будет иметь аperiodический характер. Область 2 характеризует монотонный характер переходного процесса без колебательности. В общей точке кривых все три корня исходного уравнения вещественны, отрицательны и кратны.

Методика построения областей устойчивости была распространена на системы любого порядка, в том числе и нелинейные. В соответствии с ней выбирают два определенных параметра системы a_1, a_2 и, варьируя их в процессе компьютерного эксперимента, фиксируют значения параметров, при которых схема переходит из устойчивого состояния в неустойчивое. В результате строится область устойчивости (рис. 6.2).

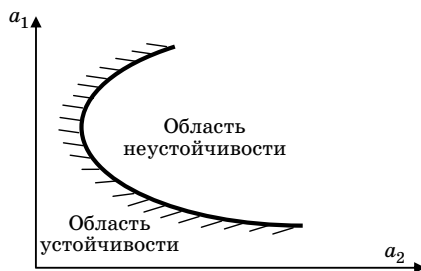


Рис. 6.2. Область устойчивости

Во многих случаях такой подход оказывается более эффективным, чем исследование устойчивости системы другими методами.

Пример 2. Рассмотрим систему третьего порядка с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{T^3 p^3 + AT^2 p^2 + BTp + 1}.$$

Ее устойчивость зависит от параметров T, A, B . Для исследования этой зависимости выпишем характеристическое уравнение

$$T^3 p^3 + AT^2 p^2 + BTp + 1 = 0.$$

Перейдем к нормированному характеристическому уравнению заменой $Tp = q$:

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0.$$

Мы видим, что A и B – параметры Вышнеградского, следовательно, области устойчивости системы определяются диаграммой, показанной на рис. 6.1.

Частотный критерий устойчивости. Частотные критерии носят графический характер. Они опираются на анализ графиков частотных характеристик – АЧХ, ФЧХ, АФХ (последняя известна также как диаграмма Найквиста). Часть из них позволяет делать заключение об устойчивости замкнутой системы управления по частотным характеристикам разомкнутой системы.

Приведем в качестве примера критерий Найквиста. Обозначим передаточную функцию разомкнутой системы $Q_0(p)$ и охватим ее единичной отрицательной обратной связью (рис. 6.3).

Пусть известно, что разомкнутая система устойчива. Тогда для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф Найквиста разомкнутой системы начинался на действительной оси комплексной плоскости и при изменении ча-

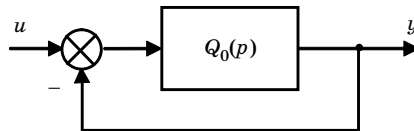


Рис. 6.3. Замкнутая система

стоты от нуля до бесконечности не охватывал точку с координатами $(-1, 0j)$ на комплексной плоскости.

В тулбоксе CONTROL пакета MATLAB диаграмма Найквиста строится командой `nyquist`, указанная точка помечается на ней красным крестиком.

Пример 3. Требуется выяснить, при каких значениях коэффициента обратной связи k будет устойчива модель, структурная схема которой изображена на рис. 6.4.

Найдем передаточную функцию этой системы:

$$Q(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{1}{(p+1)^3 - k}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $p^3 + 3p^2 + 3p + 1 - k = 0$. В соответствии с критерием Гурвица получаем два условия устойчивости:

$$1 - k > 0; \quad 9 > 1 - k.$$

Следовательно, система устойчива, если коэффициент k лежит в интервале: $-8 < k < 1$. Система теряет устойчивость как при положительной обратной связи, когда $k \geq 1$, так и при слишком сильной отрицательной обратной связи, когда $k \leq -8$.

На рис. 6.5 приведены диаграммы Найквиста разомкнутой системы с передаточной функцией $Q_0(p) = \frac{-k}{(p+1)^3}$ при $k = 1, 1$ (слева) и $k = -14$ (справа).

Для построения диаграмм использовались команды MATLAB:

```
s1 = zpk([], [-1 -1 -1], -1.1), s2 = zpk([], [-1 -1 -1], 14), nyquist(s1), figure, nyquist(s2)
```

Поскольку в обоих случаях точка $(-1, 0j)$ находится внутри кривой, согласно критерию Найквиста замкнутая система будет неустойчивой.

Упражнение 1. Докажите, что для любой одноконтурной системы вида, показанного на рис. 6.3 или 6.4, существует крити-

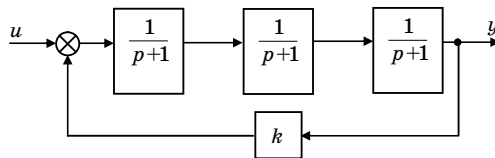


Рис. 6.4. Структурная схема для примера 3

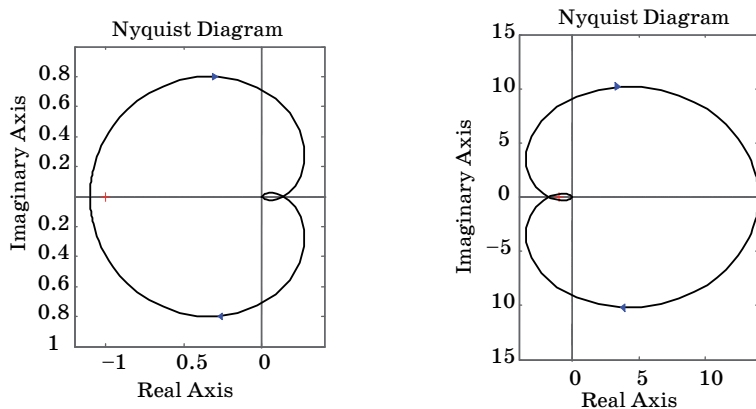


Рис. 6.5. Диаграммы Найквиста для примера 3

ческое значение коэффициента обратной связи k , при котором система теряет (приобретает) устойчивость.

Указание. Рассмотрите выражение для свободного члена характеристического полинома.

Перечисленные критерии ориентированы на линейные системы. Анализ устойчивости нелинейных систем гораздо сложнее. Здесь обычно применяют методику построения областей устойчивости, либо первый и второй методы Ляпунова. Универсальным методом исследования устойчивости дифференциальных уравнений является компьютерное моделирование.

Анализ чувствительности. Более полную информацию о системе можно получить, исследуя не только ее устойчивость, но и чувствительность к вариации параметров. Чувствительностью выходного сигнала $y(t)$ системы к изменению параметра a_i называется частная производная

$$u_i(t) = \frac{\partial y(t)}{\partial a_i} \approx \Delta y(t) / \Delta a_i.$$

Простейший способ определения чувствительности состоит в изменении на модели параметра a_i и определении изменения выхода системы $\Delta y(t)$. Недостатком этого способа является низкая точность результата, так как работа модели происходит в режиме малых отклонений.

Точность получения коэффициентов чувствительности $u_i(t)$ можно существенно повысить, если использовать две одинаково-

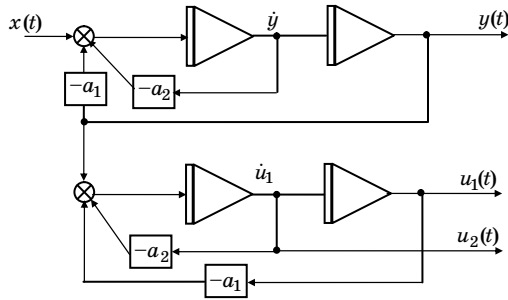


Рис. 6.6. Схема исследования чувствительности

вые модели исследуемой системы. Соответствующую методику поясним на примере системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_1 y = x(t). \quad (6.1)$$

Обозначим коэффициенты чувствительности к параметрам a_1 , a_2 через $u_1 = \frac{\partial y}{\partial a_1}$ и $u_2 = \frac{\partial y}{\partial a_2}$. Дифференцируя уравнение (6.1) по a_1 и a_2 , получим два уравнения для их определения:

$$\ddot{u}_1 + a_2 \dot{u}_1 + a_1 u_1 = -y, \quad (6.2)$$

$$\ddot{u}_2 + a_2 \dot{u}_2 + a_1 u_2 = -\dot{y}. \quad (6.3)$$

Схемы для моделирования этих уравнений отличаются от схемы моделирования исходного уравнения только входными воздействиями. На рис. 6.6 показана схема исследования чувствительности.

Ее верхняя часть служит для получения $y(t)$, а нижняя часть, называемая моделью чувствительности, позволяет определить коэффициент $u_1(t)$ прямо по уравнению (6.2). Второй коэффициент $u_2(t)$ можно найти, воспользовавшись соотношением $u_2(t) = \dot{u}_1(t)$, которое следует из сопоставления уравнений (6.2) и (6.3). Таким образом, значение $u_2(t)$ появляется на выходе интегратора, вырабатывающего $\dot{u}_1(t)$. Этот результат не случаен. В теории чувствительности доказано, что с помощью одной модели чувствительности можно получить все коэффициенты $u_i(t) = \partial y / \partial a_i$ линейной стационарной системы любого порядка.

Полученные на модели коэффициенты чувствительности u_i используются для анализа погрешностей системы, синтеза систем минимальной чувствительности, а также для решения задач параметрической оптимизации. В последнем случае принимается во внимание тот факт, что коэффициенты u_1, u_2, \dots, u_n образуют вектор градиента функции $y(t)$ в пространстве параметров a_1, a_2, \dots, a_n .

6.2. Анализ управляемости

Управляемость, так же как и устойчивость, относится к числу основных характеристик динамических систем и их моделей. Если устойчивость характеризует свойство системы возвращаться после возмущения в положение равновесия, то управляемость отражает возможность произвольного изменения состояния системы с помощью входных сигналов. Более точное определение сводится к следующему.

Имеется линейная динамическая система S (рис. 6.7), заданная описанием в пространстве состояний:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}u; \quad y = \mathbf{c}\mathbf{X}; \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0. \quad (6.4)$$

Требуется выяснить, существует ли управление $u(t)$, обеспечивающее перевод системы S из произвольного начального состояния $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ в произвольное конечное (финальное) состояние $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}_f$.

Это поясняется рис. 6.8, на котором условно изображена траектория движения системы в пространстве состояний. Для линейных систем в качестве конечного состояния без потери общности можно рассматривать начало координат $\mathbf{X}_f = 0$. Выбор

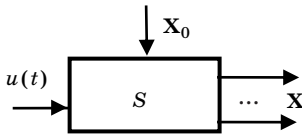


Рис. 6.7. Линейная система

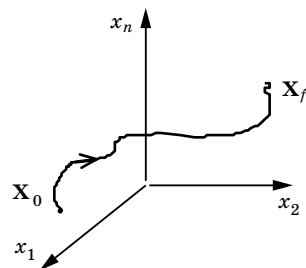


Рис. 6.8. Траектория в пространстве состояний

интервала управления T принципиального значения не имеет, и теоретически он может быть взят сколь угодно малым.

Определение. Система (6.4) называется *управляемой*, если для любого начального состояния $\mathbf{X}(0) \in R^n$ существует управление $u(t)$, переводящее ее за конечное время T в нулевое состояние $\mathbf{X}(T) = 0$. В противном случае система называется *неуправляемой*.

Возможна и другая (равносильная) формулировка, согласно которой система управляема, если существуют управляющие сигналы $u(t)$, позволяющие перевести ее за конечное время T из начального состояния $\mathbf{X}(0) = 0$ в любое заданное состояние $\mathbf{X}(T) \in R^n$.

Простые примеры неуправляемых систем приведены на рис. 6.9. Очевидная причина неуправляемости структуры (см. рис. 6.9, а) в том, что входной сигнал не воздействует на подсистему S_2 . Неуправляемость структуры, содержащей две одинаковые подсистемы (см. рис. 6.9, б), следует из равенства $\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{X}_2(t)$, выполняющегося при любых t (если начальные условия подсистем были равны).

Если размерность одной подсистемы равна m , то общая размерность будет $2m$, однако движение системы будет происходить в m -мерном подпространстве.

Пример 4. На рис. 6.10 приведена электрическая схема, содержащая конденсаторы, резисторы и генератор управляющего напряжения $u(t)$. Требуется проанализировать управляемость этой схемы, т. е. возможность зарядить с помощью генерато-

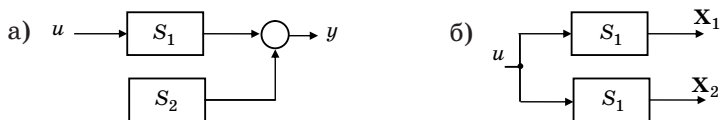


Рис. 6.9. Неуправляемые структуры

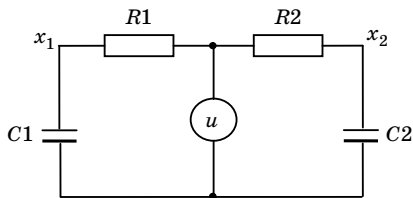


Рис. 6.10. Электрическая схема

ра $u(t)$ конденсаторы $C1, C2$ до любых заданных напряжений $x_1(T), x_2(T)$. Внутреннее сопротивление генератора считать нулевым.

Решение. Используя закон Ома, можно найти передаточные функции от входа u до точек x_1, x_2 :

$$x_1(p) = \frac{1}{T_1 p + 1} u(p), \quad x_2(p) = \frac{1}{T_2 p + 1} u(p),$$

где $T_1 = R_1 C_1, T_2 = R_2 C_2$.

Отсюда вытекает соотношение

$$x_2(p) = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1} x_1(p),$$

которое при $T_1 = T_2$ превращается в равенство $x_2 = x_1$. Это означает, что если постоянные времени одинаковы, то схема неуправляема.

Пример 5. Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы, модель которой показана на рис. 6.11 (гантель с невесомой ручкой на двух симметрично установленных упругих опорах, сила F приложена в центре инерции).

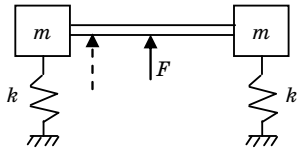


Рис. 6.11. Механическая система

Обозначим через x_1, x_2 вертикальные отклонения масс от положения равновесия. Малые колебания системы описываются уравнениями

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 = \frac{1}{2}F, \quad m\ddot{x}_2 + kx_2 = \frac{1}{2}F.$$

где m – масса; k – жесткость пружин.

Для анализа управляемости перейдем к изображениям по Лапласу:

$$x_1(p) = \frac{F(p)/2}{mp^2 + k}, \quad x_2(p) = \frac{F(p)/2}{mp^2 + k}.$$

Отсюда вытекает алгебраическое соотношение $x_2 = x_1$, описывающее уравнение прямой линии на плоскости (x_1, x_2) . Следовательно, система неуправляема.

Физический смысл неуправляемости связан с тем, что сила, приложенная в центре, не вызывает поворота гантели.

Упражнение 2. Проанализировать управляемость, если сила F будет приложена левее центра инерции (см. пунктирную стрелку на рис. 6.11).

В рассмотренных примерах (электрическом и механическом) мы имели дело с частными случаями неуправляемой структуры (см. рис. 6.9, б). Способ доказательства неуправляемости опирался на получение алгебраических соотношений, связывающих переменные состояния системы. Для сложных систем такой способ, как правило, неприемлем, поэтому возникает задача отыскания критериев, позволяющих судить об управляемости, анализируя матрицы системы (6.4).

В теории управления существует целый ряд таких критериев. Наибольшую известность получил алгебраический критерий Калмана. Он основан на анализе матрицы

$$\mathbf{R} = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]. \quad (6.5)$$

Матрица \mathbf{R} называется *матрицей управляемости*. Если у системы r входов, эта матрица имеет n строк и nr столбцов. В пакете MATLAB матрицу управляемости можно построить с помощью команды `ctrb`.

Для того чтобы система (6.4) была управляемой, необходимо и достаточно, чтобы матрица управляемости имела полный ранг: $\text{rank}\mathbf{R} = n$.

В случае систем с одним входом матрица \mathbf{R} становится квадратной, поэтому анализ ранга может быть заменен вычислением определителя. Для управляемости системы (6.4) определитель должен быть отличен от нуля $\det\mathbf{R} \neq 0$.

Таким образом, управляемость системы определяется свойствами пары матриц \mathbf{A} , \mathbf{b} .

Пример 6. На рис. 6.12 изображены два аperiodических звена с общим управлением. Для анализа управляемости перейдем к описанию в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 x_1 + k_1 u, \\ \dot{x}_2 &= -a_2 x_2 + k_2 u. \end{aligned}$$

Выпишем матрицы \mathbf{A} , \mathbf{b} и матрицу управляемости \mathbf{R} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} k_1 & -a_1 k_1 \\ k_2 & -a_2 k_2 \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы \mathbf{R}

$$\det \mathbf{R} = k_1 k_2 (a_1 - a_2)$$

обращается в нуль при $a_1 = a_2$. В этом случае система становится неуправляемой. Численные значения k_1 и k_2 роли не играют (лишь бы они не равнялись нулю).

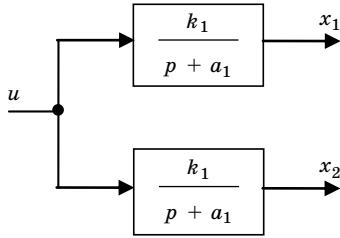


Рис. 6.12. Пример неуправляемой системы

Пример 7. Выполним анализ управляемости механической системы из примера 5 (рис. 6.11), полагая массы и жесткости пружин различными. В этом случае система описывается уравнениями

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 = b_1 F, \quad m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 = b_2 F, \quad b_1 + b_2 = 1,$$

где b_1 и b_2 – расстояния от масс до точки приложения силы F .

Обозначим через x_3 и x_4 скорости масс и перейдем к описанию в пространстве состояний

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= -\frac{k_1}{m_1} x_1 + \frac{b_1}{m_1} F, \\ \dot{x}_4 &= -\frac{k_2}{m_2} x_2 + \frac{b_2}{m_2} F, \end{aligned} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{b_1}{m_1} \\ \frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix}.$$

Временно обозначив $\alpha_1 = -\frac{k_1}{m_1}$, $\alpha_2 = -\frac{k_2}{m_2}$, $\beta_1 = \frac{b_1}{m_1}$, $\beta_2 = -\frac{b_2}{m_2}$, находим матрицу управляемости:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & 0 & \alpha_1 \beta_1 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \alpha_2 \beta_2 \\ \beta_1 & 0 & \alpha_1 \beta_1 & 0 \\ \beta_2 & 0 & \alpha_2 \beta_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычислим ее определитель, предварительно произведя перестановку столбцов:

$$\det \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 \beta_1 & 0 & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & \alpha_1 \beta_1 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \alpha_2 \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 \beta_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 \beta_2 \end{vmatrix}^2 = \beta_1 \beta_2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2.$$

Определитель обращается в нуль при $\alpha_1 = \alpha_2$, следовательно, условие управляемости имеет вид

$$\frac{k_1}{m_1} \neq \frac{k_2}{m_2}.$$

6.3. Управляемость системы перевернутых маятников

Рассмотрим систему из двух перевернутых маятников, шарнирно закрепленных на общем основании – легкой дощечке, которая может горизонтально перемещаться под воздействием управляющей силы u (рис. 6.13).

Требуется проанализировать управляемость этой системы, считая массу основания пренебрежимо малой. Тем самым будет получен ответ на вопрос: можно ли, обладая достаточной ловкостью, удержать в вертикальном положении две указки на ладони.

Решение. При малых углах отклонения α отдельно взятый маятник, в соответствии со вторым законом Ньютона, описывается уравнениями:

$$F = ma, \quad m l \ddot{\alpha} = mg\alpha + u, \quad \ddot{\alpha} = \frac{g}{l}\alpha + \frac{1}{ml}u.$$

Соответственно для пары маятников получаем:

$$\ddot{\alpha}_1 = a_1 \alpha_1 + b_1 u, \quad \ddot{\alpha}_2 = a_2 \alpha_2 + b_2 u,$$

где

$$a_i = \frac{g}{l_i}, \quad b_i = \frac{1}{m_i l_i}, \quad i = 1, 2.$$

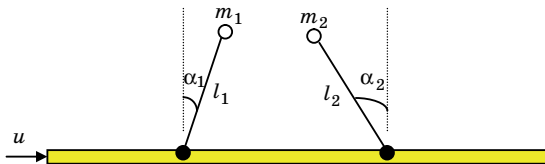


Рис. 6.13. Два перевернутых маятника

Введем вектор состояния $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^4$ и перейдем к матричной форме записи $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}u$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dot{\alpha}_1 \\ \alpha_2 \\ \dot{\alpha}_2 \end{bmatrix}; \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = a_1 x_1 + b_1 u, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = a_2 x_3 + b_2 u; \end{cases} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Найдем матрицу управляемости

$$\mathbf{R} = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \mathbf{A}^3\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & a_1 b_1 \\ b_1 & 0 & a_1 b_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & a_2 b_2 \\ b_2 & 0 & a_2 b_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычислим ее определитель, предварительно переставив строки и столбцы для приведения к блочно-диагональному виду

$$\det \mathbf{R} = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & a_1 b_1 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 b_2 \end{vmatrix}.$$

Определитель такой матрицы равен произведению определителей диагональных клеток

$$\det \mathbf{R} = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 b_1 \\ b_2 & a_2 b_2 \end{vmatrix}^2 = (a_2 - a_1)^2 b_1^2 b_2^2.$$

Вернемся к исходным обозначениям:

$$\det \mathbf{R} = \left(\frac{g}{m_1 l_1 m_2 l_2} \right)^2 \left(\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} \right)^2.$$

Видим, что если $l_1 = l_2$, то $\det \mathbf{R} = 0$, т. е. в этом случае система неуправляема. Если же $l_1 \neq l_2$, то $\det \mathbf{R} \neq 0$ и система управляема.

Как отмечалось, рассматриваемая задача соответствует попытке удержать на ладони в вертикальном положении две наклоненные в разные стороны указки. Это оказывается невоз-

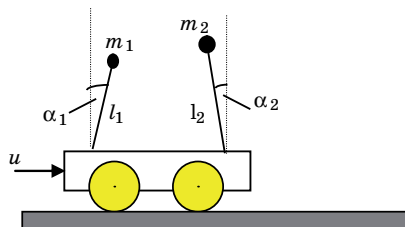


Рис. 6.14. Перевернутые маятники на тележке

можным, если указки одинаковы. Но если указки разной длины, задача их удержания на ладони в принципе разрешима!

Упражнение 3. Проанализировать управляемость пары обычных маятников. Показать, что ответ полностью аналогичен: система управляема, если маятники разной длины.

Упражнение 4. Проанализировать управляемость системы из n перевернутых маятников. Показать, что система управляема, если все маятники разной длины.

Рассмотрим усложненный вариант предыдущей задачи, когда необходимо учитывать массу основания. Пусть теперь речь идет об управлении массивной тележкой с двумя перевернутыми маятниками на платформе (рис. 6.14). Динамика объекта описывается системой линейных дифференциальных уравнений с матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_1 g / M & 0 & -m_2 g / M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 + m_1 / M)g / l_1 & 0 & m_2 g / l_1 M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m_1 g / l_2 M & 0 & (1 + m_2 / M)g / l_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 / M \\ 0 \\ -1 / l_1 M \\ 0 \\ -1 / l_2 M \end{pmatrix},$$

где M, m_1, m_2 – массы тележки и маятников; l_1, l_2 – длины маятников; g – ускорение свободного падения. Вектор состояния \mathbf{X} включает в себя шесть составляющих: положение и скорость тележки, угловые положения и угловые скорости каждого маятника.

Возможны две постановки задачи:

- стабилизация только маятников;
- стабилизация маятников и тележки.

Оказывается, в обоих случаях система управляема, т. е. стабилизация возможна, если маятники имеют разную длину.

Упражнение 5. Проанализировать управляемость и наблюдаемость этой системы для обоих вариантов постановки задачи. Заметим, что при первой постановке задачи уравнение тележки удастся исключить и понизить размерность задачи до четырех.

6.4. Анализ наблюдаемости

Наблюдаемость характеризует возможность определения состояния системы по наблюдениям за ее выходными сигналами. Рассмотрим линейную динамическую систему, заданную описанием в пространстве состояний (6.4) при $u(t) = 0$:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad y = \mathbf{c}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0. \quad (6.6)$$

Определение. Система называется *наблюдаемой*, если, измеряя выходной сигнал $y(t)$ в течение конечного времени T , можно однозначно определить ее начальное состояние $\mathbf{X}(0)$. Если хотя бы для одного $\mathbf{X}_0 \in R^n$ это сделать невозможно, система называется *ненаблюдаемой*.

Заметим, что в этом определении можно заменить начальное состояние $\mathbf{X}(0)$ на конечное состояние $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}_f$. Действительно, если состояние $\mathbf{X}(0)$ найдено, то состояние \mathbf{X}_f можно рассчитать по формуле $\mathbf{X}_f = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{X}_0$.

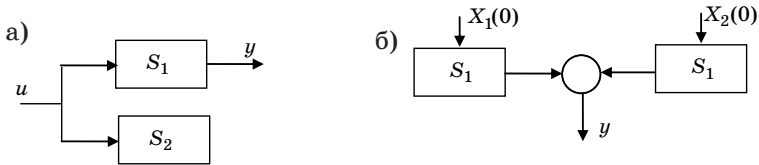


Рис. 6.15. Ненаблюдаемые структуры

Простые примеры ненаблюдаемых систем приведены на рис. 6.15, а, б.

В первом случае (рис. 6.15, а) часть переменных состояния не влияет на выходной сигнал. Во втором случае (рис. 6.15, б) мы имеем две одинаковые подсистемы, и невозможно отличить их вклад в выходной сигнал (наиболее показательна ситуация, когда начальные условия одной из подсистем равны нулю).

Прямой способ анализа наблюдаемости сводится к получению системы уравнений для определения неизвестных начальных условий и проверке ее разрешимости.

Пример 8. Схема моделирования, приведенная на рис. 6.16, содержит два интегратора, охваченных обратной связью, и сумматор для получения выходного сигнала $y = x_1 + x_2$.

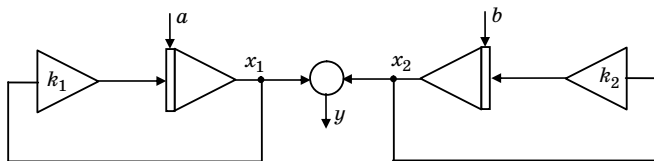


Рис. 6.16. Схема моделирования для примера 8

Для анализа наблюдаемости используем выражения для сигналов x_1 , x_2 , y :

$$x_1 = ae^{k_1 t}, \quad x_2 = be^{k_2 t}, \quad y(t) = ae^{k_1 t} + be^{k_2 t}.$$

Запишем последнее равенство для двух моментов времени, например для $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$:

$$a + b = y(0), \quad ae^{k_1} + be^{k_2} = y(1).$$

Мы получили систему двух уравнений с двумя неизвестными начальными условиями a и b :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{k_1} & e^{k_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \end{bmatrix}.$$

Она разрешима, если определитель системы не равен нулю $e^{k_2} - e^{k_1} \neq 0$. Следовательно, при $k_1 \neq k_2$ схема наблюдаема, а при $k_1 = k_2$ — нет.

Пример 9. Проанализируем наблюдаемость электрической схемы, приведенной на рис. 6.17, при следующих значениях па-

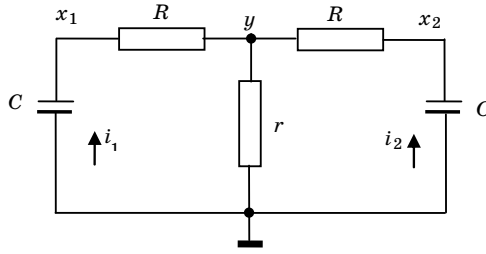


Рис. 6.17. Электрическая схема

параметров: $C = 1$, $r = 1$, $R = 2$. В качестве переменных состояния примем напряжения x_1 , x_2 на конденсаторах, измеряемый сигнал – напряжение в точке y .

Процессы в электрической цепи описываются уравнениями:

$$\begin{aligned} x_1 &= i_1 \cdot z_c, & x_2 &= i_2 \cdot z_c, & i_1 &= (x_1 - y) / R, \\ i_2 &= (x_2 - y) / R, & i_1 + i_2 &= y / r, & z_c &= 1 / pC. \end{aligned}$$

Подставляя сюда числовые значения параметров и выполняя элементарные преобразования, получаем:

$$2\dot{x}_1 = y - x_1, \quad 2\dot{x}_2 = y - x_2, \quad 4y = x_1 + x_2.$$

Сложим два первых уравнения с учетом третьего: $\dot{y} = -4y$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(t) = y_0 e^{-4t} = 0,25(x_{10} + x_{20})e^{-4t}.$$

Таким образом, измеряемый сигнал y зависит от суммы начальных условий, т. е. не будет меняться при перераспределении начальных условий (при сохранении их суммы). Отсюда следует невозможность однозначного восстановления начальных условий по наблюдению за сигналом $y(t)$, т. е. ненаблюдаемость схемы.

К этому результату можно было прийти более коротким путем, не прибегая к решению дифференциальных уравнений. Для доказательства ненаблюдаемости достаточно указать хотя бы одно сочетание начальных условий, которое невозможно восстановить. Простой пример получаем, взяв $x_{10} = -x_{20}$, тогда из схемы видно, что напряжение $y(t) = 0$ в любой момент времени. Такой выходной сигнал не несет никакой информации о процессах в схеме, следовательно, она является ненаблюдаемой.

Упражнение 6. Проанализируйте поведение схемы при равных начальных условиях $x_{10} = x_{20}$. Воспользуйтесь симметрией схемы и соедините эквипотенциальные точки x_1, x_2 (при этом резисторы R и конденсаторы C окажутся включенными параллельно).

Последний пример показывает, что для анализа наблюдаемости не обязательно исследовать динамику системы, а можно ограничиться алгебраическими выкладками. Наиболее известный алгебраический критерий основан на анализе *матрицы наблюдаемости* \mathbf{D} , которая имеет вид

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \dots \\ \mathbf{cA}^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Если у системы s выходов, эта матрица имеет ns строк и n столбцов. В пакете MATLAB матрицу наблюдаемости можно найти с помощью команды `obsv`.

Для того чтобы система (6.6) была наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы матрица наблюдаемости имела полный ранг: $\text{rank} \mathbf{D} = n$.

В случае систем с одним входом анализ ранга может быть заменен вычислением определителя (для наблюдаемости определитель должен быть отличен от нуля $\det \mathbf{D} \neq 0$).

Таким образом, наблюдаемость системы определяется свойствами пары матриц \mathbf{A}, \mathbf{c} .

Пример 10. Объект управления задан структурной схемой (рис. 6.18), где $Q_1(p) = 1/(p + a_1)$, $Q_2(p) = a_3/(p + a_2)$.

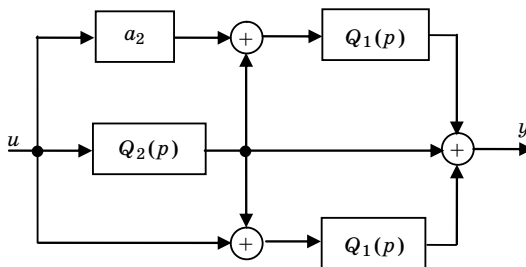


Рис. 6.18. Блок-схема для примера 10

Требуется проанализировать его управляемость и наблюдаемость.

Решение. Принимая выходные сигналы блоков за переменные состояния, перейдем к матричному описанию:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}u, \quad y = c\mathbf{X},$$

где $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^3$ – вектор состояний; u, y – входной и выходной сигналы.

Постоянные матрицы \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} имеют вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \quad 1 \quad 1].$$

Находим матрицы управляемости и наблюдаемости

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a_2 & -a_1a_2 + a_3 & a_1^2a_2 - a_1a_3 - a_2a_3 \\ a_3 & -a_2a_3 & a_2^2a_3 \\ 1 & a_3 - a_1 & a_1^2 - a_1a_3 - a_2a_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a_1 & 2 - a_2 & -a_1 \\ a_1^2 & -2a_1 - (2 - a_2)a_2 & a_1^2 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем определители: $\det(\mathbf{R}) = 0$, $\det(\mathbf{D}) = 0$. Следовательно, система неуправляема и ненаблюдаема при любых a_1, a_2, a_3 .

Пример 11. Проанализируем управляемость и наблюдаемость системы, структурная схема которой приведена на рис. 6.19, а.

Способ 1 (анализ передаточной функции). Пользуясь схемой, выпишем передаточную функцию

$$Q(p) = \left(\frac{-3}{p+1} + 1 \right) \frac{1}{p-2} = \frac{p-2}{p+1} \frac{1}{p-2} = \frac{1}{p+1}.$$

Произошло сокращение одинаковых множителей числителя и знаменателя. Это означает, что система либо неуправляема, либо ненаблюдаема, либо то и другое одновременно.

Найдем фазовую траекторию системы в плоскости сигналов x_1, x_2 . Для этого запишем операторные выражения для этих сигналов:

$$x_1(p) = \frac{1}{p+1}u(p), \quad x_2(p) = \frac{-3}{p+1}u(p).$$

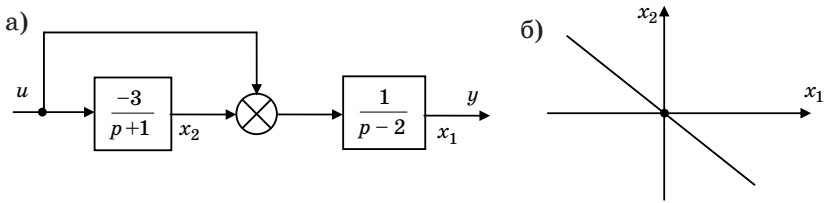


Рис. 6.19. Пример неуправляемой системы

Из них следует равенство: $3x_1 + x_2 = 0$.

Мы получили уравнение прямой линии. Если при $t = 0$ изображающая точка была в начале координат, то далее она сможет двигаться только по этой прямой (рис. 6.19, б). Следовательно, система неуправляема.

Для анализа наблюдаемости положим $u = 0$ и запишем равенства

$$y(p) = x_1(p); \quad y(p)(p-2) = x_2(p),$$

откуда

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \dot{y}(t) - 2y(t).$$

Эти формулы позволяют оценить значения переменных $x_1(t)$, $x_2(t)$ в любой момент времени, в том числе и при $t = 0$. Следовательно, система наблюдаема.

Способ 2 (анализ матриц управляемости и наблюдаемости). Перейдем от схемы (см. рис. 6.19, а) к описанию в пространстве состояний

$$(p-2)x_1 = x_2 + u,$$

$$(p+1)x_2 = -3u.$$

После несложных преобразований получаем

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + u,$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - 3u; \quad y = x_1.$$

Выписываем матрицы **A**, **b**, **c** и матрицы управляемости и наблюдаемости **R**, **D**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \quad 0], \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем определители матриц \mathbf{R} , \mathbf{D} : $|\mathbf{R}| = 0$; $|\mathbf{D}| = 1$.
Следовательно, система неуправляема, но наблюдаема.

6.5. Грамианы управляемости и наблюдаемости

Другой способ проверки управляемости и наблюдаемости системы (6.4) опирается на вычисление грамианов управляемости и наблюдаемости. Так называются симметричные квадратные матрицы \mathbf{W}_c и \mathbf{W}_o , определяемые равенствами

$$\mathbf{W}_c = \int_0^{\infty} \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}^T t} dt, \quad \mathbf{W}_o = \int_0^{\infty} \mathbf{e}^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{c}^T \mathbf{c} \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} dt. \quad (6.8)$$

В пакете MATLAB их можно найти с помощью команд типа `gram(sys, 'c')`, `gram(sys, 'o')`. Их первый входной аргумент – имя системы, второй – опция 'c' или 'o' (от *controllability* и *observability*).

Необходимым и достаточным условием управляемости и наблюдаемости служит невырожденность этих матриц: $\det \mathbf{W}_c \neq 0$, $\det \mathbf{W}_o \neq 0$.

Грамианы \mathbf{W}_c и \mathbf{W}_o удовлетворяют матричным уравнениям Ляпунова

$$\mathbf{W}_c \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{W}_c = -\mathbf{b} \mathbf{b}^T, \quad \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{W}_o = -\mathbf{c}^T \mathbf{c}.$$

Наряду с грамианами управляемости и наблюдаемости рассмотрим кросс-грамиан \mathbf{W}_{co} (определен только для скалярных систем)

$$\mathbf{W}_{co} = \int_0^{\infty} \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} \mathbf{c}^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} dt. \quad (6.9)$$

Кросс-грамиан, в отличие от грамианов управляемости и наблюдаемости, в общем случае не является симметричной матрицей, однако все его собственные числа вещественны.

Он удовлетворяет матричному уравнению Ляпунова $\mathbf{W}_{co} \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{W}_{co} = -\mathbf{b} \mathbf{c}$. Для решения уравнений Ляпунова в MATLAB существует команда `lyap`. Команда для вычисления кросс-грамиана \mathbf{W}_{co} будет иметь вид $\mathbf{W}_{co} = \text{lyap}(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{b} * \mathbf{c})$. Для

контроля вычисления грамианов \mathbf{W}_c , \mathbf{W}_o , \mathbf{W}_{co} удобно использовать связывающее их соотношение $\mathbf{W}_{co}^2 = \mathbf{W}_c \mathbf{W}_o$.

Кросс-грамиан отражает как свойства управляемости, так и свойства наблюдаемости системы. Из равенства $\mathbf{W}_{co}^2 = \mathbf{W}_c \mathbf{W}_o$ следует, что $\det \mathbf{W}_c \det \mathbf{W}_o = (\det \mathbf{W}_{co})^2$, т. е. вырожденность любого из грамианов \mathbf{W}_c или \mathbf{W}_o приводит к вырожденности \mathbf{W}_{co} . Поэтому наличие ненулевого определителя $\det \mathbf{W}_{co} \neq 0$ является критерием одновременной управляемости и наблюдаемости системы.

Пример 12. Исследуемая система, содержащая два параллельно включенных апериодических звена, задана сигнальным графом (рис. 6.20).

Чтобы найти ее грамианы управляемости и наблюдаемости, перейдем к описанию в пространстве состояний. Оно характеризуется матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \quad 1].$$

Для вычисления грамианов нам потребуются матрицы

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} \\ -3e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Подставляем их в формулы (6.8):

$$\mathbf{W}_c = 9 \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} e^{-2t} & -e^{-3t} \\ -e^{-3t} & e^{-4t} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -3 \\ -3 & \frac{9}{4} \end{bmatrix},$$

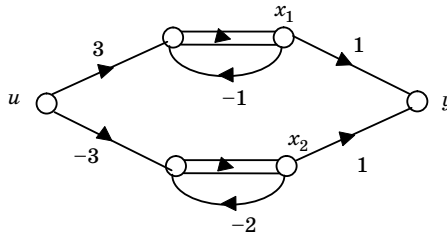


Рис. 6.20. Сигнальный граф для примера 12

$$\mathbf{W}_o = \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ e^{-3t} & e^{-4t} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Определители грамианов отличны от нуля, поэтому система управляема и наблюдаема.

Упражнение 7. Найти кросс-грамиан системы и прямой подстановкой проверить, что грамианы удовлетворяют трем уравнениям Ляпунова.

Все три грамиана, введенные выше, существуют только для устойчивых систем. При анализе неустойчивых систем возникает необходимость вычисления грамианов $\mathbf{W}_c(T)$, $\mathbf{W}_o(T)$, $\mathbf{W}_{co}(T)$ для конечного интервала времени T . Они определяются формулами вида (6.8), (6.9), в которых бесконечный верхний предел интегрирования заменен на конечный предел T . Это приводит к изменению уравнений Ляпунова, которые принимают вид

$$\mathbf{W}_c(T)\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{W}_c(T) = -\mathbf{B}\mathbf{B}^T + \mathbf{F}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{F}^T,$$

$$\mathbf{W}_o(T)\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{W}_o(T) = -\mathbf{C}^T\mathbf{C} + \mathbf{F}^T\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{F},$$

$$\mathbf{W}_{co}(T)\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{W}_{co}(T) = -\mathbf{b}\mathbf{c} + \mathbf{F}\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{F}; \quad \mathbf{F} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}T}.$$

Для решений этих уравнений может быть использован оператор MATLAB `lyap`. Поясним это на примере вычисления кросс-грамиана:

$$\mathbf{F} = \text{expm}(\mathbf{A} * T); \quad \mathbf{W}_{co} = \text{lyap}(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{b} * \mathbf{c} - \mathbf{F} * \mathbf{b} * \mathbf{c} * \mathbf{F}).$$

Если нужно вычислить значение грамианов устойчивой системы для серии различных интервалов времени T , то удобнее воспользоваться формулами

$$\mathbf{W}_c(T) = \mathbf{W}_c - \mathbf{F}\mathbf{W}_o\mathbf{F}^T, \quad \mathbf{W}_o(T) = \mathbf{W}_o - \mathbf{F}\mathbf{W}_{co}\mathbf{F},$$

$$\mathbf{W}_{co}(T) = \mathbf{W}_{co} - \mathbf{F}\mathbf{W}_{co}\mathbf{F},$$

связывающими значения грамианов на конечном и бесконечном интервалах времени.

Подведем итоги анализа управляемости и наблюдаемости.

Критерии управляемости. Для того чтобы система была управляемой, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

- матрица управляемости имеет полный ранг: $\text{rank} \mathbf{R} = n$,
- грамиан управляемости невырожден: $\det \mathbf{W}_c \neq 0$.

Критерии наблюдаемости. Для того чтобы система была наблюдаемой, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

- матрица наблюдаемости имеет полный ранг: $\text{rank} \mathbf{D} = n$,
- грамиан наблюдаемости невырожден: $\det \mathbf{W}_o \neq 0$.

6.6. Анализ минимальности линейных моделей

Одной и той же передаточной функции $Q(p)$ соответствует целый класс эквивалентных реализаций в пространстве состояний {ф-ла (6.4)}, характеризующихся различными тройками матриц (\mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c}) разных, вообще говоря, размеров. Реализация называется *минимальной*, если размер ее матрицы \mathbf{A} наименьший среди всех эквивалентных реализаций. Поиск такой реализации имеет практический смысл, так как ее моделирование на ЭВМ требует меньших вычислительных затрат.

Для анализа минимальности конкретной реализации нужно проверить ее управляемость и наблюдаемость. Для того чтобы реализация {ф-лы (6.4)} была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы она была управляемой и наблюдаемой одновременно. Этот результат – минимальность любой управляемой и наблюдаемой реализации – играет важную роль в теории линейных систем.

Поскольку невырожденность кросс-грамиана является критерием одновременной управляемости и наблюдаемости системы, то это может служить одним из условий минимальности реализации скалярной системы.

Критерии минимальности. Для того чтобы реализация системы была минимальной, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

- обе матрицы \mathbf{R} и \mathbf{D} имеют полный ранг: $\text{rank} \mathbf{R} = n$, $\text{rank} \mathbf{D} = n$;
- матрица \mathbf{DR} имеет полный ранг: $\text{rank}(\mathbf{DR}) = n$,
- оба грамиана \mathbf{W}_c и \mathbf{W}_o невырождены: $\det \mathbf{W}_o \neq 0$, $\det \mathbf{W}_c \neq 0$;
- матрица $\mathbf{W}_c \mathbf{W}_o$ невырождена: $\det(\mathbf{W}_c \mathbf{W}_o) \neq 0$;
- кросс-грамиан невырожден: $\det \mathbf{W}_{co} \neq 0$.

Таким образом, минимальность системы определяется свойствами тройки матриц \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . Напомним, что устойчивость системы определялась свойствами только одной матрицы \mathbf{A} , управляемость – свойствами пары матриц \mathbf{A} , \mathbf{b} , а наблюдаемость – свойствами пары матриц \mathbf{A} , \mathbf{c} .

На практике проще всего использовать первое из пяти перечисленных условий. В соответствии с ним анализ минимальности конкретной реализации сводится к проверке пары критериев $\text{rank}\mathbf{R} = n$, $\text{rank}\mathbf{D} = n$. Если хотя бы один из рангов меньше n , то реализация неминимальна. Размерность эквивалентной минимальной реализации n_0 определяется по формуле $n_0 = \text{rank}(\mathbf{DR})$.

Если в результате анализа оказалось, что система неминимальна, то ее порядок можно понизить. Это можно сделать, перейдя от описания в пространстве состояний к передаточной функции

$$Q(p) = \mathbf{c}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{B(p)}{A(p)}. \quad (6.10)$$

затем нужно выделить общий множитель в полиномах $A(p)$, $B(p)$ и сократить на него. Эта процедура известна как сокращение совпадающих нулей и полюсов системы. Предварительно следует выполнить разложение передаточной функции на простейшие сомножители (так называемое нуль-полюсное или *zpk*-представление):

$$Q(p) = k \frac{(p - z_1) \dots (p - z_m)}{(p - p_1) \dots (p - p_n)},$$

и выявить одинаковые сомножители в числителе и знаменателе. При этом уменьшение размерности системы будет равно числу пар совпадающих (или незначительно отличающихся) нулей и полюсов.

В пакете MATLAB для вычисления нулей и полюсов можно использовать функции **zero**, **pole**, **pzmap**, **zpk**. Аргументом во всех случаях служит исследуемая система **sys**, предварительно сформированная командами **ss** или **tf**.

Другой подход к построению минимальной реализации основан на выделении неуправляемой и ненаблюдаемой подсистем исходной системы и их удалении. При этом может использоваться преобразование линейной системы к одной из канонических форм. В частности, в библиотеке CONTROL пакета MATLAB име-

ются команды **ctrbf** (*controllability form*) и **obsvf** (*observability form*), обеспечивающие переход к управляемой и наблюдаемой сопровождающим каноническим формам.

Эти канонические формы положены в основу операции **minreal** (сокращение от *minimal realization*), осуществляющей удаление неуправляемой и ненаблюдаемой подсистем, что эквивалентно сокращению одинаковых полюсов и нулей системы. Результатом операции является описание модели пониженной размерности, причем полученная модель будет управляемой, наблюдаемой и минимальной.

Каноническая декомпозиция Калмана. Исчерпывающий ответ на вопрос о структуре системы и порядке ее минимальной реализации дает каноническая декомпозиция Калмана. В соответствии с ней любую систему можно разбить на четыре подсистемы: управляемую и наблюдаемую (6.4), неуправляемую наблюдаемую (6.5), управляемую ненаблюдаемую (6.6), неуправляемую и ненаблюдаемую (6.8).

Это иллюстрируется рис. 6.21, на котором показаны существенные связи между подсистемами (возможны также некоторые дополнительные связи, например с подсистемы 1 на подсистему 3 или с подсистемы 2 на подсистему 4).

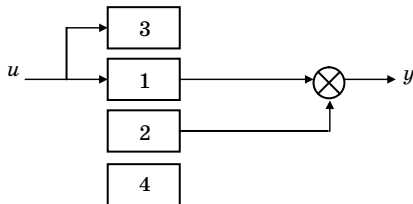


Рис. 6.21. Декомпозиция Калмана

Подсистемы 2, 3, 4 не вносят вклада в передаточную функцию системы и могут не учитываться при моделировании. Подсистема 1 представляет собой минимальную реализацию. Она является управляемой и наблюдаемой, а ее размерность совпадает с порядком передаточной функции системы.

Обозначим порядки (размерности) подсистем через n_0, n_1, n_2, n_3 соответственно. Для их вычисления надо выписать матрицы управляемости и наблюдаемости, а также их произведение $\mathbf{H} = \mathbf{D}\mathbf{R}$ и найти их ранги. Имеют место следующие простые соотношения: $\text{rank}\mathbf{R} = n_0 + n_1$, $\text{rank}\mathbf{D} = n_0 + n_2$, $\text{rank}\mathbf{H} = n_0$. Из них и

равенства $n = n_0 + n_1 + n_2 + n_3$ получаем формулы для порядков каждой из подсистем:

$$\begin{aligned} n_0 &= \text{rank} \mathbf{H}, \quad n_1 = \text{rank} \mathbf{R} - \text{rank} \mathbf{H}, \quad n_2 = \text{rank} \mathbf{D} - \text{rank} \mathbf{H}, \\ n_3 &= n + \text{rank} \mathbf{H} - \text{rank} \mathbf{R} - \text{rank} \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Пример 13. Проанализируем минимальность системы третьего порядка

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \ 0 \ 1] \mathbf{X}.$$

Решение. Выписываем матрицы управляемости и наблюдаемости:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Так как $|\mathbf{R}| = |\mathbf{D}| = 0$, то система неуправляема, ненаблюдаема и неминимальна.

Определим порядок минимальной реализации:

$$n_0 = \text{rank}(\mathbf{R}\mathbf{D}) = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 2.$$

Чтобы найти минимальную реализацию, перейдем к передаточной функции. Используя для вычислений формулу (6.10), получим

$$\begin{aligned} (p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} p & -1 & -1 \\ -1 & p & -1 \\ -1 & -1 & p \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{\Delta(p)} \begin{bmatrix} p^2 - 1 & p + 1 & p + 1 \\ p + 1 & p^2 - 1 & p + 1 \\ p + 1 & p + 1 & p^2 - 1 \end{bmatrix}, \\ \Delta(p) &= (p + 1)^2(p - 2). \end{aligned}$$

Следовательно, передаточная функция имеет вид

$$Q(p) = \frac{[0 \ 0 \ 1]}{(p + 1)^2(p - 2)} \begin{bmatrix} p^2 - 1 \\ p + 1 \\ p + 1 \end{bmatrix} = \frac{(p + 1)}{(p + 1)^2(p - 2)}.$$

Сокращение множителя $p + 1$ в числителе и знаменателе приводит к понижению порядка передаточной функции на единицу. В данном случае $n_0 = 2, n_1 = n_2 = 0, n_3 = 1$. Следовательно, исходную систему можно декомпозировать на две подсистемы: минимальную реализацию размерности «два» с собственными числами 2, -1 и неуправляемую, ненаблюдаемую подсистему размерности «единица» с собственным числом -1 (рис. 6.22).

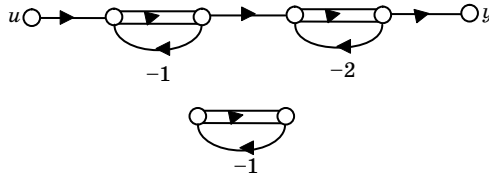


Рис. 6.22. Декомпозиция Калмана для примера 13

Упражнение 8. Система пятого порядка описывается матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ -21 \\ 30 \\ -23 \end{bmatrix}, \quad c = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1].$$

Найти ее каноническую декомпозицию Калмана и минимальную реализацию.

Ответ. Ранг матрицы управляемости равен 4, т. е. имеет неуправляемую подсистему первого порядка. Ранг матрицы наблюдаемости равен 5, т. е. система наблюдаема. Каноническая декомпозиция Калмана содержит две подсистемы: $n_0 = 4, n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0$. Минимальную реализацию получаем, выписав передаточную функцию

$$Q(p) = \frac{(p-1)(23p^3 + 16p^2 + 7p + 16)}{(p+1)^2(p^2+1)(p-1)}$$

и сократив числитель и знаменатель на общий множитель $p - 1$.

Пример 14. Проанализируем минимальность системы третьего порядка, блок-схема которой приведена на рис. 6.23.

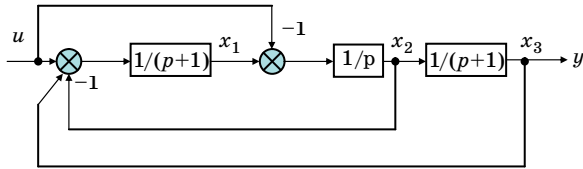


Рис. 6.23. Блок-схема системы для примера 14

Решение. Описание системы в пространстве состояний имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - u, \\ \dot{x}_3 &= x_2 - x_3, \end{aligned} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [0 \quad 0 \quad 1].$$

Проверяем управляемость, наблюдаемость и минимальность:
 $\gg s = \text{ss}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, 0); \mathbf{R} = \text{ctrb}(s); \mathbf{D} = \text{obsv}(s); \text{rank}(\mathbf{R}), \text{rank}(\mathbf{D}), \text{minreal}(\text{tf}(s))$

$\mathbf{R} = \text{ctrb}(s)$	$\mathbf{D}, \text{tf} = \text{obsv}(s)$	$\text{minreal}(\text{tf}(s))$
1 0 -2	0 0 1	-1
-1 1 0	0 1 -1	-----
0 -1 2	1 -1 1	$s^2 + 2s + 2$
$\text{rank}(\mathbf{R}) = 2$	$\text{rank}(\mathbf{D}) = 3$	

Следовательно, система неуправляема, наблюдаема, неминимальна. Порядок минимальной реализации равен двум.

6.7. Анализ демографической модели

Почти все полученные результаты по управляемости и наблюдаемости непрерывных систем оказываются справедливыми и для систем с дискретным временем, описываемых уравнениями

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{X}(k) + \mathbf{b}u(k), \quad y(k) = \mathbf{c}\mathbf{X}(k). \quad (6.12)$$

Для них точно так же вводятся понятия управляемости и наблюдаемости; матрицы управляемости и наблюдаемости строятся по формулам (6.5), (6.7); критерии управляемости, наблюдаемости и минимальности имеют тот же вид. Исключение составляют грамианы управляемости и наблюдаемости, которые вычисляются по другим формулам.

Проиллюстрируем применение изложенной теории на примере анализа наблюдаемости дискретной модели, описывающей структуру населения в некотором регионе.

При анализе структуры населения города или страны используются различные демографические модели. В частности, модель возрастной структуры отражает распределение численности населения по годам. Если при этом еще учитывается и пол, то говорят о половозрастной (или возрастно-половой) структуре. Графически модели возрастной структуры изображаются в виде так называемых *демографических пирамид*, где по оси абсцисс откладывается численность каждой из возрастных групп, а по оси ординат – возраст соответствующей группы.

Пример такой демографической пирамиды, характеризующей структуру населения Санкт-Петербурга в 1995 году, приведен на рис. 6.24. Левая часть пирамиды соответствует мужскому населению города, правая – женскому. В пирамиде нашли отражение результаты войны и блокады (возраст 50–54 лет), а также

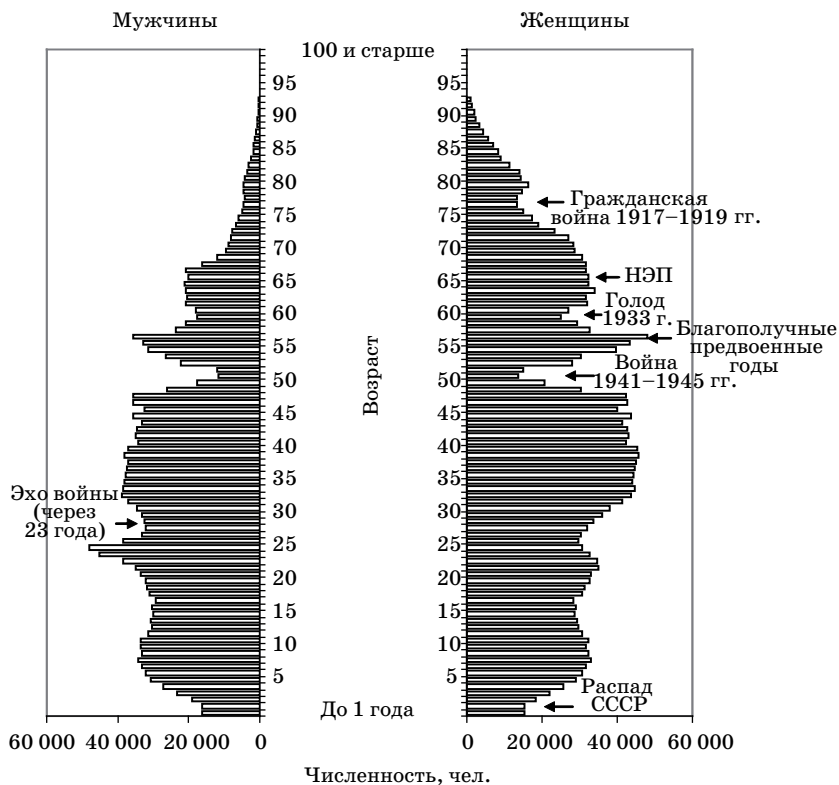


Рис. 6.24. Структура населения Санкт-Петербурга (1995 г.)

так называемое «эхо войны» – уменьшение численности детей, родители которых были рождены во время войны (возраст 26–30 лет). Видно также резкое снижение рождаемости после распада СССР.

Для построения таких пирамид проводят специальные социологические исследования, в процессе которых производятся длительные наблюдения за одной или несколькими возрастными группами. В связи с этим возникает вопрос информативности данных о той или иной группе для построения всей демографической пирамиды, поскольку это напрямую связано с финансовыми затратами на социологическое исследование.

Перейдем к математической формулировке этой задачи. Пусть все население разбито на n возрастных групп. Обозначим через x_1, \dots, x_n численность мужских групп, а через y_1, \dots, y_n – численность женских групп. Тогда вектор $\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]^T$ будет полностью характеризовать половозрастную структуру населения. Допустим, у нас имеется возможность наблюдать за численностью только одной группы. Спрашивается, за какой из групп следует наблюдать, чтобы на основе этих данных могла быть определена численность всех остальных групп. Мы получили стандартную задачу анализа наблюдаемости.

Чтобы упростить рассуждения, примем $n = 3$, т. е. будем рассматривать три мужские возрастные группы (назовем их условно x_1 – «мальчики», x_2 – «отцы», x_3 – «дедушки») и три женские группы (y_1 – «девочки», y_2 – «мамы», y_3 – «бабушки»).

Обозначим a_i, b_i вероятности рождения мальчиков и девочек мамами i -й возрастной группы; p_i, q_i – вероятности дожития членами i -й возрастной группы до перехода в следующую группу.

Тогда в первом приближении динамика изменения численности может быть описана следующей линейной моделью с дискретным временем:

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= a_1 y_1(k) + a_2 y_2(k) + a_3 y_3(k), \\
 y_1(k+1) &= b_1 y_1(k) + b_2 y_2(k) + b_3 y_3(k), \\
 x_2(k+1) &= p_1 x_1(k), \\
 y_2(k+1) &= q_1 y_1(k), \\
 x_3(k+1) &= p_2 x_2(k), \\
 y_3(k+1) &= q_2 x_2(k).
 \end{aligned}
 \tag{6.13}$$

Перейдем к матричной форме записи:

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{X}(k), \quad y = \mathbf{C}\mathbf{X},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Вектор-строка \mathbf{C} определяет выбор наблюдаемой группы и может принимать одно из шести значений:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= [100000], & \mathbf{C}_2 &= [010000], & \mathbf{C}_3 &= [001000], \\ \mathbf{C}_4 &= [000100], & \mathbf{C}_5 &= [000010], & \mathbf{C}_6 &= [000001]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Для каждого из шести вариантов надо построить матрицу наблюдаемости и определить ее ранг. Нас интересуют только те группы, у которых ранг равен 6. Если же таких групп не окажется, то задача в поставленной формулировке решения не имеет.

Найдем матрицу наблюдаемости для первого варианта (наблюдение за текущей численностью мальчиков):

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A} \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A}^2 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A}^3 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A}^4 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A}^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & a_1b_1 + a_2q_1 & 0 & a_1b_2 + a_3q_2 & 0 & a_1b_3 \\ 0 & \times & 0 & \times & 0 & \times \\ 0 & \times & 0 & \times & 0 & \times \\ 0 & \times & 0 & \times & 0 & \times \end{bmatrix}.$$

Мы видим, что независимо от значений элементов, обозначенных крестиками, матрица \mathbf{D}_1 вырождена, так как в ней имеются нулевые столбцы: $\det \mathbf{D}_1 = 0$, $\text{rank} \mathbf{D}_1 = 4$. Следовательно, группа мальчиков неинформативна: наблюдая за ней, нельзя определить численность остальных групп. Аналогичный вывод получаем, находя матрицу наблюдаемости для группы девочек, а также «мам» и «пап».

Остается надежда на старшие возрастные группы («дедушек» и «бабушек»). Вычисление матриц наблюдаемости для них дает:

$$\mathbf{D}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 p_1 p_2 & 0 & a_2 p_1 p_2 & 0 & a_3 p_1 p_2 \\ 0 & (a_1 b_1 + a_2 q_1) p_1 p_2 & 0 & (a_1 b_2 + a_3 q_2) p_1 p_2 & 0 & a_1 b_3 p_1 p_2 \\ 0 & d_{62} & 0 & d_{64} & 0 & d_{66} \end{bmatrix},$$

где $d_{62} = (a_1(b_1^2 + b_2 q_1) + a_2 b_1 q_1 + a_3 q_1 q_2) p_1 p_2$ $d_{64} = (a_1(b_1 b_2 + b_3 q_2) + a_2 b_2 q_1) p_1 p_2$ $d_{66} = b_3(a_1 b_1 + a_2 q_1) p_1 p_2$

$$\mathbf{D}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & q_1 q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 q_1 q_2 & 0 & b_2 q_1 q_2 & 0 & b_3 q_1 q_2 \\ 0 & \times & 0 & \times & 0 & \times \\ 0 & \times & 0 & \times & 0 & \times \end{bmatrix}.$$

Матрица \mathbf{D}_6 содержит три нулевых столбца, т. е. $\text{rank} \mathbf{D}_6 = 3$. Следовательно, группа «бабушек» еще менее информативна, чем группа «мальчиков». И только матрица \mathbf{D}_5 оказывается невырожденной – ее определитель в общем случае отличен от нуля. Чтобы доказать это, преобразуем матрицу \mathbf{D}_5 . Перестановкой столбцов она приводится к блочно-диагональному виду

$$\mathbf{D}'_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & p_1 p_2 \mathbf{G} \end{bmatrix}.$$

Здесь \mathbf{F} , \mathbf{G} – матрицы третьего порядка:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 p_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 b_1 + a_2 q_1 & a_1 b_2 + a_3 q_2 & a_1 b_3 \\ q_1(a_1 b_2 + a_3 q_2) & a_1 b_3 q_2 + a_2 b_2 q_1 - b_1 a_3 q_2 & a_2 q_1 b_3 \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы \mathbf{D}'_5 равен произведению определителей ее диагональных клеток:

$$\det \mathbf{D}'_5 = p_1^4 p_2^5 \det \mathbf{G}.$$

Матрица \mathbf{G} в общем случае невырождена. Вычисление ее определителя дает

$$\begin{aligned} \det \mathbf{G} = & a_1^3 b_3^2 q_2 + (b_2^2 a_3 q_1 - b_2 a_2 q_1 b_3 - 2 a_3 q_2 b_1 b_3) a_1^2 + \\ & + (2 b_2 a_3^2 q_2 q_1 - 3 a_3 q_2 a_2 q_1 b_3 + a_3^2 q_2 b_1^2 - b_2 a_3 a_2 q_1 b_1 + a_2^2 b_1 q_1 b_3) a_1 + \\ & + q_1 (q_1 a_2^3 b_3 - q_1 a_3 b_2 a_2^2 + a_3^2 a_2 b_1 q_2 + a_3^3 q_2^2). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Таким образом, для матрицы наблюдаемости \mathbf{D}_5 имеем: $\det \mathbf{D}_5 = -p_1^4 p_2^5 \det \mathbf{G} \neq 0$. Отсюда $\text{rank} \mathbf{D}_5 = 6$, т. е. система наблюдаема.

При этом речь не идет об отдельных исключительных сочетаниях параметров, при которых определитель может обращаться в нуль. Примером такого особого случая может служить одновременное обращение в нуль коэффициентов a_3 и b_3 (нулевая рождаемость старшей возрастной группы).

Приведем MATLAB-программу анализа наблюдаемости для рассмотренной демографической задачи:

```
%demography pyramid
syms a1 a2 a3 b1 b2 b3 p1 p2 q1 q2
A = [0 a1 0 a2 0 a3; 0 b1 0 b2 0 b3; p1 0 0 0 0; 0 q1 0 0 0; 0 0 p2 0 0; 0 0 0 q2 0 0];
C = [0 0 0 0 1 0];
D = [C; C*A; C*A^2; C*A^3; C*A^4; C*A^5]
r = rank(D), d = det(D).
```

Результатом ее работы является матрица наблюдаемости \mathbf{D}_5 и ее определитель.

Возможен несколько иной путь получения того же результата – анализ структуры матрицы наблюдаемости \mathbf{D} при произвольном выборе матрицы-строки $\mathbf{C} = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6]$.

Обратим внимание на то, что пятый столбец матрицы \mathbf{A} – нулевой. Это связано с тем, что старшая мужская возрастная группа («дедушки») не вносит вклада в остальные возрастные группы. Поэтому если предпоследний элемент матрицы \mathbf{C} равен нулю: $c_5 = 0$, то независимо от значений других элементов пятый столбец матрицы наблюдаемости \mathbf{D} также будет нулевым и система окажется ненаблюдаемой. Следовательно, имеет смысл

рассматривать только матрицы C с ненулевым предпоследним элементом, и среди матриц (6.14) имеется только один подходящий вариант – матрица C_5 .

Полученные результаты можно пояснить с помощью структурной схемы, сигнальный граф которой показан на рис. 6.25.

Двойными стрелками обозначены блоки задержки на такт (на возрастной интервал), буквы около одиночных дуг указывают коэффициенты передачи. Схема построена непосредственно по уравнениям (6.13). Из нее отчетливо видна особая роль переменной x_3 – именно ее следует принять в качестве выходной переменной. По ней легко определяются переменные x_1, x_2 :

$$x_2(k) = \frac{1}{p_2} x_3(k+1), \quad x_1(k) = \frac{1}{p_1 p_2} x_3(k+2),$$

а также остальные переменные.

По схеме можно определить ранги матриц наблюдаемости для разных возрастных групп. В частности, для «мужских» переменных x_1, x_2, x_3 ранги равны 4, 5 и 6 соответственно, а для «женских» переменных y_1, y_2, y_3 ранги равны трем.

Исключение составляют случаи специального сочетания параметров, когда система становится ненаблюдаема по всем выходам, в том числе и по выходу $y = x_3$. Это произойдет, если станет ненаблюдаемой левая часть схемы (см. рис. 6.25) с выходом $y = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3$. Проанализируем такую возможность при условии положительности всех параметров.

Передаточная функция от входа u , помеченного на рис. 6.25 пунктиром, до выхода y определяется формулой

$$Q(p) = \frac{a_1 p^2 + a_2 q_1 p + a_3 q_1 q_2}{p^3 - b_1 p^2 - b_2 q_1 p - b_3 q_1 q_2}. \quad (6.16)$$

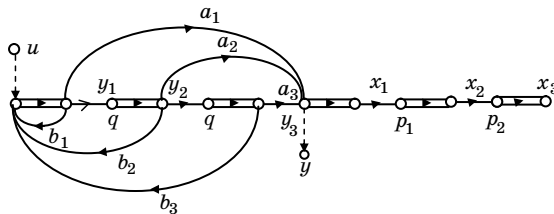


Рис. 6.25. Сигнальный граф для трех возрастных групп

Если у числителя и знаменателя есть общие корни, то система будет ненаблюдаема. Простейший случай ненаблюдаемости возникает при $a_3 = b_3 = 0$ (нулевая рождаемость в старшей возрастной группе). Заметим, что определитель (6.15) при этом обращается в нуль. Возможны и не столь очевидные варианты.

Итак, имеется единственная группа, наблюдение за которой позволяет отслеживать состояние всей демографической пирамиды – это группа «дедушек», т. е. старшая возрастная мужская группа.

Последнее рассуждение остается справедливым при любом n . Поэтому известный лозунг «берегите мужчин» можно дополнить рекомендацией «и наблюдайте за дедушками».

Здесь следует сделать одну оговорку. На практике при увеличении n , т. е. при рассмотрении более узких возрастных интервалов, часть коэффициентов a_i, b_i обращается в нуль. Это связано с естественными ограничениями на детородный возраст. В такой ситуации наблюдений за дедушками оказывается недостаточно, так как появляются группы ненаблюдаемых бабушек. Эта ситуация поясняется рис. 6.26, на котором изображен сигнальный граф для случая разбиения популяции на группы с интервалом в 10 лет. В этом случае можно считать нулевой рождаемость в группе девочек до 10 лет и в возрастных группах старше 70 лет, т. е. $a_1 = b_1 = a_7 = b_7 = a_8 = b_8 = a_9 = b_9 = a_{10} = b_{10} = 0$.

Дефект ранга матрицы наблюдаемости, построенной для вершины x_{10} , будет равен 4: $\text{rank} \mathbf{D}_{19} = 16 < 20$. Для того чтобы система стала наблюдаемой, надо следить не только за дедушками, но и за бабушками, т. е. за двумя старшими возрастными группами. Отсутствие рождаемости в старших возрастных группах приводит к потере информационной связи с бабушками и, как следствие, к ненаблюдаемости системы.

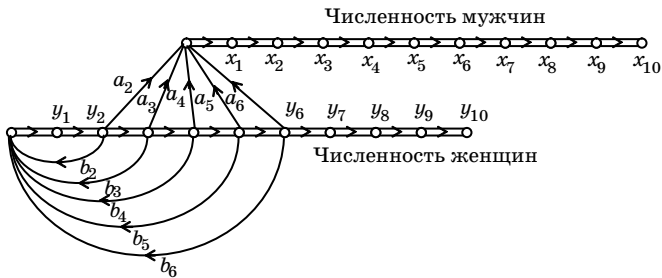


Рис. 6.26. Сигнальный граф десяти возрастных групп

Естественно, что проведенные рассуждения могут быть перенесены на любую популяцию. Например, речь может идти о наблюдениях за рыбами в пруду или оленями в тундре. При этом учет их вылова или отстрела легко производится введением соответствующих членов в правые части уравнений (6.13).

Упражнение 9. Исследуйте случай демографической пирамиды для $n = 4$, приняв возрастной интервал 25 лет и полагая рождаемость у женщин старше 75 лет нулевой. Покажите, что в этом случае наблюдение за одной возрастной группой не может обеспечить наблюдаемости. Имеется единственный вариант из $C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ возможных попарных сочетаний групп, обеспечивающий наблюдаемость. Найдите его. Поясните результат сигнальным графом.

6.8. Эквивалентные преобразования линейных моделей

Рассмотрим линейную систему, заданную своей передаточной функцией. Назовем реализацией этой системы любую схему из сумматоров и интеграторов, обладающую заданной передаточной функцией. Каждой из них соответствует свое описание в пространстве состояний вида

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}\mathbf{X}. \quad (6.17)$$

Все эти реализации будут эквивалентными в том смысле, что их реакции на любые одинаковые входные сигналы должны совпадать. В связи с этим возникают задачи получения всех реализаций, эквивалентных данной, установления алгебраического критерия эквивалентности, выбора наиболее «удобной» модели из множества эквивалентных реализаций и др.

Предположим, что известны матрицы \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} одной из реализаций, соответствующих заданной передаточной функции. Оказывается, что все остальные реализации этой передаточной функции могут быть получены путем замены переменных в уравнениях (6.17) по формуле $\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{Z}$, где \mathbf{T} – произвольная невырожденная $(n \times n)$ -матрица. Производя указанную замену и делая несложные преобразования, получаем уравнения эквивалентной реализации

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A}_1\mathbf{Z} + \mathbf{b}_1u, \quad y = \mathbf{c}_1\mathbf{Z}, \quad (6.18)$$

где

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}, \quad \mathbf{c}_1 = \mathbf{c}\mathbf{T}. \quad (6.19)$$

Эти формулы можно получить с помощью так называемой *коммутативной диаграммы*, показанной на рис. 6.27.

Ее верхняя часть соответствует реализации (6.17), нижняя – реализации (6.18). Отображение пространства состояний Z в пространство состояний X осуществляется матричным оператором \mathbf{T} .

Из эквивалентности систем следует, что если из одной вершины диаграммы в другую существует несколько путей, то их операторные коэффициенты передачи должны быть равны (условие коммутативности). Например, приравнивая коэффициенты передачи путей из вершины U в вершину X , получаем равенство $\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{b}_1$, что соответствует второму из условий (6.19). Остальные условия получают аналогичным образом.

Преобразование $\mathbf{A}_1 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, связывающее матрицы \mathbf{A} и \mathbf{A}_1 , в линейной алгебре называется *преобразованием подобия*. Оно не изменяет собственных чисел матрицы, поэтому характеристические уравнения систем (6.17) и (6.18) будут одинаковы. Подставляя матрицы (6.19) в формулу для вычисления передаточной функции убеждаемся, что она также не изменяется:

$$\mathbf{c}(\mathbf{p}\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}_1(\mathbf{p}\mathbf{E} - \mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{b}_1.$$

Таким образом, если задана одна реализация системы, то класс всех эквивалентных реализаций описывается уравнениями (6.18), (6.19) при различных невырожденных матрицах \mathbf{T} .

Выясним, как связаны матрицы управляемости и наблюдаемости эквивалентных систем. Подставляя выражения (6.19) в формулы (6.5) и (6.7), получаем

$$\mathbf{R}_1 = [\mathbf{b}_1, \mathbf{A}_1\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}_1^{n-1}\mathbf{b}_1] = [\mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}],$$

$$\mathbf{D}_1^T = [\mathbf{c}_1^T, (\mathbf{c}_1\mathbf{A}_1)^T, \dots, (\mathbf{c}_1\mathbf{A}_1^{n-1})^T] = [(\mathbf{c}\mathbf{T})^T, (\mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{T})^T, \dots, (\mathbf{c}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{T})^T],$$

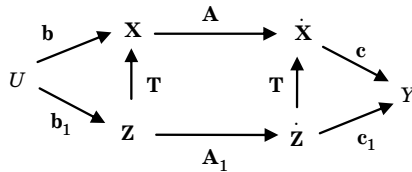


Рис. 6.27. Коммутативная диаграмма

откуда вытекают искомые соотношения

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}, \quad \mathbf{D}_1 = \mathbf{D}\mathbf{T}.$$

Иногда требуется решать задачу, состоящую в определении матрицы \mathbf{T} , связывающей две эквивалентные реализации. Полученные соотношения дают простой способ ее решения

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{R}_1^{-1}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}_1.$$

Первая из этих формул применима для управляемых систем, а вторая – для наблюдаемых.

Пример 15. Исходная реализация системы второго порядка задана матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 24 \\ -3 & -18 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [2 \quad 5].$$

Выполняя замену переменных с матрицей $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, находим матрицы эквивалентной реализации:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \quad -1].$$

Мы получили матрицы параллельной канонической формы, поскольку в качестве столбцов матрицы \mathbf{T} были взяты собственные векторы матрицы \mathbf{A} .

Нетрудно проверить, что матрицы управляемости обеих реализаций

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -5 & 53 \\ 2 & -21 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}$$

связаны соотношением $\mathbf{R} = \mathbf{T}\mathbf{R}_1$.

Таким образом, метод пространства состояний удобен для описания и выполнения эквивалентных преобразований линейных моделей, необходимость в чем возникает при моделировании и исследовании динамических систем, при решении задач декомпозиции и редукции моделей и во многих других случаях.

Особенно важна роль эквивалентных преобразований в теории канонических форм, представляющих собой некоторые особенно простые реализации линейных моделей.

6.9. Редукция линейных моделей

Модели, реализованные средствами вычислительной техники, используются для изучения и прогнозирования экономических и экологических процессов, управления сложными техническими объектами, контроля реальной аппаратуры и иных целей. При этом достаточно типична ситуация, когда исходная математическая модель слишком сложна для реализации, и, чтобы удовлетворить практическим ограничениям на память, быстродействие и другие вычислительные ресурсы, ее необходимо упростить.

Сложность линейных динамических моделей обычно характеризуют их размерностью, т. е. длиной n вектора \mathbf{X} при описании системы в пространстве состояний

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}\mathbf{X},$$

или порядком n передаточной функции

$$Q(p) = \frac{b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_1p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0},$$

описывающей модель.

Задача построения упрощенной модели в последнем случае сводится к определению передаточной функции $Q(p)$ меньшего порядка m , достаточно хорошо аппроксимирующей исходную передаточную функцию. Такая модель называется *редуцированной*, а процесс ее получения – *редукцией*.

Наиболее известны *методы модальной редукции*. Определяющей чертой этих методов является сохранение корней характеристического уравнения, называемых также полюсами передаточной функции. Полюсы системы (собственные числа матрицы \mathbf{A} описания в пространстве состояний) определяют элементарные собственные движения (моды) системы – отсюда термин «модальный». Полюсы являются наиболее существенной характеристикой динамики системы, непосредственно отражая такое важное свойство системы, как устойчивость. Поэтому редукция с отбрасыванием части полюсов сохраняет ряд существенных динамических свойств системы. В частности, если исходная система была устойчивой, то и редуцированная модель также будет устойчивой.

В инженерной практике чаще всего используют один из двух видов модальной редукции – низкочастотную или высокочастотную. В обоих случаях полюсы системы упорядочивают по величине и при редукции отбрасывают либо наименьшие (низкочастотная редукция), либо наибольшие (высокочастотная редукция). Иногда используют упорядочение полюсов по величине вклада отдельных мод в выходной сигнал системы, сохраняя при редукции моды, дающие наибольший вклад по выбранному критерию.

Другой популярный подход – сокращение близких нулей и полюсов передаточной функции. Если, например, имеется передаточная функция третьего порядка

$$Q(p) = \frac{(p-1)(p+2,1)}{(p+1)(p+2)(p+3)},$$

то ее можно приближенно заменить редуцированной передаточной функцией второго порядка

$$\bar{Q}(p) = \frac{(p-1)}{(p+1)(p+3)},$$

причем весовые и переходные функции в обоих случаях будут весьма близки.

Более строгий подход опирается на использование сбалансированного представления систем и вычисление их ганкелевых

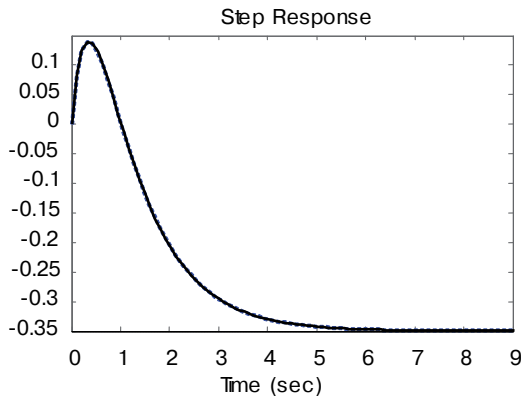


Рис. 6.28. Переходные функции исходной и редуцированной моделей

сингулярных чисел. Для этого служат команды **balreal** и **modred** пакета MATLAB. Применяя первую из них к передаточной функции $Q(p)$, находим вектор сингулярных чисел $g = [0,3169\ 0,1416\ 0,0003]$. Исключая из сбалансированного представления sys третью переменную состояния $sys = \text{modred}(sys,[0\ 0\ 1])$, получим редуцированную модель второго порядка с передаточной функцией

$$\bar{Q}(p) = \frac{0,00061275(p+1619)(p-1)}{(p+0,9911)(p+2,86)}.$$

Заметим, что статические коэффициенты усиления исходной и редуцированной моделей одинаковы: $k = -0,35$, а графики их переходных функций практически совпадают (рис. 6.28).

Задачи и упражнения

1. Рассмотрим цепочку n одинаковых звеньев первого порядка с передаточными функциями $W(p) = 1 / (1 + Tp)$, $T > 0$, охваченных общей отрицательной обратной связью с коэффициентом k . Требуется найти значение коэффициента $k > 0$, при котором система теряет устойчивость.

Решение. Передаточная функция разомкнутой системы

$$G(p) = \frac{1}{(1 + Tp)^n}.$$

Характеристический полином замкнутой системы $P(p) = (1 + Tp)^n + k$ имеет корни $p_i = (-1 + \sqrt[n]{-k}) / T$. Они расположены на окружности с центром в точке $-1/T$, которая должна целиком лежать в левой полуплоскости.

Ответ. Значение искомого коэффициента усиления

$$k_0 = \frac{1}{(\cos \pi / n)^n} = \sec^n \frac{\pi}{n}, \quad n > 2.$$

2. Требуется проанализировать управляемость, наблюдаемость и минимальность системы третьего порядка, заданной матрицами описания в пространстве состояний

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \ 2 \ 0].$$

Решение. Находим матрицы управляемости, наблюдаемости и их произведение:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{DR} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Все они вырождены: $\text{rank}\mathbf{R} = \text{rank}\mathbf{D} = 2$, $\text{rank}\mathbf{DR} = 1$. Следовательно, система неуправляема, ненаблюдаема и размерность ее минимальной реализации равна единице.

3. Система характеризуется матрицами описания в пространстве состояний

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [0 \ 1 \ 1].$$

Требуется найти порядок ее минимальной реализации.

Ответ. $\text{rank}\mathbf{R} = \text{rank}\mathbf{D} = \text{rank}\mathbf{DR} = 2$.

4. Проанализировать наблюдаемость системы перевернутых маятников (см. рис. 6.13), если измеряется только угол отклонения α_1 первого маятника. Провести аналогичный анализ для маятников на тележке (см. рис. 6.14).

5. Система с одним входом и двумя выходами задана передаточной функцией

$$Q(p) = \begin{bmatrix} \frac{p+1}{p^3 + 3p^2 + 3p + 2} \\ \frac{p^2 + 3}{p^2 + p + 1} \end{bmatrix}.$$

Требуется проанализировать ее управляемость и наблюдаемость, а также определить порядок минимальной реализации.

Решение. Выполняя переход от передаточной функции к описанию в пространстве состояний с помощью команд MATLAB:

$$Q = [\text{tf}([1 \ 1],[1 \ 3 \ 3 \ 2]); \text{tf}([1 \ 0 \ 3],[1 \ 1 \ 1])]; \text{sys} = \text{ss}(Q),$$

получаем описание в пространстве состояний с матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -1,5 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Строим матрицы управляемости и наблюдаемости и находим их ранги:

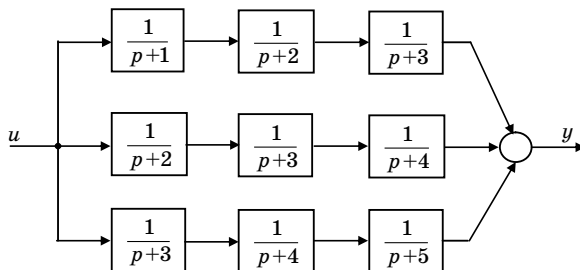
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 & -11 & 21 \\ 0 & 2 & -6 & 12 & -22 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 12 \\ 2 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & -4 & 0 & 6 & 0 & -10 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{rank } \mathbf{R} = 3, \text{ rank } \mathbf{D} = 5, \text{ rank } (\mathbf{R}\mathbf{D}) = 3,$$

Ответ. Система неуправляема и ненаблюдаема, порядок минимальной реализации равен 3.

6. Определить порядок минимальной реализации трехканальной системы, схема которой приведена на рисунке.



Найти ее передаточную функцию с помощью формулы Мэзона.

Ответ. Порядок минимальной реализации равен 4. Передаточная функция может быть представлена в виде суммы:

$$Q(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+4} + \frac{1}{p+5}.$$

7. См. также упражнения 1–9 в данном разделе.

7. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ

Модели развития популяций широко используются для исследования и прогнозирования динамики различных показателей во многих областях: демографии, экономике, экологии, медицине, космонавтике и т. д. Под популяцией понимается любое изолированное биологическое сообщество, населяющее определенную территорию, способное самовоспроизводиться и существовать достаточно длительное время. Так, можно говорить о популяциях оленей в тундре, рыб в озере, бактерий в питательной среде.

В биологии изучают как динамику отдельных, изолированных видов популяций, так и модели взаимодействия двух или более видов. Рассмотрим наиболее характерные примеры моделей.

7.1. Модели развития изолированной популяции

Самый интересный пример изолированной популяции – это сообщество людей на планете Земля. Изучение законов развития человечества всегда привлекало внимание ученых.

Рассмотрим простейшую постановку задачи о моделировании динамики развития человеческого общества. Важнейшими величинами, характеризующими развитие человечества, является его численность и уровень производства материальных благ (уровень развития производительных сил).

Обозначим текущую численность населения земного шара $N(t)$. В качестве меры развития производительных сил человечества удобно взять производство энергии всех видов, которое обозначим $P(t)$. Задаваясь различными математическими законами изменения $N(t)$ и $P(t)$, можно получать простейшие модели развития человечества. Реализовав их в виде схем моделирования, например в среде SIMULINK, можно получать кривые, иллюстрирующие динамику развития общества в соответствии с той или иной моделью.

Модель 1. Экспоненциальный рост народонаселения (теория Мальтуса).

Простейшая модель роста – это экспоненциальная модель

$$N(t) = N_0 e^{\alpha t},$$

где t – время; N_0 – начальная численность популяции; $N(t)$ – численность популяции через время t ; α – коэффициент прироста

(константа). Такой моделью описывается, например, рост бактериальной культуры до того, как начнёт истощаться среда; рост экономических показателей до насыщения рынка.

Впервые эту модель для описания роста численности человечества использовал в своем классическом труде «О росте народонаселения» английский экономист Томас Роберт Мальтус (1766–1834). Согласно его модели рост населения земного шара происходит в геометрической прогрессии, а производство материальных благ – в арифметической.

Модель Мальтуса описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \alpha N, & N(0) &= N_0, \\ \frac{dP}{dt} &= \beta, & P(0) &= P_0, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где α и β – показатели, характеризующие темпы роста населения и материальных благ.

Первое уравнение представляет собой естественный закон роста народонаселения, при котором ежегодный прирост населения пропорционален его численности. Решая это уравнение, получим $N(t) = N_0 e^{\alpha t}$.

Мальтус полагал, что население удваивается каждые 25 лет, что соответствует величине α , равной $\alpha = 0,04 \ln 2 \approx 0,028$. Отметим, что такой темп роста чрезвычайно высок и не соответствует действительности. Если бы население со времен Мальтуса (а в то время на Земле жило около 1 млрд. чел.) увеличивалось по его прогнозам, то к настоящему времени на Земле было бы не 6,7 млрд. чел., а около 200 млрд. К столь завышенному темпу роста Мальтус приходил, оперируя статистическими данными о росте населения США. Впоследствии было обнаружено, что Мальтус вместо данных о естественном росте народонаселения США использовал данные об общем росте населения, которое в основном увеличивалось за счет миграции из Европы.

Из второго уравнения системы (7.1) следует, что $P(t) = P_0 + \beta t$. Медленный «линейный» рост производства материальных благ Мальтус объяснял, в частности, законом убывающего плодородия почвы, впоследствии развитым Д. Риккардо. Фактически урожайность со времен Мальтуса выросла во много раз и продолжает расти благодаря высокой культуре земледелия.

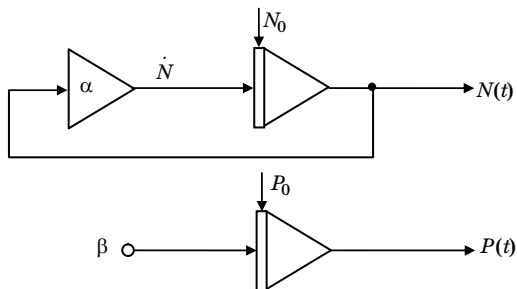


Рис. 7.1. Модель Мальтуса

Схема моделирования системы уравнений (7.1) приведена на рис. 7.1.

Она представляет собой простейшую модель развития общества и позволяет наглядно наблюдать изменение N и P во времени. Примерный вид графиков, которые получаются, если подать переменные N и P на входы осциллографа, показан на рис. 7.2.

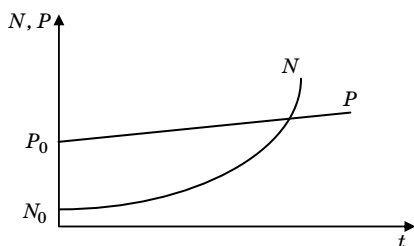


Рис. 7.2. Графики мальтузианской модели

Графики отражают основное положение теории Мальтуса, согласно которой развитие производительных сил отстает от роста населения. Отсюда Мальтус делает выводы, что проблемы голода, нищеты, безработицы связаны с наличием «лишних людей». «Лишний человек», по его мнению, «не имеет ни малейшего права требовать какого бы то ни было пропитания. На великом жизненном пути нет для него места. Природа повелевает ему удалиться и не замедлит сама привести в исполнение свой приговор».¹

Здесь стоит упомянуть об исторической обстановке в Англии начала XIX века, когда появилось учение Мальтуса. Незадолго до этого в результате промышленного переворота произошло разорение многочисленного слоя ремесленников, а в результате

¹ Мальтус Т. Опыт о законе народонаселения. Спб., 1868. Т. 1. С. 12.

аграрного переворота – разорение крестьянства. Появилась масса безработных, по Англии прокатились голодные бунты, возникло стихийное «движение луддитов». Нарождающаяся буржуазия остро нуждалась в социальной теории, с помощью которой все происходящее можно было бы объяснить «объективными» законами природы.

Учение Мальтуса оказалось как нельзя кстати. Он, по меткому выражению А. Бебеля, «в нужный момент сказал для английской буржуазии нужное слово». Этим и объясняется громадная популярность его теории. Важно подчеркнуть, что главное в критике мальтузианства – не ошибочность математической модели (7.1), хотя об этом тоже можно и нужно говорить. Главное – в тех социальных выводах, которые делаются из этой модели. Различные концепции неомальтузианства, среди которых можно отметить теорию «золотого миллиарда», развиваются и в настоящее время.

Модель 2. Гиперболический рост народонаселения. Как было отмечено, Мальтус при построении модели (7.1) опирался на некорректные статистические данные. Скорректируем его модель, используя современную информацию о динамике численности человечества.

Ориентировочно к концу эпохи палеолита (примерно 15 тыс. лет до н. э.) численность населения Земли достигала 3 млн. чел., к концу неолита (2 тыс. лет до н. э.) – 50 млн., в начале нашей эры на Земле было уже 230 млн., к концу I тыс. н. э. – 275 млн., в 1800 г. – 1 млрд., в 1900 г. – 1,6 млрд., в 1960 г. – 3 млрд., в 1993 г. – 5,5 млрд., в 2003 г. – 6,3 млрд., в 2006 г. – 6,5 млрд., в 2008 г. – 6 млрд. 670 млн., прогноз на 2050 г. – 9,2 млрд. чел.

Ниже приведены данные об изменении населения земного шара за последние 1000 лет:

Год	1000	1400	1650	1800	1850	1900	1950	1960	1970	2000
Население, млн. чел.	300	440	550	950	1250	1650	2500	3000	3600	6300

График, отражающий динамику роста населения Земли в соответствии с этими данными, приведен на рис. 7.3: точка N_1 отражает данные 2000 г., в котором население земного шара превысило 6 млрд чел.; прямой линией изображен фактический рост производительных сил. На графике принят полулогарифмический масштаб, что означает развитие производительных сил по геометрической прогрессии (под графиком для иллюстрации приведены некоторые даты из истории России).

Математический анализ графиков показывает, что они с хорошей степенью точности описываются дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= aN^2, & N(t_0) &= N_0, \\ \frac{dP}{dt} &= bP, & P(t_0) &= P_0, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где $N_0 = 3 \cdot 10^8$, $a \approx 3 \cdot 10^{-6}$, $t_0 = 1000$ лет.

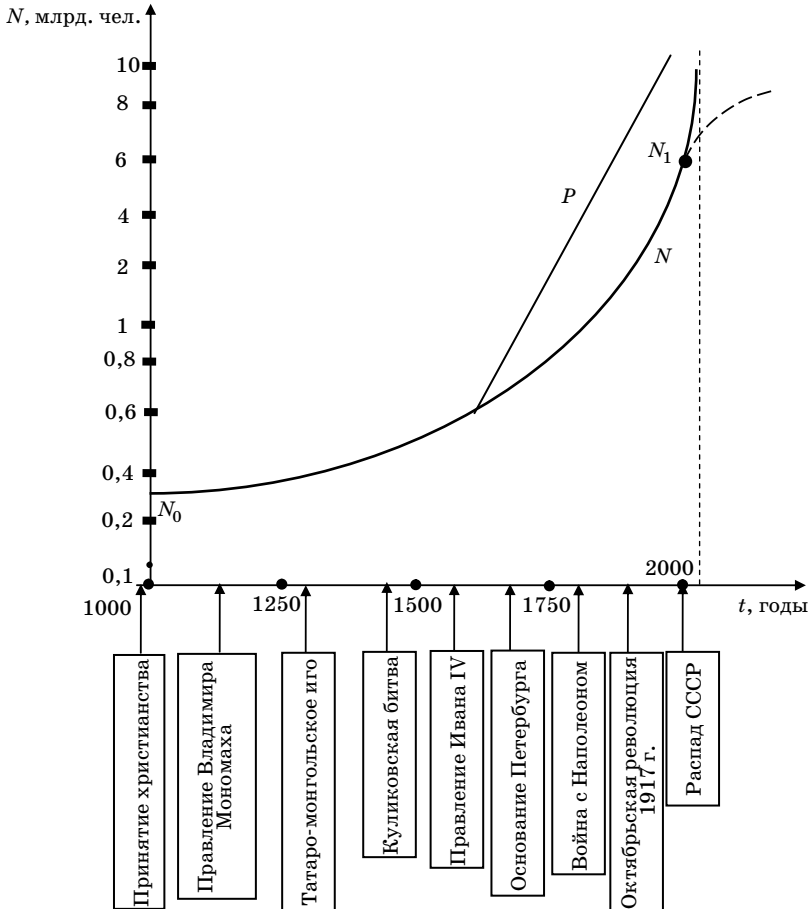


Рис. 7.3. Гиперболический рост

Как видно из приведенных уравнений, они отличаются от модели (7.1) появлением дополнительных множителей N и P в правых частях. Это означает, что реальная модель развития человечества радикальным образом отличается от модели Мальтуса.

Найдем решение уравнений (7.2). Выполним разделение переменных в первом из них

$$\frac{dN}{dt} = aN^2, \quad a dt = \frac{dN}{N^2}.$$

Интегрируя обе части, получаем:

$$\int a dt = \int \frac{dN}{N^2}; \quad at = -\frac{1}{N} + c.$$

Неизвестную постоянную c находим из начальных условий $c = \frac{1}{N_0} + at_0$.

Итак, общее решение уравнения (7.2) имеет вид

$$N(t) = \frac{N_0}{1 - aN_0(t - t_0)}.$$

Это уравнение гиперболы вида $y = 1/x$, смещенной вдоль оси абсцисс, оно описывает модель гиперболического роста.

Полагая $t_0 = 0$ и подставляя численные значения начальных условий, получаем

$$N(t) = \frac{N_0}{1 - aN_0 t} \approx \frac{3 \cdot 10^5}{2030 - t}, \text{ млн. чел}; \quad P(t) = P_0 e^{bt}.$$

Таким образом, реальный рост народонаселения последнюю тысячу лет происходил не по экспоненциальному, а по более медленному (на минувшем отрезке времени) гиперболическому закону. Производительные силы, как это видно из второго уравнения, росли с течением времени не по арифметической, как предполагал Мальтус, а по геометрической прогрессии. Это возрастание показано прямой линией на графике рис. 7.3 (на нем принят логарифмический масштаб по вертикали). В масштабе этого рисунка годовое производство энергии на душу населения земного шара определяется разностью кривых P и N . Видно, что эта разность, вплоть до последнего времени, росла (вопреки предсказаниям Мальтуса).

Схема моделирования уравнений (7.2) показана на рис. 7.4, блок *Кв* осуществляет возведение в квадрат.

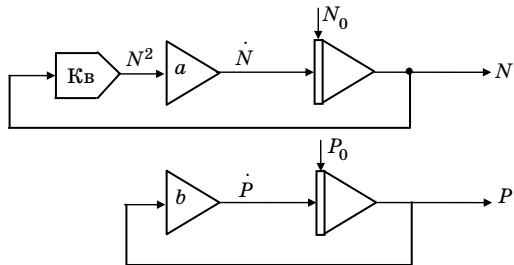


Рис. 7.4. Гиперболическая модель

Примерные осциллограммы кривых роста *P* и *N* приведены на рис. 7.5.

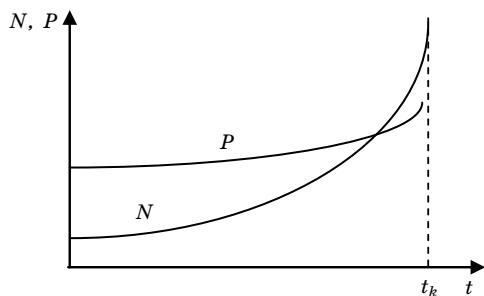


Рис. 7.5. Графики гиперболической модели

По мере приближения к точке $t \rightarrow t_k = \frac{1}{aN_0}$ численность населения неограниченно возрастает, скорость роста также асимптотически стремится к бесконечности. Поэтому данную модель называют еще *моделью сверхбыстрого роста*.

Определение величины t_k с большой точностью дает $t_k = 2030 \pm 5$ лет. Поскольку ясно, что за оставшиеся 20–30 лет население земного шара не станет равным бесконечности, то можно сделать вывод, что время действия гиперболического закона роста окончилось. Фактически сейчас уже происходит переход к закону гиперболического тангенса, описываемому ниже.

Уравнения (7.2) были получены на основе экспериментальных данных. Безусловный интерес представляет вывод их из

общетеоретических соображений. Приведем одну любопытную гипотезу, изложенную на страницах журнала Британского межпланетного общества¹.

Автор статьи обсуждал проблему роста численности населения Земли, приводя следующие соображения. Пусть темп роста населения пропорционален числу встреч между мужчинами и женщинами:

$$\dot{N} = \alpha N_1 N_2,$$

где N – общая численность населения; N_1, N_2 – количество мужчин и женщин, $0 < \alpha < 1$ – некоторый коэффициент пропорциональности. С большой точностью можно считать, что $N_1 \approx N_2 = \frac{N}{2}$, откуда $\dot{N} = \frac{\alpha}{4} N^2$.

Это так называемое *уравнение сверхбыстрого роста*. Интегрируя его от t_0 до t , получаем

$$\frac{4}{\alpha} \left(-\frac{1}{N(t)} + \frac{1}{N(t_0)} \right) = t - t_0.$$

Выражаем отсюда $N(t)$:

$$N(t) = \frac{4}{\alpha} \frac{1}{t_0 + \frac{4}{\alpha} N^{-1}(t_0) - t} = \frac{4}{\alpha(t_k - t)}, \quad (7.3)$$

где $t_k = t_0 + \frac{4}{\alpha N(t_0)}$.

Согласно формуле (7.3) при $t = t_k$ численность населения станет бесконечной. В упомянутой статье это интерпретируется как наступление «конца света».

Сопоставляя формулу (7.3) с имеющимися статистическими данными, можно найти α :

$$\alpha = \frac{4}{t_k - t_0} \frac{1}{N_0} = \frac{4}{2030 - 1976} \frac{1}{4 \cdot 10^9} \approx 0,2 \cdot 10^{-10}$$

и очень точно предсказать время «конца света».

¹ Hoerner S. von. Population explosion and interstellar expansion // J. of the British Interplanetary Society. 1975. Vol. 28. Nr. 11. P. 691–712.

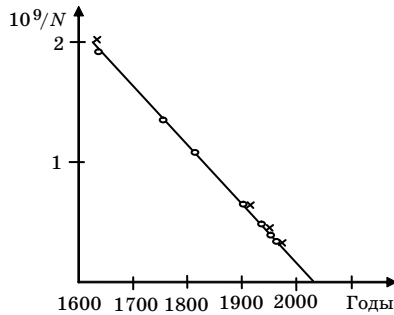


Рис. 7.6. График обратной численности

На рис. 7.6 приведена динамика роста численности населения Земли в течение последних веков. По оси абсцисс отложено время в годах, по оси ординат – величина $\frac{1}{N}$ (обратная численность). Эта прямая очень хорошо согласуется со статистическими данными (ноликami и крестиками помечены данные из разных статистических источников) и формулой (7.3).

По расчетам получается, что катастрофа произойдет в пятницу 13 ноября 2026 г.

Оставляя в стороне мистическое истолкование формулы (7.3), заметим, что центральный момент в ее получении – учет двуполюй структуры человеческой популяции. Именно благодаря этому получается член N^2 в правой части первого из дифференциальных уравнений (7.2). Модель Мальтуса соответствует однополюй популяции (типа колонии бактерий, размножающихся делением), поэтому в нее входит N в первой степени. Гипотетическая трехполюя популяция (в которой для рождения новой особи необходимо, чтобы встретились «он», «она» и «оно») приводит к появлению члена N^3 , т. е. к уравнению вида $\dot{N} = \alpha N^3$. Интегрируя его, получим

$$N(t) = N_0 / \sqrt{1 - 2\alpha N_0^2 t}.$$

Численность соответствующей популяции сначала будет расти очень медленно, затем быстрее и в итоге перегонит любую двуполюю популяцию.

Заметим, что аналогичными дифференциальными уравнениями описывается протекание химических реакций с участием одного, двух или трех реагентов при условии, что скорость

таких реакций пропорциональна произведению концентраций веществ, участвующих в реакции.

Недостаток рассмотренных моделей в том, что они не учитывают ограничений со стороны окружающей среды, что приводит к неограниченному росту популяции, чего в реальных условиях не бывает. Характерный пример приводил В. И. Вернадский, говоря, что мелкая обычная инфузория может в течение пяти лет дать массу протоплазмы, объем которой был бы в 10⁴ раза больше объема Земли.

Перейдем к более точным моделям лимитированного роста.

Модель 3 (логистический рост народонаселения). С ростом численности популяции N изменяется жизненное пространство, среда обитания и ряд других внешних ограничений, что приводит к уменьшению темпов роста популяции с увеличением N , прежде всего, из-за истощения среды обитания. Чтобы учесть это обстоятельство, введем в уравнение (7.1) линейно убывающий множитель $r = a - bN$, ограничивающий рост популяции:

$$\dot{N} = (a - bN)N, \quad N(0) = N_0. \quad (7.4)$$

Уравнение (7.4) обладает двумя важными свойствами. При малых N численность возрастает экспоненциально, как в уравнении (7.1), при больших — убывает, приближаясь к определенному пределу $K = \frac{a}{b}$. Величина K , называемая *емкостью популяции*, определяется ограниченностью пищевых ресурсов, среды обитания и другими факторами.

Два варианта схемы моделирования уравнения (7.4) показаны на рис. 7.7. На рис. 7.8 приведены графики выходного сигнала при разных начальных условиях.

Найдем равновесные состояния популяции из условия $\dot{N} = 0$. Их два: $N_1 = 0$ и $N_2 = \frac{a}{b}$. Проанализируем вид выходного сигнала. Если начальная численность населения N_0 заключалась в интервале между N_1 и N_2 , то $\dot{N} > 0$ и $N(t)$ будет возрастать, стремясь в пределе к N_2 (нижняя кривая на рис. 7.8). При $N_0 > N_2$ численность будет убывать, стремясь к тому же пределу (верхняя кривая на рис. 7.8). Таким образом, равновесное состояние N_2 является устойчивым.

Чтобы найти аналитическое решение уравнения (7.4), перепишем его в виде

$$dt = \frac{dN}{(a - bN)N} = \frac{dN}{aN} + \frac{bdN}{a(a - bN)}.$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения

$$at = \ln \frac{cN}{a - bN}.$$

Найдём неизвестный коэффициент c из начальных условий, полагая $t = 0$:

$$ce^{-at} = \frac{a}{N} - b, \quad c = \frac{a}{N_0} - b = \frac{r_0}{N_0}.$$

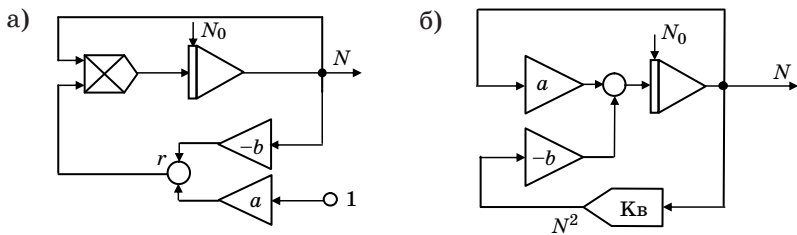


Рис. 7.7. Модели логистического роста

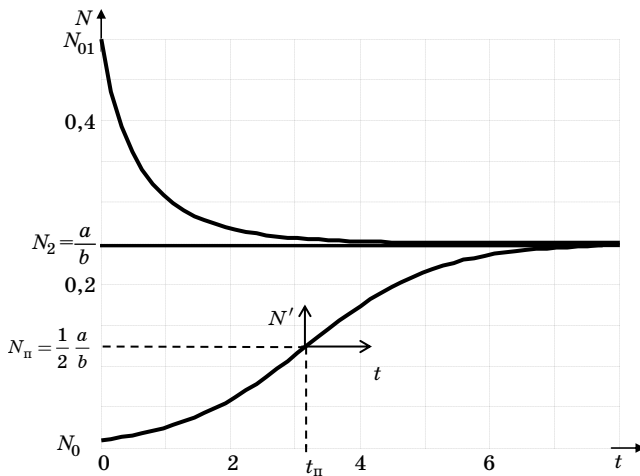


Рис. 7.8. Графики логистического роста

Итак, общее решение уравнения (7.4) имеет вид так называемой *логистической кривой*:

$$N(t) = \frac{aN_0}{bN_0 + r_0 e^{-at}}. \quad (7.5)$$

Эта модель была независимо предложена разными учёными в конце XIX – начале XX века.

Логистическая кривая (см. нижнюю часть рис. 7.8) имеет точку симметрии, совпадающую с точкой перегиба. Найдём ее координаты, приравняв нулю вторую производную $\ddot{N} = 0$. Это можно сделать, дважды дифференцируя функцию (7.5), но проще продифференцировать уравнение (7.4) по времени и подставить выражение для производной \dot{N} :

$$(a - 2bN)(a - bN)N = 0.$$

Отсюда находим ординату точки перегиба N_{Π} , которая представляет собой половину максимальной численности

$$N_{\Pi} = \frac{1}{2} \frac{a}{b}.$$

Подставляя это выражение в (7.5) и разрешая полученное соотношение относительно t , получаем абсциссу точки перегиба

$$t_{\Pi} = \frac{1}{a} \ln \frac{r_0}{bN_0}.$$

Сместим начало координат так, чтобы оно совпало с точкой перегиба, тогда в новой системе координат N' , t' она будет характеризоваться формулой

$$N'(t) = \frac{1}{2} \frac{a}{b} \frac{e^{at'} - 1}{e^{at'} + 1}.$$

Заметим, что эта функция нечётная $N'(-t) = -N'(t)$.

Используя выражение для гиперболического тангенса $\text{th} y = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$, предыдущую формулу можно переписать в виде

$$N'(t) = \frac{1}{2} \frac{a}{b} \text{th} \left(\frac{at'}{2} \right).$$

Американский биолог Р. Пирл использовал в 1920 году такую кривую для описания динамики роста народонаселения.

Он подобрал параметры a и b на основе данных за прошлые годы и рассчитал численность населения США до 2100 года. Около 10 лет модель работала хорошо, потом её пришлось периодически подправлять.

Модель Гомперца. В природе, технике и экономике достаточно распространены процессы, которые сначала растут медленно, затем ускоряются и снова замедляют свой рост, стремясь к какому-либо пределу. В качестве примера можно привести процесс ввода некоторого объекта в промышленную эксплуатацию, процесс изменения спроса на товары, обладающие способностью достигать некоторого уровня насыщения и др. Для моделирования таких процессов используются так называемые *S-образные кривые роста*, среди которых выделяют уже рассмотренную логистическую кривую, а также кривую Гомперца.

Кривая Гомперца имеет аналитическое выражение в виде «двухэтажной» показательной функции:

$$N = ke^{-be^{-at}}, \quad (7.6)$$

где a, b, k – положительные параметры.

Характерный вид этой кривой приведен на рис. 7.9 (пунктиром показан график ее производной).

В кривой Гомперца можно выделить три участка. На первом из них прирост функции незначителен, на втором участке – примерно постоянен, на третьем – происходит замедление темпа прироста и функция асимптотически приближается к значению k . В результате конфигурация кривой напоминает латинскую букву S.

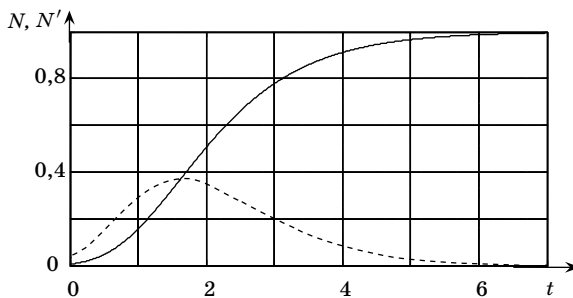


Рис. 7.9. Кривая Гомперца и ее производная при $k = 1, a = 1, b = 5$

Чтобы найти описание кривой Гомперца в дифференциальном виде, прологарифмируем равенство (7.6) и потом возьмем производную по времени:

$$\ln N = \ln k - be^{-at}; \quad \frac{\dot{N}}{N} = bae^{-at} = -a(\ln N - \ln k).$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение, описывающее модель Гомперца:

$$\dot{N} = aN(\ln k - \ln N) \text{ или } \dot{N} = cN - aN \ln N, \quad (7.7)$$

где $c = a \ln k$.

На рис. 7.10 представлена схема моделирования уравнения (7.7).

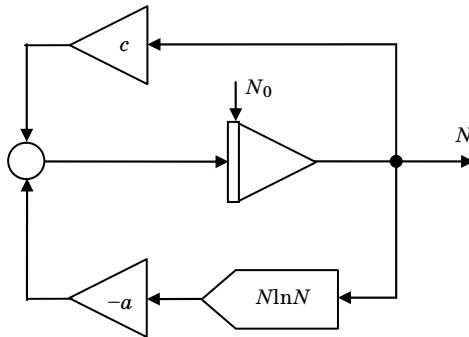


Рис. 7.10. Модель Гомперца

Конфигурация графика кривой Гомперца близка графику логистической кривой, но в отличие от последней ее точка перегиба не является точкой симметрии. В демографии кривой Гомперца описывается, например, динамика показателей уровня жизни; модификации этой кривой используются для моделирования показателей смертности.

7.2. Модели взаимодействия двух популяций

В природе встречаются разные типы взаимодействия популяций. В частности, различают взаимодействие популяций одного трофического уровня (конкуренция, симбиоз) или разных трофических уровней (хищник-жертва, паразит-хозяин).

В достаточно общем виде система дифференциальных уравнений, описывающая взаимодействие двух видов, может быть представлена в форме:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_1x + b_{12}xy - c_1x^2, \\ \dot{y} &= a_2y + b_{21}xy - c_2y^2,\end{aligned}\tag{7.8}$$

где x, y – численность видов; параметры a_i – константы собственной скорости роста видов; c_i – константы самоограничения численности (внутривидовой конкуренции); b_{ij} – константы взаимодействия видов ($i, j = 1, 2$).

Соответствие знаков коэффициентов b_{ij} различным типам взаимодействия приведено в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Типы взаимодействия двух популяций

Трофический уровень	Знаки коэффициентов b		
Нейтрализм	0	0	$b_{12}, b_{21} = 0$
Хищник-жертва	+	–	$b_{12} > 0, b_{21} < 0$
Конкуренция	–	–	$b_{12}, b_{21} < 0$
Симбиоз	+	+	$b_{12}, b_{21} > 0$

Исследование свойств моделей (7.8) приводит к некоторым важным выводам относительно исхода взаимодействия видов. Например, для уравнений хищник-жертва ($b_{12} > 0, b_{21} < 0$) типична ситуация, когда изменение численности популяций во времени носит колебательный характер. Уравнения конкуренции ($b_{12} > 0, b_{21} > 0$) предсказывают выживание одного из двух видов в случае, если собственная скорость роста другого вида меньше некоторой критической величины. Оба вида могут существовать, если произведение коэффициентов межпопуляционного взаимодействия меньше произведения коэффициентов внутривидового взаимодействия: $b_{12} b_{21} < c_1 c_2$.

Рассмотрим основные типы взаимодействий.

7.2.1. Независимые виды (нейтрализм)

Перед тем как перейти к описанию двух взаимодействующих видов, рассмотрим простой случай, когда виды не оказывают влияние друг на друга. Если для описания роста популяции каждого вида использовать экспоненциальную модель, то получим систему дифференциальных уравнений:

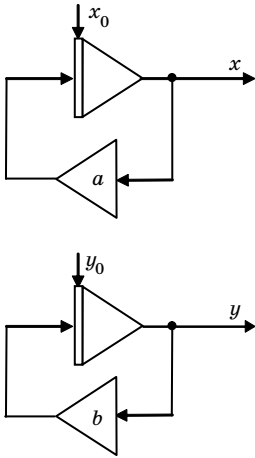


Рис. 7.11. Модель независимых популяций

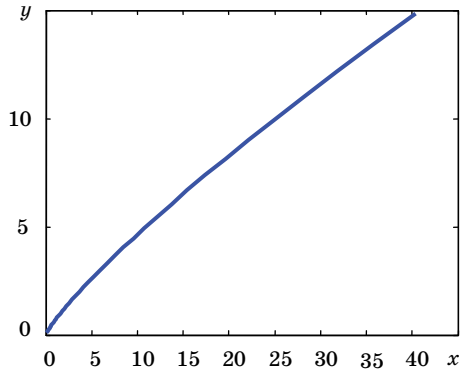


Рис. 7.12. Аллометрический рост

$$\begin{cases} \dot{x} = ax; & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = by; & y(0) = y_0, \end{cases} \quad (7.9)$$

где x и y – численность популяций; a и b – коэффициенты прироста популяций; x_0, y_0 – начальное количество индивидов.

Схема моделирования этих уравнений показана на рис. 7.11.

Решение системы (7.9) имеет вид: $x = x_0 e^{at}$, $y = y_0 e^{bt}$.

Исключая время t , получаем уравнение фазовой траектории

$$\frac{y}{y_0} = \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{b}{a}}.$$

Это так называемый *неравномерный (аллометрический) рост*.

При $b = a$ график будет иметь вид прямой линии, при $b < a$ это будет выпуклая кривая (рис. 7.12).

7.2.2. Взаимодействующие виды типа «хищник-жертва»

В динамике популяций встречаются случаи, когда изменение численности популяций во времени носит колебательный характер. Одним из самых известных примеров служит модель взаимодействия хищников и их добычи, когда между особями одного вида нет соперничества.

Рассмотрим два вида животных, один из которых служит пищей для другого. Типичные примеры, обычно встречающиеся в литературе – лисы и зайцы, волки и овцы, щуки и караси и т. п. Требуется исследовать динамику колебаний их численности. Приведем математическую постановку указанной задачи.

Обозначим число особей первого вида x , а второго – y . Если бы первый вид («жертвы») жил изолированно, то естественно предположить, что скорость увеличения числа его особей пропорциональна числу уже имеющихся особей:

$$\dot{x} = ax,$$

где a – положительный коэффициент прироста.

Если бы второй вид («хищники») жил изолированно, то он бы постепенно вымирал, так как ему нечем было бы питаться, причем опять-таки можно предположить, что

$$\dot{y} = -by,$$

где «коэффициент уменьшения» $b > 0$.

Допустим теперь, что оба вида живут совместно. Тогда коэффициент прироста жертв будет тем меньше, чем больше число y , так как хищники поедают жертв. Предположим, что коэффициент a уменьшается пропорционально y ; аналогичным образом будем считать, что коэффициент b изменяется пропорционально x . Тогда изменение численности обоих видов при их совместном существовании будет описываться следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a - \alpha y), \\ \dot{y} &= -y(b - \beta x),\end{aligned}\tag{7.10}$$

где a, b, α, β – положительные постоянные.

Схема моделирования этих уравнений в пакете SIMULINK показана на рис. 7.13.

Впервые нелинейная система уравнений (7.10) была изучена более 100 лет назад известным итальянским математиком Вито Вольтерра. Результаты исследований были подытожены в его знаменитой книге «Математическая теория борьбы за существование», выпущенной в Париже в 1931 г. (имеется русское издание 1976 г.).

Вольтерра показал, что хотя система (7.10) не решается в аналитическом виде, она допускает аналитический первый интеграл.

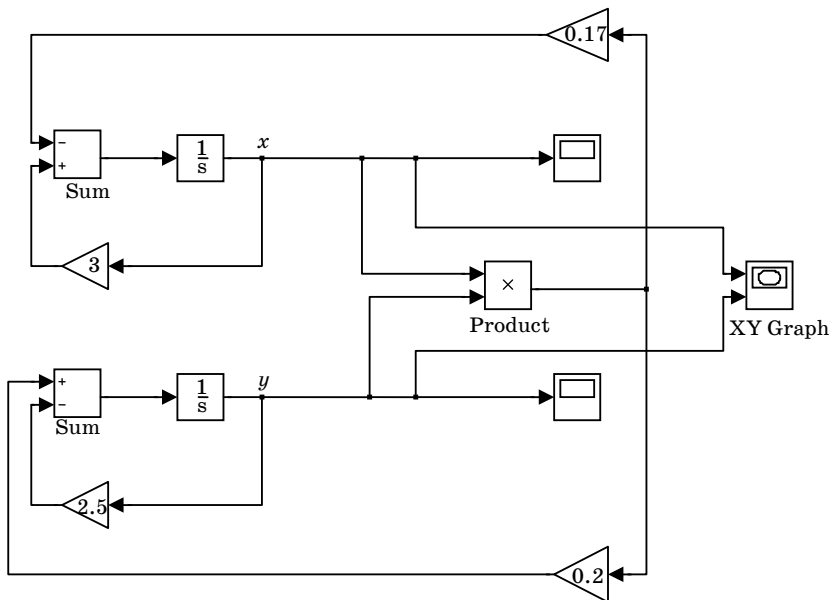


Рис. 7.13. Модель популяции «хищник-жертва»

Чтобы найти его, умножим первое уравнение на β , а второе на α и сложим их:

$$\beta \dot{x} + \alpha \dot{y} = a\beta x - b\alpha y. \quad (7.11)$$

Умножив первое уравнение на b/x , а второе на a/y и сложив, найдем

$$b \frac{1}{x} \dot{x} + a \frac{1}{y} \dot{y} = -b\alpha y + a\beta x. \quad (7.12)$$

Сопоставляя уравнения (7.11) и (7.12), получаем

$$\beta \dot{x} + \alpha \dot{y} - b \frac{d \ln x}{dt} - a \frac{d \ln y}{dt} = 0.$$

Проинтегрировав обе части последнего равенства, получим алгебраическое соотношение (первый интеграл):

$$\beta x + \alpha y - b \ln x - a \ln y = \text{const}. \quad (7.13)$$

Замечание. Другой, более короткий, путь вывода состоит в том, чтобы поделить почленно одно из уравнений (7.10) на дру-

гое. При этом получается уравнение с разделяющимися переменными, его интегрирование приводит к тому же результату.

Соотношение (7.13) можно преобразовать к виду $x^{-a}e^{\beta x} = cy^{-a}e^{\alpha y}$. Оно представляет собой инвариант, не зависящий от времени. В плоскости (x, y) ему отвечают некоторые замкнутые кривые. Кроме того, на плоскости (x, y) будет существовать точка, соответствующая состоянию равновесия – стационарная точка системы. Чтобы найти ее, положим в уравнениях (7.10) производные равными нулю:

$$x(a - \alpha y) = 0, \quad y(b - \beta x) = 0.$$

Отсюда находим координаты стационарной точки $x_1 = b/\beta$; $y_1 = a/\alpha$.

Уравнение (7.13) при разных значениях константы в правой части описывает семейство замкнутых кривых, окружающих эту точку. Их примерный вид показан на рис. 7.14.

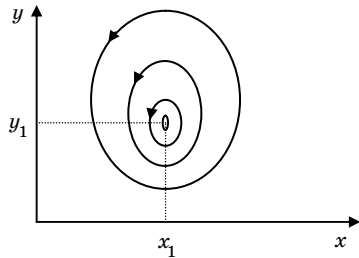


Рис. 7.14. Фазовые кривые

Если начальные численности видов близки к стационарным значениям x_1, y_1 , то колебания численности невелики и фазовые кривые (7.13) имеют вид эллипсов, оси которых параллельны осям координат. Чтобы доказать это, выполним линеаризацию дифференциальных уравнений в окрестностях стационарной точки. После замены переменных

$$x = u + b/\beta, \quad y = v + a/\alpha$$

уравнения (7.10) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{\alpha b}{\beta}v - \alpha uv, \\ \dot{v} &= -\frac{\beta a}{\alpha}u + \beta uv. \end{aligned}$$

Пренебрегая членами, содержащими произведение uv (члены второго порядка малости), получаем линейную систему дифференциальных уравнений, которая приводится к виду

$$\ddot{u} + abu = 0, \quad \ddot{v} + abv = 0.$$

Решение этих уравнений – гармонические функции типа $u = A \sin \omega t$, $v = B \cos \omega t$, где $\omega^2 = ab$ – удовлетворяют соотношению

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} = 1.$$

Следовательно, фазовые кривые в окрестностях стационарной точки имеют вид эллипсов. Движение по эллипсам происходит против часовой стрелки. Каждая из кривых обегается изображающей точкой за время $T = 2\pi/\sqrt{ab}$, представляющее собой общий период колебаний численности видов. Этот период подчиняется закону среднего геометрического

$$T = \frac{2\pi}{\ln 2} \sqrt{T_1 T_2} \approx 9,06 \sqrt{T_1 T_2},$$

где $T_1 = \ln 2/a$ – время, необходимое для удвоения числа жертв при отсутствии хищников, а $T_2 = \ln 2/b$ – время, необходимое для уменьшения вдвое числа хищников в отсутствие жертв.

В общем случае период зависит не только от параметров системы, но и от начального количества особей. Среднее число особей каждого вида за период постоянно и не зависит от начальных условий (это так называемый *закон сохранения средних*).

Пример графиков изменения величин x и y для $a = 4$, $b = 2$, $\alpha = 2,5$, $\beta = 1$ и начальных условий $x(0) = 3$, $y(0) = 1$ приведен на рис. 7.15.

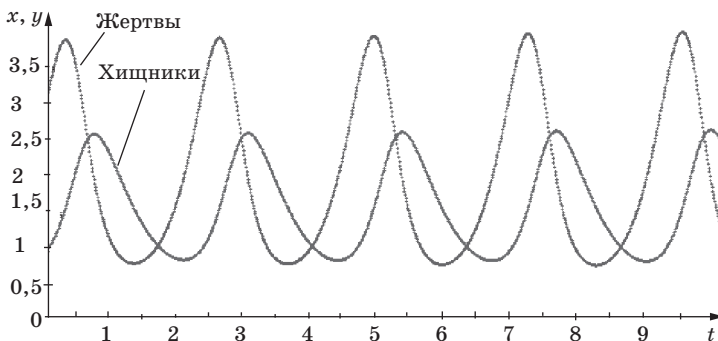


Рис. 7.15. Колебания численности хищников и жертв

Видно, что процесс имеет колебательный характер, причем максимумы кривых $x(t)$ и $y(t)$ несколько сдвинуты по фазе. При исходном соотношении численностей видов 3:1 обе популяции сначала растут. Когда число хищников достигает величины $y_1 = a/\alpha = 1,6$ (в этой точке $\dot{x} = 0$), популяция жертв не успевает восстанавливаться и начинает убывать. Уменьшение количества пищи через некоторое время начинает сказываться на популяции хищников, и, когда число жертв достигает величины $x_1 = b/\beta = 2$ (в этой точке $\dot{y} = 0$), число хищников тоже начинает сокращаться вместе с сокращением числа жертв.

Сокращение популяций происходит до тех пор, пока число хищников вновь не достигнет величины $y = a/\alpha = 1,6$. С этого момента начинает расти популяция жертв, через некоторое время пищи становится достаточно, чтобы обеспечить прирост хищников, обе популяции растут, и процесс повторяется. Количество жертв и хищников колеблется возле величин $x_1 = 2$, $y_1 = 1,6$ соответственно (численность может измеряться в сотнях, тысячах и т. п.).

Таким образом, взаимодействие видов в системе «хищник – жертва» приводит к периодическому колебанию их численности. Любопытно, что изменение численности каждого вида в отсутствие особей другого вида представляет собой монотонно протекающий, а не колебательный процесс.

Уравнения (7.10) допускают различные обобщения, учитывающие особенности взаимодействия видов с окружающей средой. Предположим, например, что производится регулярное истребление («отстрел») части обеих популяций, пропорциональное их численности. Это может быть учтено введением в правые части уравнений (7.10) дополнительных членов, в результате чего они примут вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a - \lambda_1 - \alpha x), \\ \dot{y} &= -y(b + \lambda_2 - \beta y),\end{aligned}$$

где числа λ_1, λ_2 характеризуют интенсивность истребления.

Анализ этой системы уравнений показывает, что если два вида истребляются равномерно и пропорционально их численности, то средняя численность жертв возрастает, а хищников – убывает (закон изменения средних).

Если истребляются только хищники, то их средняя численность не изменяется, а численность жертв возрастает. Если же истребляются только жертвы, то их среднее число не изменяет-

ся, а численность хищников – уменьшается. При этом период T малых колебаний уменьшается, если истребляются жертвы, и увеличивается, если истребляются хищники.

Таким образом, теоретический анализ нелинейной математической модели, описывающей взаимодействие популяций, позволяет сделать содержательные неочевидные выводы об их динамике. Для их уточнения и получения количественных результатов следует использовать компьютерное моделирование.

7.2.3. Конкурирующие виды (борьба двух видов за один ресурс)

Рассмотрим задачу о конкуренции двух видов за одни ресурсы. Примерами могут служить овцы и коровы, пасущиеся на общем лугу; плотва и караси, живущие в одном водоеме; злаки и сорняки на одном поле и т. п.

Обозначим число особей первой популяции x , а второй – y . Если бы первый вид жил изолированно, то его численность определялась бы уравнением:

$$\dot{x} = a_1 x, \text{ где } a_1 > 0. \quad (7.14)$$

Если оба вида живут совместно, то коэффициент прироста будет тем меньше, чем больше число y , так как первому виду достается меньше пищевых ресурсов. Коэффициент прироста первой популяции $r_1 = a_1 - b_1 F(x, y)$ зависит от количества пищи $F(x, y)$, поедаемой в единицу времени, потребности в пище b_1 и коэффициента прироста a_1 при отсутствии ограничений. Для простоты возьмем функцию $F(x, y)$ линейной $F(x, y) = \lambda_1 x + \lambda_2 y$, тогда уравнение (7.14) примет вид: $\dot{x} = [a_1 - b_1(\lambda_1 x + \lambda_2 y)]x$.

Аналогичные рассуждения справедливы и для второго вида. В результате приходим к следующей модели конкуренции двух видов за одни ресурсы:

$$\begin{cases} \dot{x} = [a_1 - b_1(\lambda_1 x + \lambda_2 y)]x, \\ \dot{y} = [a_2 - b_2(\lambda_1 x + \lambda_2 y)]y. \end{cases} \quad (7.15)$$

Мы получили систему уравнений типа (7.8).

Определим равновесные состояния системы, приравняв производные нулю. Можно выделить два случая, когда правые части уравнения (7.15) обращаются в нуль.

Случай 1 (вымирание одного из видов). Тогда либо $x = 0$, а численность второго вида стабилизируется на уровне $y = \frac{a_2}{b_2 \lambda_2}$,

либо $y = 0$, а численность первого вида стабилизируется на уровне $x = \frac{a_1}{b_1 \lambda_1}$. Оба варианта соответствуют выживанию одного из видов, второй вид не выдерживает конкуренции и вымирает.

Чтобы выяснить динамику соответствующих процессов, запишем разность уравнений (7.15), предварительно умножив первое из них на b_2/x , а второе – на b_1/y :

$$b_2 \frac{d \ln x}{dt} - b_1 \frac{d \ln y}{dt} = b_2 a_1 - b_1 a_2.$$

$$b_2 \frac{d \ln x}{dt} - b_1 \frac{d \ln y}{dt} = b_2 a_1 - b_1 a_2.$$

Объединяя логарифмические члены и потенцируя, получаем $x^{b_2}/y^{b_1} = C e^{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}$.

Если показатель экспоненты отрицателен, вымирает первый вид, если положителен – второй. Отсюда следует, что вымирает вид с меньшим отношением a_i/b_i , т. е. вид, более чувствительный к нехватке пищи.

Случай 2 (сосуществование видов). Рассмотрим выражения в квадратных скобках в уравнениях (7.15). Они могут одновременно обратиться в нуль, если

$$a_1 = b_1(\lambda_1 x + \lambda_2 y), \quad a_2 = b_2(\lambda_1 x + \lambda_2 y).$$

Это возможно лишь при выполнении условия

$$a_2 / a_1 = b_2 / b_1 = k, \tag{7.16}$$

которое означает одинаковый прирост численности вида на единицу пищи.

Тогда, поделив второе из уравнений (7.15) на первое, получим

$$\frac{dy}{dx} = k \frac{y}{x} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{y} = k \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства:

$$\ln y = k \ln x + C, \quad \text{т. е.} \quad y = C x^k, \quad \text{где} \quad C = y_0 x_0^{-k}.$$

Это означает, что траектории в плоскости x, y будут лежать на степенных кривых, проходящих через начало координат и точку (x_0, y_0) . Движение изображающей точки по любой из таких кривых прекратится при достижении прямой

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y = d, \quad (7.17)$$

где

$$d = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

поскольку в этот момент скорости \dot{x}, \dot{y} станут нулевыми. Наклон прямой (7.17) равен λ_1/λ_2 , она пересекает оси координат в точках d/λ_1 и d/λ_2 .

Схема моделирования системы уравнений (7.15) показана на рис. 7.16.

Рассмотрим некоторые результаты моделирования. Так, на рис. 7.17 показано равновесное состояние, при котором обе популяции выживают. Численность каждой из них стабилизируется на своем уровне, не зависящем от начальных условий. При моделировании были взяты следующие значения параметров: $a_1 = 1,1, a_2 = 1,65, b_1 = 0,02, b_2 = 0,03, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$, удовлетворяющие условию сосуществования видов (7.16): $a_2/a_1 = b_2/b_1 = 2/3$.

При этом общая система оказалась достаточно устойчивой: даже на длительном временном интервале моделирования не наблюдается признаков накопления ошибки.

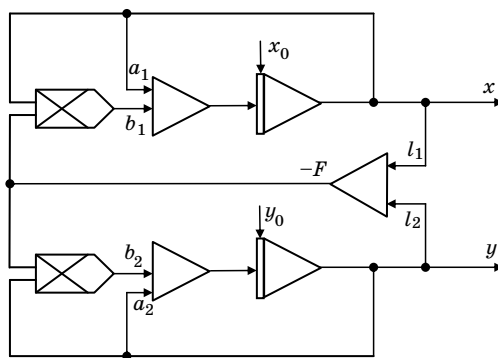


Рис. 7.16. Моделирование конкурирующих видов

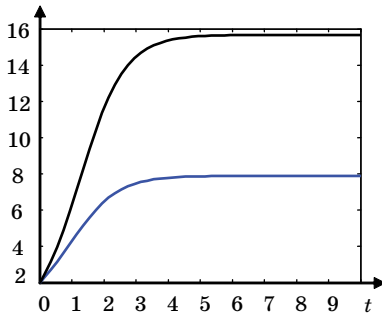


Рис. 7.17. Выживание обеих популяций

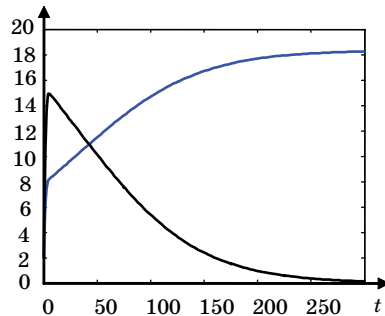


Рис. 7.18. Вымирание одной из популяций

Рис. 7.18 отражает состояние, полученное при изменении коэффициента a_2 на 1 % – от 1,65 до 1,63. Поскольку условие (7.16) нарушается, вторая популяция погибает. Из графиков видно, что сначала (до $t = 5$) ограничения на общую пищу не сказываются на характере динамики и происходит быстрый рост популяций. Затем пищи начинает не хватать и наступает затяжной период конкурентной борьбы ($5 < t < 300$), в результате которой один вид вымирает, а другой заполняет экологическую нишу. Аналогичная картина происходит при изменении любого другого коэффициента (кроме λ_1 и λ_2).

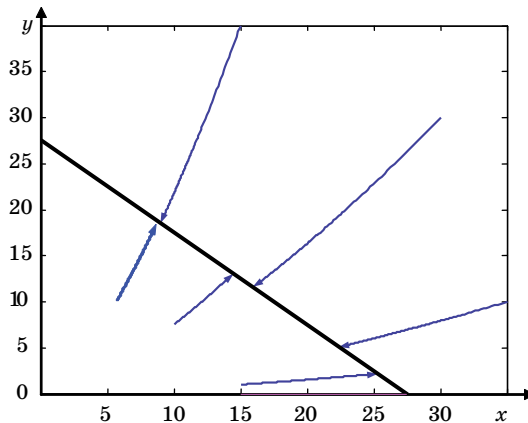


Рис. 7.19. Фазовый портрет при $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$; $a_1 = 1,1$; $a_2 = 1,65$; $b_1 = 0,02$; $b_2 = 0,03$

На рис. 7.19 показаны траектории сосуществования видов в плоскости (x, y) для случая $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Все траектории начинаются из разных начальных точек (x_0, y_0) , но заканчиваются на одной и той же стационарной прямой (7.17), описываемой уравнением $x + y = 27,5$. Это означает, что суммарная численность обеих популяций стабилизируется на величине 27,5, не зависящей от начальных условий.

Выполняя линеаризацию дифференциальных уравнений (7.15) в той или иной точке этой прямой, будем получать линейную систему вида $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ с вырожденной матрицей \mathbf{A} . Ее собственный вектор, отвечающий нулевому собственному числу, задает направление стационарной прямой. Второй собственный вектор направлен по касательной к фазовой траектории в точке линеаризации.

Заметим, что рассмотренная модель борьбы за общие ресурсы может применяться и в других прикладных областях, в частности для описания поведения конкурирующих фирм, где также возможны как случаи сосуществования, так и разорения («вымирания») одной из фирм.

Задачи и упражнения

1. Рассмотрим популяцию (рыб, животных), разбитую на три возрастные группы – младшего, среднего и старшего возрастов. Заданы величины p_1, p_2 – вероятности дожития особями каждой возрастной группы до следующего возраста и числа a_1, a_2, a_3 , характеризующие среднюю плодовитость каждой возрастной группы.

Требуется рассчитать предельное соотношение численностей x, y, z , если $a_1 = 0, a_2 = 9, a_3 = 6, p_1 = 1/3, p_2 = 1$.

Решение. Динамика популяции описывается матричным уравнением

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{X}(k), \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 12 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Предельное соотношение численностей равно отношению компонент главного собственного вектора \mathbf{H} матрицы \mathbf{A} . В нашем случае $\mathbf{H} = [24 \ 4 \ 1]^T$, откуда при $k \rightarrow \infty$ получаем $x : y : z = 24 : 4 : 1$.

2. Задача Нарайаны (Индия, XIV в.). Сколько коров и телок произойдет от одной коровы в течение 20 лет, если корова в начале каждого года приносит телку, а телка, достигнув трех лет, дает такое же потомство в начале каждого года.

Ответ. Через 20 лет стадо будет состоять из $N = 2 \cdot 872 + 595 + 406 = 2745$ голов.

3. В популяцию бактерий, численность которых удваивается каждую секунду, попадает вирус. Каждую секунду он съедает одну бактерию, после чего размножается делением. Какова судьба популяции бактерий, если их начальная численность равна N ?

Ответ. Популяция вымрет через N секунд.

4. Динамика эпидемии. В городе с 20 000 жителей появляются 50 инфекционных больных, что вызывает эпидемию. Предположим, что прирост больных за день пропорционален числу контактов больных и здоровых, т. е. произведению числа здоровых (еще не переболевших и не приобретших иммунитет) на число больных. Коэффициент пропорциональности k (он характеризует скорость распространения эпидемии) примем равным 10^{-4} .

Требуется составить MATLAB-программу для моделирования динамики эпидемии и определить, на какой день будет максимальное число заболевших?

Решение. Пусть x – число больных, y – число здоровых. В соответствии с условиями задачи имеем два дифференциальных уравнения

$$\dot{x} = -kxy, \quad k = 0,0001, \quad \dot{y} = kxy - y, \quad x(0) = 50, \quad y(0) = 20\,000.$$

Программа моделирования этой системы уравнений в пакете MATLAB имеет вид:

```
T = [0 12]; X0 = [20000 50]'; % Период наблюдения и начальные условия
[t, X] = ode23('epid', T, X0); % Моделирование
plot(t, X(:,2)), grid
```

Предварительно строим вспомогательную функцию **xdot** для формирования правых частей дифференциальных уравнений:

```
function xdot = epid(t, x)
k = 0.0001;
x1 = -k*x(1)*x(2)
y1 = k*x(1)*x(2)-x(2);
xdot = [x1; y1];
```

Результат моделирования показывает, что максимальное число больных будет на шестой день: $x(6) = 3119$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии рассмотрены основные этапы структурного моделирования линейных динамических систем, начиная от получения математической модели и заканчивая анализом схемы моделирования, реализованной на сумматорах, интеграторах и других вычислительных блоках. Приведенные примеры моделей относятся к разным прикладным областям – теории управления, механике, социологии, динамике популяций. Следует заметить, что изучение изложенного материала представляет собой лишь первый шаг в овладении технологией моделирования. Следующие важные шаги – это освоение одного или нескольких пакетов компьютерного моделирования и накопление практического опыта по решению реальных задач. Как невозможно освоить езду на велосипеде, читая теоретические пособия, так невозможно научиться компьютерному моделированию, читая книги по моделированию.

Кроме того, следует предостеречь от чрезмерного доверия к результатам компьютерного моделирования, свойственного большинству студентов, искренне полагающих, что «раз посчитал компьютер, то это верно». Практика моделирования показывает, что в большинстве случаев первые результаты компьютерного моделирования оказываются ошибочными и требуется приложить немало творческих усилий, чтобы проверить достоверность полученного решения.

Наиболее подходящими математическими пакетами для студентов технических вузов являются пакеты MATLAB, SIMULINK и MAPLE. Они снабжены специальными библиотеками подпрограмм (так называемыми тулбоксами), ориентированными на разные прикладные области – энергетику, авиацию, экономику, связь, что позволяет решать широкий круг научно-технических задач, как линейных, так и нелинейных.

Библиографический список

1. *Зарубин В. С.* Математическое моделирование в технике: Учебник. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001.
2. *Мироновский Л. А.* Моделирование разностных уравнений: Учеб. пособие / ГУАП. СПб., 2004.
3. *Мироновский Л. А., Петрова К. Ю.* Введение в MATLAB: Учеб. пособие / ГУАП. СПб., 2006.
4. *Мирошник И. В.* Теория автоматического управления. Линейные системы. СПб.: Питер, 2005.
5. *Пантелеев А. В., Якимова А. С., Босов А. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 2001.
6. *Ризниченко Г. Ю.* Математические модели в биофизике и экологии. М.; Ижевск: НИЦ «РХД», 2003.
7. *Савелов А. А.* Плоские кривые. М.; Ижевск: НИЦ «РХД», 2002.
8. *Щербакова Ю. В.* Дифференциальные уравнения: Текст лекций. М.: Эксмо, 2007.
9. *Юревич Е. И.* Теория автоматического управления: Учебник. СПб.: БХВ-Петербург, 2007.
10. *Яковлев С. А., Советов Б. Я.* Моделирование систем: Учебник. М.: Высш. шк., 2007.

Содержание

Предисловие	3
1. Общие вопросы моделирования.....	5
1.1. Основные понятия и определения	6
1.1.1. Определение модели и моделирования	6
1.1.2. Проблема адекватности модели	9
1.2. Виды моделей.....	10
1.3. Математические модели.....	15
1.4. Этапы моделирования.....	19
1.5. Математические основы теории моделирования	25
1.5.1. Анализ размерностей и теория подобия.....	26
1.5.2. Теория инвариантов и ее роль в теории моделирования ..	32
<i>Задачи и упражнения</i>	<i>35</i>
2. Математические модели динамических систем	36
2.1. Классификация дифференциальных уравнений	36
2.2. Построение математических моделей динамических систем.	37
2.3. Решение линейных дифференциальных уравнений.....	42
2.3.1. Свойства линейных дифференциальных уравнений.....	42
2.3.2. Решение однородного дифференциального уравнения.....	44
2.3.3. Решение неоднородного дифференциального уравнения..	48
2.3.4. Системы линейных дифференциальных уравнений	51
2.4. Матричные методы решения дифференциальных уравнений	54
2.4.1. Метод матричной экспоненты.....	54
2.4.2. Метод собственных векторов	56
2.5. Краевые и нелинейные дифференциальные уравнения	58
2.5.1. Краевые задачи	58
2.5.2. Нелинейные дифференциальные уравнения	62
<i>Задачи и упражнения</i>	<i>65</i>
3. Моделирование дифференциальных уравнений	68
3.1. Принцип структурного моделирования	68
3.2. Типовые схемы моделирования.....	70
3.2.1. Схема на двух интеграторах с отрицательной обратной связью	70
3.2.2. Схема на двух интеграторах с положительной обратной связью	72
3.2.3. Схема на апериодических звеньях с отрицательной обратной связью.....	74
3.3. Моделирование дифференциального уравнения.....	75
3.4. Моделирование системы дифференциальных уравнений.....	83
3.5. Эквивалентные схемы моделирования	85
<i>Задачи и упражнения</i>	<i>90</i>
4. Моделирование передаточных функций.....	92
4.1. Передаточные функции и дифференциальные уравнения	92
4.2. Структурное моделирование передаточных функций	97

4.3. Моделирование цепочки аperiodических звеньев	100
4.4. Моделирование блок-схем	103
4.5. Передаточные функции и формула Мэсона	106
4.6. Канонические реализации передаточных функций	119
<i>Задачи и упражнения</i>	127
5. Моделирование функций времени	132
5.1. Компьютерная реализация функций времени	132
5.2. Метод последовательного дифференцирования	133
5.3. Метод характеристического полинома	135
5.4. Метод определителя Вронского	137
5.5. Метод списков	139
5.6. Моделирование кривых	146
5.6.1. Способы задания кривых	146
5.6.2. Моделирование плоских кривых	149
5.6.3. Моделирование пространственных кривых	159
<i>Задачи и упражнения</i>	162
6. Анализ линейных моделей	164
6.1. Анализ устойчивости и чувствительности	164
6.2. Анализ управляемости	174
6.3. Управляемость системы перевернутых маятников	179
6.4. Анализ наблюдаемости	182
6.5. Грамианы управляемости и наблюдаемости	188
6.6. Анализ минимальности линейных моделей	191
6.7. Анализ демографической модели	196
6.8. Эквивалентные преобразования линейных моделей	204
6.9. Редукция линейных моделей	207
<i>Задачи и упражнения</i>	209
7. Моделирование динамики популяций	213
7.1. Модели развития изолированной популяции	213
7.2. Модели взаимодействия двух популяций	226
7.2.1. Независимые виды (нейтрализм)	227
7.2.2. Взаимодействующие виды типа «хищник-жертва»	228
7.2.3. Конкурирующие виды (борьба двух видов за один ресурс)	234
<i>Задачи и упражнения</i>	238
Заключение	240
Библиографический список	241

Учебное издание

Мироновский Леонид Алексеевич

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Редактор *Г. Д. Бакастова*
Верстальщик *С. Б. Мацапура*

Сдано в набор 2.03.09. Подписано к печати 15.06.09.
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печ л. 15,25.
Уч.-изд. л. 13,31. Тираж 150 экз. Заказ № 427.

Редакционно-издательский центр ГУАП
190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., 67