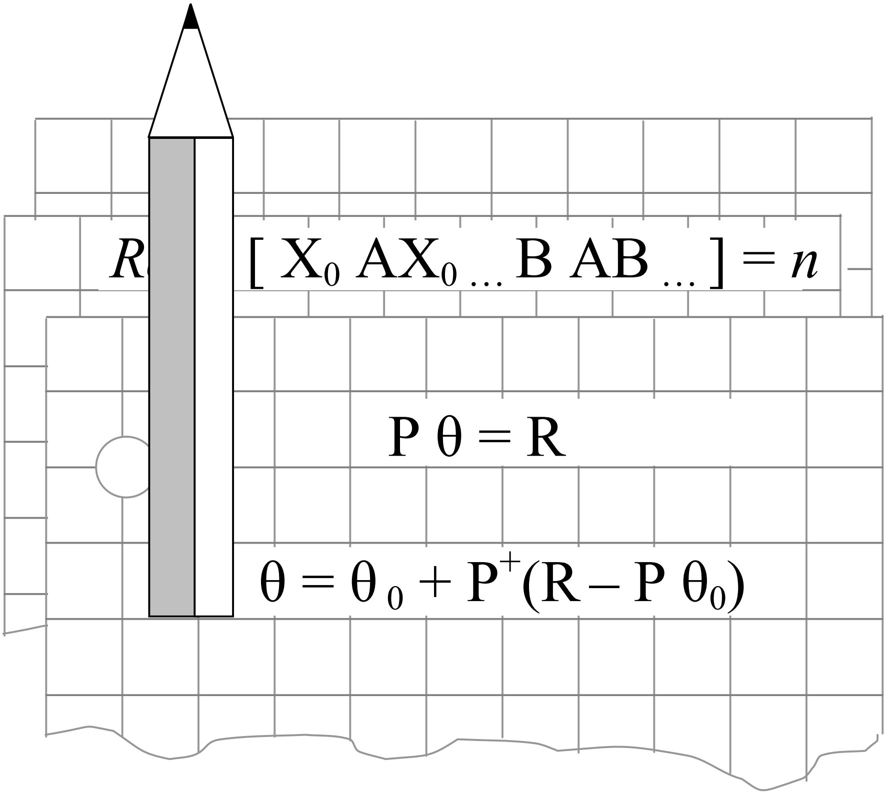
Н. А. Б а л о н и н

ТЕОРЕМЫ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ



Н. А. Балонин

ТЕОРЕМЫ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2010

УДК 62.52
ББК 32.965
Б 20

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. Веремей Е.И.,
д-р техн. наук, проф. Городецкий А.Е.

Рекомендовано к печати научно-техническим советом НИИ информационно-управляющих систем СПбГУ ИТМО

Балонин Н.А.
Б 20 Теоремы идентифицируемости. –СПб.: Изд-во «Политехника», 2010. 48 с.

ISBN 978-5-7325-0964-9

В книге освещены теоремы идентифицируемости для классов линейных непрерывных стационарных и нестационарных динамических систем, рассмотрено продолжение чистой теории систем Калмана применительно к параметрической идентификации.

Книга представляет несомненный интерес для преподавателей, студентов старших курсов и аспирантов, а также для исследователей, занимающихся построением систем адаптивного управления.

Без объяв. ББК 32.965

О Г Л А В Л Е Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ

Рассматриваемые ниже системные исследования требуют некоторых комментариев. На I Международном конгрессе ИФАК по автоматическому управлению (Москва, I960, см. [1]) Калман отмечал, что «несмотря на постановку и эффективное решение многих новых проблем, понимание многих фундаментальных аспектов регулирования остается неглубоким». Это понимание он связывал с разработкой так называемой «чистой» теории управления, в которой ввел новые тогда понятия «управляемость» и «наблюдаемость», а также изложил принципы двойственности и разделения, позволяющие использовать параллель между ними.

Уместность анализа системной идентифицируемости (наблюдаемости параметров) логически вытекает из устоев этой науки. Однако сам Калман не работал в этой области, из ранних работ известен критерий, написанный для однородных стационарных дискретных систем Ли [2]. Непрерывный случай рассматривался в учебнике по теории автоматического управления Ройтенберга [3], и неудачно, поскольку автор, апеллируя к критерию Ли, ввел в матрицу идентифицируемости матричную экспоненту

$$\mathrm{W}_\tau = [x(t_0),\ e^{\mathrm{A}\tau}\, x(t_0),\, e^{2\mathrm{A}\tau}\, x(t_0),\ \ldots,\ e^{(n-1)\,\mathrm{A}\tau}\, x_0]$$

что, конечно, избыточно, и не избавляет от некоторых неудобных вопросов. Составные части этой матрицы здесь не комментируются, поскольку автор предполагает достаточный уровень образования у читателя, чтобы пропускать столь общие моменты.

Во-первых, специалист по матричному исчислению, не будучи специалистом по теории управления, укажет, что ранги системных матриц, построенных на А и на $e^{\mathrm{A}\tau}$, совпадают при любом $\tau>0$. Какой смысл тогда настолько утяжелять критерий? Никакого, и тем не менее, у Ройтенберга экспонента фигурирует, причем в переизданиях книги (учебника по ТАР) тоже.

Во-вторых, Прасолов [4] еще в восьмидесятых годах привел ряд теорем, касающихся этого очевидно простого случая, и показал, что по матрице дискретной реализации непрерывной системы, с шагом τ, а именно ее находимость определяет критерий Ли, никак нельзя восстановить матрицу системы непрерывной. Это очевидно, например, для осциллирующих систем, отличающихся такой кратностью периода, чтобы при дискретизации различие в процессах было не видно.

Получается, что «калманоподобный» критерий Ройтенберга не только утяжелен, но и вообще неверен, если настаивать на восстановлении параметров непрерывной системы по частной выборке сигналов с шагом по времени τ.

Но только ли Ройтенберг споткнулся о «простой и очевидный» непрерывный случай? Не спасает положения опубликованный в восьмидесятых годах справочник по теории автоматического управления [5].

Статус справочника обязывает приводить, конечно, системные критерии, и, естественно, им отводится должное место. Однако к тому времени вопрос о идентифицируемости не был разработан в литературе, единой точки зрения на предмет не было, а попытка выработать позицию с ходу, столь же естественно привела лишь к очередному парадоксу в духе критерия для непрерывных систем Ройтенберга. Предложенный, теперь уже, в справочнике по ТАУ [5], на стр. 59, критерий заведомо не выполняется, так как множество «совместно полностью наблюдаемых и параметрически идентифицируемых систем», согласно ему, пусто.

Парадокс объясняется следующим. Авторы вводят некоторый «калмановский», по виду, критерий для системы, данной ее описанием в пространстве состояний. В ранговый критерий попадает общее число ее параметров. Это число велико и ошибка справочника состоит в том, что система в пространстве состояний имеет множество эквивалентных реализаций. Соответственно, параметрически «идентифицировать» систему на этом множестве в принципе невозможно. Таким образом, теоретически выведенному критерию не отвечает даже система первого порядка с тройкой параметров a,b,c.

Решает вопрос обращение к теории канонических форм и сокращение числа искомых параметров, но этого как раз не было сделано.

Таким образом, к настоящему времени мы имеем ситуацию, когда не только учебник по ТАУ, но и сводный справочник по этой важной дисциплине в элементарном вопросе, касающемся системных исследований, тиражируют неверные представления. Это положение нужно менять.

К сожалению, перекос надстраиваемой с разных сторон когда-то общей теории систем оказался настолько большим, что понятия и критерии идентифицируемости, взятые из разных источников, приводят к диаметрально противоположным по смыслу результатам. Одна и та же система объявляется идентифицируемой и, наоборот, не идентифицируемой, что, согласитесь, плохо вписывается в концепцию общности теории, в которой достигнуто глубокое понимание фундаментальных ее аспектов.

Так, например, согласно Аоки [6], наблюдаемость системы не является необходимой предпосылкой ее идентифицируемости, тогда как известная теорема об 1-идентифицируемости Ли утверждает нечто прямо противоположное [2]. Курьезность ситуации усиливается тем, что первый автор ссылается на второго в качестве предшественника. Читаем, видим, по Аоки «по самой сути вещей условия идентифицируемости есть условия, обеспечивающие сходимость стохастических аппроксимаций».

Приведем небольшой пример, на котором обнаруживается принципиальное разногласие авторов (он «принадлежит Фукао» и сообщен Аоки, как отмечает автор, «в частной беседе»). Посмотрим внимательнее, что же было сообщено. Перед нами объект второго порядка

$$x_i = \mathrm{A}x_i\,, \quad y_i = \mathrm{C}x_i\,, \text{ где } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \ \mathrm{C} = (1 \quad 0),$$

представляющий собой совокупность двух несвязанных подсистем первого порядка. Одна из них ненаблюдаема, ее параметр находится за пределами досягаемости, что обнаруживается по критерию, приведенному еще Р. Ли, ибо $Rank\,[x_0 \quad \mathrm{A}x_0] < 2$ при любом x_0.

Но разве это препятствие для алгоритмов стохастической аппроксимации? Конечно же нет: «даже при отсутствии помех такая система ненаблюдаема, так как не удовлетворяет условию, накладываемому на ранг расширенной матрицы (наблюдаемости). Однако эта система идентифицируема», пишет Аоки, ибо коэффициент $a = y_i / y_{i-1}$.

Любопытно только, откуда мы узнаем, что исследуемая система имеет кратные собственные значения *a,* если мы даже значение *a* не знаем? Ход мысли непостижим, однако в [7] ляп, сообщенный «в частной беседе», назван «строгим математическим обоснованием наблюдаемости и идентифицируемости для детерминированных и стохастических систем». Как видно, ошибки учебников имеют свойство размножаться, будучи взятыми на веру. Кстати, в примере Фукао резонно задаться и иным вопросом. При чем тут стохастические аппроксимации? Стоит напомнить, что эпитетом «чистая» теория Калман, как следует из его основополагающего труда, хотел подчеркнуть детерминистическое начало своей концепции.

Сделать общую теорию систем классически ясной и понятной составляло предмет особых его забот, и автор тщательно подбирал математический фундамент. У недостаточно последовательных последователей же, например, у Аоки, системное свойство перекочевало в разряд критериев сходимости алгоритмов, что идет в разрез и грубо с уже имеющимися традициями. Помимо рекуррентных существуют и прямые методы, для которых термин «сходимость» неприложим, он не имеет смысла. Вообще, понятию и критериям идентифицируемости не везет в научной литературе, отношение к ним складывается самое плохое, небрежное.

Необходимость побеседовать об условиях идентифицируемости назрела, поскольку на их счет, как видно, нет общего мнения, а есть и ошибки, и отступления от жанра, предложенного, собственно, Калманом.

ГЛАВА I
ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

1.1. КРИТЕРИЙ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ

Модель линейной однородной системы имеет вид

$$\dot{x} = \mathrm{A}\, x,$$

где $x \in \mathrm{R}^n$ – вектор состояния, $x_0 = x(0)$.

Определение. Линейная однородная система называется полностью идентифицируемой по вектору состояния, если при заданном векторе начальных условий x_0 матрица параметров А может быть однозначно восстановлена за конечный отрезок времени идентификации по одной временной последовательности $x = x(t)$.

Иначе, пара (А, x_0) полностью идентифицируема или идентифицируема вполне, когда множество пар ($\underline{\mathrm{A}}$, x_0), объединенных общностью интегральной кривой $x = x(t)$, $x_0 = x(0)$, вырождается в точку $\underline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}$. В противном случае указанная пара неидентифицируема.

Критерий параметрической идентифицируемости напоминает критерии управляемости и наблюдаемости. Докажем это в рамках следующей теоремы идентифицируемости.

Теорема 1. Необходимое и достаточное условие полной идентифицируемости пары (А, x_0) состоит в следующем

$$Rank\ [x_0, \mathrm{A}x_0, \mathrm{A}^2 x_0, \ \dots, \ \mathrm{A}^{n-1} x_0\ ] = n\ .$$

Матрицу в квадратных скобках будем называть матрицей идентифицируемости однородной системы и обозначать W_0.

Доказательство теоремы. Опирается на разложение матричной экспоненты в конечную сумму слагаемых по степеням матрицы системы

$$e^{\mathrm{A}t} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i(t)\, \mathrm{A}^i,$$

где p – степень минимального аннулирующего полинома матрицы А и $\alpha_i(t)$ – коэффициенты интерполяционного полинома Лагранжа-Сильвестра для экспоненциальной функции, определенной на спектре А [8].

Пары ($\underline{\mathrm{A}}$, x_0), объединенные общностью интегральной кривой

$$x(t) = e^{\mathrm{A}t}\, x_0 = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i(t)\, \mathrm{A}^i\, x_0$$

порождаются уравнением ($\underline{\mathrm{A}}$ – A) $x(t)$ = 0, следующим из равенства производных, вычисленных в силу исходной и сравниваемой однородных систем, начальное состояние фиксировано.

Функции $\alpha_k(t)$ линейно независимыми между собой на любом интервале времени идентификации, отсюда ($\underline{\mathrm{A}}$ – A) [x_0, Ax_0, $\mathrm{A}^2 x_0$, … , $\mathrm{A}^{p-1} x_0$] = 0.

Матрица A является корнем своего минимального аннулирующего полинома ранга p. Любая ее степень, выше p, выражается через предыдущие, поэтому ранг составной матрицы в квадратных скобках совпадает с рангом матрицы идентифицируемости W_0.

Система уравнений однозначно разрешима в смысле $\underline{\mathrm{A}}$ = A тогда и только тогда, когда W_0 невырождена.

Доказательство окончено.

Следствие 1.1. Множество однородных моделей, порождаемых общностью интегральной кривой, описывается уравнением

$$\underline{\mathrm{A}}\mathrm{W}_0 = \mathrm{A}\mathrm{W}_0.$$

Любая модель $\underline{\mathrm{A}}$ отличного от точки $\underline{\mathrm{A}}$ = A множества, соответственно, неидентифицируема по состоянию.

Следствие 1.2. Проекция произвольной точки C (матрицы притяжения) на множество, ограниченное выбором начального условия x_0, имеет вид

$$\underline{\mathrm{A}} = \mathrm{C} + (\mathrm{A} - \mathrm{C})\, \mathrm{W}_0\, \mathrm{W}_0^+$$

где $\underline{\mathrm{A}}$ – матрица, наиболее близкая к C по фробениусовой норме разности $\| \underline{\mathrm{A}} - \mathrm{C} \|$, W_0^+ – псевдообратная матрица. При C = A имеем $\underline{\mathrm{A}}$ = A. Следствие помогает перемещаться по множеству неидентифицируемых систем, получая поведенческих двойников исходной системы на основе матрицы идентифицируемости. Среди них существует единственная система с минимальной по фробениусовой норме матрицей $\underline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}\, \mathrm{W}_0\, \mathrm{W}_0^+$.

Следствие 1.3. Системы, у которых степень минимального аннулирующего полинома p матрицы A меньше степени ее характеристического полинома, т. е. $p \leq n$, неидентифицируемы при любом векторе начального состояния x_0.

К неидентифицируемым относится, в частности, система с единичной матрицей A = E.

Множество однородных систем, разделяющих любую ее интегральную кривую, отслеживает выбор начального условия $\underline{A}\, x_0 = x_0$, не стягиваясь в точку. Для вектора единичного радиуса получаем

$$\underline{A} = C + (x_0 - C\, x_0)\, x_0^{T}.$$

Пример 1.1. Рассмотрим однородную систему с единичной матрицей и вектором начальных условий единичного радиуса

$$\dot{x} = A\, x\,,\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \ x_0 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ее поведенческий двойник, минимально отстоящий от устойчивой системы с C = –E, имеет матрицу вида

$$\underline{A} = C + (x_0 - C\, x_0)\, x_0^{T} = 2\, x_0\, x_0^{T} - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Динамический процесс системы с вычисленной матрицей $\underline{A}$ устойчив при повороте вектора начальных условий на 90^0. Ее фазовый портрет совпадает с портретом системы A = E вдоль направления x_0, а вдоль ортогонального направления – с портретом системы C = –E. Проекция разделяет черты исходной и проецируемой систем независимо от выбора опорного вектора начального условия, ее фазовый портрет типа седло дрейфует вслед за x_0, сохраняя преемственность обоим источникам.

Следствие 1.4. Фазовый поток проекции одной однородной системы на множество неидентифицируемых систем, индуцированное парой (A, x_0), совпадает с фазовыми потоками индуктора вдоль вектора x_0 и проектора вдоль прочих направлений, отделенных от x_0 промежуточной фазой.

Совмещение устойчивых и неустойчивых систем порождает седловые точки, такие фазовые портреты встречаются в задачах оптимального управления (оптимальное управление достигается в неидентифицируемом для полной системы «объект плюс регулятор» режиме).

1.2. МОДАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ

Рассмотрим разложение вектора x_0 пары (A, x_0) в базисе собственных векторов матрицы однородной системы

$$A = VDV^{-1}, \; D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, V = (\, V_1 \; V_2 \, \ldots \, V_n \,),$$

где D – диагональная матрица собственных чисел, V – столбцовая матрица собственных векторов, пусть

$$x_0 = V_1\xi_1 + V_2\xi_2 + \ldots + V_n\,\xi_n = V\,\xi, \;\; \xi \in C^n.$$

Нетрудно показать, что

$$W_0 = V \operatorname{diag}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\, W_\lambda, \;\; W_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Невырожденная матрица V не влияет на ранг W_0, поэтому модальный критерий идентифицируемости сводится к виду

$$Rank\,(diag(\xi)\; W_\lambda\,) = \; n.$$

Определитель матрицы Вандермонда W_λ равен нулю тогда и только тогда, когда среди собственных значений есть кратные. Отсюда получаем простое решение проблемы идентифицируемости.

Пара (A, x_0) вполне идентифицируема тогда, когда вектор начального состояния возбуждает все собственные движения однородной системы, для некратных собственных значений $Rank\; W_0 = Rank\,(diag\,(\xi))$.

У систем с кратными собственными значениями

$$Rank\ \mathrm{W}_0 \leq Rank\ \mathrm{W}_\lambda < n,$$

соответствующие собственные векторы определены с точностью нескольких произвольных постоянных и свободно избираются в пределах двумерных и более подпространств, в том числе, ортогонально x_0. Такие системы заведомо неидентифицируемы.

Этот вывод иллюстрирует следствие 1.3 теоремы 1.

Модальный аналог следствия 1.1, помогающий находить множество однородных моделей неидентифицируемых систем, состоит в следующем.

Собственные числа и собственные векторы однозначно определяют матрицу. Если убрать из уравнений модального разложения A ряд собственных векторов (и собственных чисел), не связанных с проекциями x_0, то оставшаяся часть уравнений, подобно условию $\underline{\mathrm{A}}\mathrm{W}_0 = \mathrm{A}\mathrm{W}_0$, определит выбор $\underline{\mathrm{A}}$ уравнениями $\underline{\mathrm{A}}\mathrm{V}_1 = \lambda_1\mathrm{V}_1$, $\underline{\mathrm{A}}\mathrm{V}_2 = \lambda_2\mathrm{V}_2$, … , $\underline{\mathrm{A}}\mathrm{V}_k = \lambda_k\mathrm{V}_k$, $k<n$.

Для анализа матриц A сложной структуры модальное описание исследуемой проблемы становится громоздким. Смысл формулировки условий ее разрешимости сохраняется, во главе угла остается возбуждение всех модальных движений, однако проекции на собственные и жордановы векторы, в общем, находятся неоднозначно. В таком случае лучший иллюстративный материал дает теория циклических инвариантных подпространств, помогающая проще обозначить границы области «неидентифицируемости».

Пример 2.1. Вернемся к однородной системе с единичной матрицей и произвольным вектором начальных условий

$$\dot{x} = \mathrm{A}\,x\,,\ \ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \ x_0 \in \mathrm{R}^n.$$

В данном случае собственные значения кратные $\lambda_1=\lambda_2=1$. Соответствующие им собственные векторы избираются произвольно, в том числе, параллельно и ортогонально вектору x_0.

Доопределим $\mathrm{V}_1 = x_0$, отсюда условие для нахождения множества неидентифицируемых систем $\underline{\mathrm{A}}\mathrm{V}_1 = \lambda_1\mathrm{V}_1$ сводится к виду $\underline{\mathrm{A}}\ x_0 = x_0$. Это условие выводилось ранее из других соображений. Здесь оно иллюстрирует модальный подход, позволяющий указать вид общей для систем с матрицей $\underline{\mathrm{A}}$ интегральной кривой $x(t) = \mathrm{e}^{\,t}\,x_0$.

1.3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ

Практическая сторона дела в вопросе об идентифицируемости состоит в возможности проверить критерий еще до того, как нам стали известны параметры однородной системы.

Теорема 2. Ранг матрицы идентифицируемости W_0 однородной системы совпадает с рангом матрицы, построенной на выборке динамического процесса $W_\tau = [x(t_0),\ x(t_0+\tau),\ \ldots,\ x(t_0+(n\text{-}1)\tau)]$; критерий идентифицируемости можно записать в двух эквивалентных формулировках

$$Rank\ W_0 = n \quad \text{или} \quad Rank\ W_\tau = n.$$

Доказательство. Отсчеты, образующие столбцы матрицы W_τ, попарно связаны между собой матричной экспонентой $\Phi = e^{A\tau}$, т. е.

$$W_\tau = [x(t_0),\ \Phi\, x(t_0),\ \Phi\, x(t_0+\tau),\ \ldots\ ] = [x_0,\ \Phi\, x_0,\ \Phi^2\, x_0,\ \ldots,\ \Phi^{(n-1)} x_0].$$

В теории матриц последовательностям $\xi,\ A\xi,\ A^2\xi\ ,\ \ldots\ ,\ A^{n-1}\xi$ уделено большое внимание. Матрицы, порождающие такой базис, называются циклическими. Известно, что циклические инвариантные подпространства матричной экспоненты Φ совпадают с циклические инвариантными подпространствами матрицы А. Это означает, что в анализе ранга матрицы, построенной на циклической последовательности $\xi,\ A\ \xi,\ A^2\ \xi\ ,\ \ldots\ ,\ A^{n\text{-}1}\xi$, матрицы А и Φ взаимозаменяемы при любом $\xi \in R^n$, в том числе при $\xi = x_0$.

Доказательство теоремы окончено. Критерий при внешней простоте его нетривиален, поскольку как следует из работы Прасолова [4], найти параметры (не измеряя производных сигналов) по дискретной выборке нельзя, а вот проверить системное свойство идентифицируемости можно. Что делает его вполне осмысленным, как предварительный критерий.

Следствие 2.1. Вычислительные методы идентификации оперируют матрицей метода наименьших квадратов $P = W_\tau W_\tau^T$, построенной для выборки протяженности равной или большей n. При отсутствии шумов измерений ранг матрицы также служит критерием идентифицируемости: $Rank\ P = n$.

Более глубоким следствием той же теории является то, что интегральная кривая однородной системы не покидает циклическое инвариантное подпространство L, образованное вектором x_0. В то же время, она не входит во вложенные циклические инвариантные подпространства, покинуть которые будет не в состоянии. Ранг матрицы идентифицируемости можно установить по выборке динамического процесса с произвольным шагом, т. е. $Rank\ W_0 = Rank\ [x(t_0),\ x(t_1),\ \ldots,\ x(t_{n-1})] = dim\ L$.

1.4. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ

Теорема об идентифицируемости сформулирована применительно к однородной системе, параметры которой полностью неизвестны. Вместе с тем, знание части строк не облегчает задачу восстановления остальных элементов матрицы, поскольку уравнение $(\underline{A}-A)W_0=0$ распадается на n независимых подсистем для строк $(\underline{a}_i - a_i)W_0=0$, $i=1..n$. Условие идентифицируемости пары (A, x_0) адекватно условию идентифицируемости пары (a_i, x_0), содержащей любую из строк A. Например, правомерно анализировать условие идентифицируемости однородной системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; x_0 \in R^n,$$

при помощи общего критерия. Несколько более сильным утверждением является положение о применимости общего критерия к задаче, в которой матрица системы задана с точностью до n параметров $A=A(a)$, $a \in R^n$.

Полностью идентифицируемая однородная система невырожденным преобразованием координат $z = W_0^{-1}x$ приводится к каноническому виду идентифицируемости

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 1 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \; z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство следует логике известного построения фробениусовой формы матрицы (или, иначе называя, сопровождающей матрицы для характеристического полинома A) подобным преобразованием $T^{-1}AT$ с произвольной невырожденной матрицей $T=[\,\xi,\ A\,\xi,\ A^2\,\xi\,, \dots,\ A^{n-1}\,\xi\,]$, $\xi \in R^n$. Для полностью идентифицируемой системы матрица преобразования заведомо существует, в частности, при $\xi = x_0$, получаем $T = W_0$, вектор $x_0 = W_0 z_0$.

Следствие 1.3 из теоремы 1 указывает на то, что каноническая форма существует не всегда. Примером «вещи в себе» с единичной матрицей A=E является система из примера 1. Матрица $T=[\,\xi,\ E\,\xi,\ \dots,\ E^{n-1}\,\xi\,]$ вырождена при любом выборе $\xi \in R^n$.

Вектор неизвестных параметров A=A(a), $a \in R^n$, составляющий крайний правый столбец матрицы канонической формы, равен производной n-го порядка в новом базисе $a = z_0^{(n)}$.

Легко проверить, что орты канонического базиса однородной системы образуют вектор начального состояния и n–1 его производные

$$T = W_0 = [\ x_0, \dot{x}_0, \ldots, x_0^{(n-1)}\ ].$$

Это означает, что в новом базисе последовательность производных вектора состояния в начальной точке совпадают со столбцами единичной матрицы, производная n-го порядка совпадает с параметрами

$$\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 1 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^{(n)}(0) \\ z_2^{(n)}(0) \\ \vdots \\ z_n^{(n)}(0) \end{pmatrix}.$$

Задачу определения инвариантов формы A=A(a) непосредственно по виду динамического процесса раскрывает следующая теорема.

Полностью идентифицируемая однородная система невырожденным преобразованием координат $z = W_\tau^{-1}x$ приводится к каноническому виду

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau}\, ln \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 1 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $W_\tau = [x(t_0), x(t_0+\tau), \ldots, x(t_0+(n-1)\tau)]$.

Доказательство родственно предыдущему, адаптированному к дискретной системе $x_{k+1} = \Phi\ x_k$. Обратный переход от матричной экспоненты дает логарифм. Подробно останавливаться на этом не будем, в данном случае обращает внимание на себя следствие, указывающее на способ идентификации систем.

Вектор неизвестных параметров A=A(a), $a \in R^n$, составляющий правый столбец матрицы канонической формы, равен вектору состояния в новом базисе на n-ом шаге $a = z(t_0+n\tau)$.

1.5. ОБЛАСТЬ НЕИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ

Критерий идентифицируемости локализован относительно вектора начального состояния x_0. Развернутое представление об условиях идентифицируемости однородных систем дает изучение областей «неидентифицируемости».

Определение. Областью неидентифицируемости Ł назовем ту область пространства состояний, принадлежность к которой вектора начального состояния свидетельствует о неидентифицируемости пары (A, x_0).

Утверждение. Область неидентифицируемости Ł образована совокупностью всех нетривиальных циклических инвариантных подпространств матрицы A и точкой x_0=0.

Напомним, что подпространство L линейного пространства R^n называется инвариантным относительно матрицы A, если для каждого вектора x из L его образ Ax также принадлежит L. Структура инвариантных подпространств хорошо исследована в матричной алгебре, в частности, у матриц с простым спектром инвариантные подпространства образуются линейными оболочками собственных векторов, на которые имеет проекции вектор x_0. Сами собственные векторы являются примерами одномерных инвариантных подпространств. Нулевое подпространство и все пространство называются тривиальными инвариантными подпространствами.

Векторы ξ, A ξ, $A^2\ \xi$, … , $A^{k-1}\xi$ образуют базис циклического инвариантного подпространства $L\subset R^n$, где k – степень минимального аннулирующего полинома вектора $\xi\in R^n$, т. е. максимальная длина цепочки линейно независимых векторов, индуцированной ξ. Степень p минимального аннулирующего полинома матрицы A ограничивает размерности возможных циклических инвариантных подпространств. Отсюда непосредственно следует, что $Rank\ W_0 = k \le p \le n$.

В силу особенностей разложения матричной экспоненты интегральная кривая однородной системы не выходит за пределы L циклического инвариантного подпространства вектора x_0. В то же время, она не входит во вложенные циклические инвариантные подпространства, покинуть которые нельзя по той же причине. Ранее отмечалось то, что ранг матрицы идентифицируемости можно установить по выборке динамического процесса, т. е. $Rank\ W_0 = Rank\ [x(t_0), x(t_1), \ldots, x(t_{n-1})] = dim\ L \le dim$ Ł.

Тем самым, вопрос о построении области неидентифицируемости Ł, поглощающей совокупность начальных состояний и, как видно, процессов, по которым матрица A не может быть идентифицирована, сводится к построению всех возможных нетривиальных циклических инвариантных подпространств $L\subset$ Ł $\subseteq R^n$.

6.6. СТРУКТУРНО НЕИДЕНТИФИЦИРУЕМЫЕ ОБЪЕКТЫ

Определение. Система, область неидентифицируемости которой охватывает все пространство состояний Ł = R^n называется структурно неидентифицируемой.

Следствие 1.3 из теоремы 1 свидетельствует о том, что линейная динамическая система структурно неидентифицируема в том и только в том случае, когда степень минимального аннулирующего полинома p матрицы А меньше степени ее характеристического полинома n.

В этом случае из двух тривиальных циклических инвариантных подпространств уцелевает только одно – нулевое. Все пространство оказывается поделенным между несчетным количеством нетривиальных циклических инвариантных подпространств, размерности равной или меньшей, чем p. Их совокупность, область неидентифицируемости Ł, как лоскутное одеяло покрывает R^n.

Какой бы вектор начального состояния мы ни брали, он всегда оказывается принадлежащим частному циклическому инвариантному подпространству, и интегральная кривая, раскручиваясь в пределах ограниченной области, дает $Rank\ [x(t_0), x(t_1), \ldots, x(t_{n-1})]<\mathrm{n}$.

Фазовый поток структурно неидентифицируемой системы распадается на бесконечное количество «струй», каждую невозможно покинуть, а значит, нельзя судить о потоке в целом. Изменить положение переносом начальных условий нельзя, поскольку поток однороден.

Скрытность структурно неидентифицируемых систем не является все же фатальной. Для их идентификации необходим не один, а несколько запусков динамического процесса из независимых точек. После того, как интегральные кривые захватят собой все пространство, система становится идентифицируемой. Дополнительное количество независимых запусков динамического процесса, гарантирующее идентифицируемость объекта, оценивается разностью $n–p$.

Один из признаков циклической матрицы А, у которой $p=n$, состоит в различии ее собственных значений. Отсюда можно утверждать, что большинство однородных систем «вещью в себе» не являются, они идентифицируемы подходящим назначением вектора x_0. Наконец, любую систему можно идентифицировать по n запускам с линейно независимыми между собой векторами начальных условий.

Если изменять начальные условия процесса по той или иной причине нельзя, приходится отделять идентифицируемую часть однородной системы. Механизм отделения основан на преобразованиях, употребляемых при построении канонических форм.

1.7. ОТДЕЛЕНИЕ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОЙ ЧАСТИ

Отделение идентифицируемой части объекта родственно построению канонической формы идентифицируемости по нескольким запускам процесса с начальными условиями $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,$ не следует смешивать эти обозначения с былой нумерацией компонент вектора состояния.

Блочная каноническая форма строится на основе комбинированной матрицы идентифицируемости однородной системы

$$\mathrm{T} = [\, x_0, \mathrm{A}x_0, \mathrm{A}^2x_0, \ldots, \mathrm{A}^{k-1}x_0, x_1, \mathrm{A}\,x_1, \mathrm{A}^2\,x_1, \ldots, x_2, \mathrm{A}\,x_2, \mathrm{A}^2\,x_2, \ldots\,].$$

полученной сочленением фрагментов усеченных системных матриц. Ясно, что каковы бы ни были свойства объекта, всегда можно построить невырожденную матрицу Т.

Произвольная однородная система невырожденным преобразованием координат $z = \mathrm{T}^{-1}x$ приводится к блочному каноническому виду

$$\begin{pmatrix} \dot z_1 \\ \dot z_2 \\ \vdots \\ \dot z_k \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot z_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & a_{1k} & * & \cdots & * \\ 1 & \cdots & 0 & a_{2k} & * & & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{kk} & * & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \end{array}\right) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Механизм построения канонических форм достаточно гибок для того, чтобы не применять дополнительные запуски.

Левый верхний блок канонической формы можно получить непосредственно по прямоугольной матрице $\mathrm{T} = [\, x_0, \mathrm{A}x_0, \mathrm{A}^2x_0, \ldots, \mathrm{A}^{k-1}x_0]$ полного ранга k, применяя вместо инверсии операцию псевдообращения $\mathrm{T}^{+}\mathrm{AT}$. Адекватная замена переменных $x = \mathrm{T}\,z$ проецирует движение усеченной системы в исходный базис. Таким образом строятся канонические формы структурно неидентифицируемых систем.

Аналогичные преобразования, выполненные с усеченной матрицей идентифицируемости дискретной системы $\mathrm{W}_\tau = Rank\ [x(t_0), x(t_1), \ldots, x(t_{n-1})]$ при равноотстоящем шаге по времени, приводят к сходному делению. Внешний вид канонической формы в таком случае сохраняет особенности, отмеченные ранее у вполне идентифицируемой системы, включая возможность идентификации параметров по процессу.

ГЛАВА 2
ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ СИСТЕМ ОБЩЕГО ВИДА

2.1. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ

Теория систем не стоит на месте, а развивается через столкновение мнений и выработку новых понятий. Основы, которые в нее были заложены, напоминают строение таблицы Менделеева. Но тем именно она ценна, что до сих пор происходит ее заполнение. Системные свойства управляемости, наблюдаемости и идентифицируемости отражают качества трех диад, приведенных на. рис. 2.1. Каждой паре диад соответствует своя собственная интерпретация принципа двойственности.

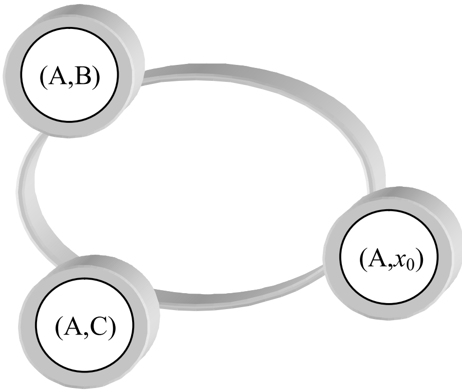


Рис. 2.1. Связь диад расширенным принципом двойственности

Принцип двойственности (в идентификации). Линейная динамическая система $\dot{x}$ =Ax+Bu, x_0=0 полностью управляема тогда и только тогда, когда полностью идентифицируема система $\dot{x}$ =Ax, x_0=B.

Доказательство состоит в сравнении системных критериев. Но, более того, параметры первой системы можно найти через параметры и вектор состояния системы однородной, тем самым и более общая теорема об идентифицируемости неоднородных систем выводится следствием из принципа двойственности. Как видно, и здесь эта идея Калмана успешно работает. Смысловая нагрузка принципа двойственности состоит в том, чтобы сокращать количество доказываемых теорем и следствий на основе косвенной связи двойственных математических моделей.

2.2. ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

Мы вплотную подошли к вопросу идентифицируемости по состоянию линейных динамических систем общего вида.

Пусть модель линейной неоднородной системы имеет вид

$$\dot{x} = \mathrm{A}x + \mathrm{B}u,$$

где $x \in \mathrm{R}^n$ – вектор состояния, $x_0 = x(0)$; $u \in \mathrm{R}^m$ – вектор управления.

В теории дифференциальных уравнений существует взаимосвязь между решениями неоднородной и соответствующей ей однородной систем уравнений, а именно: общее решение первой состоит из общего решения второй и какого-либо частного решения неоднородной системы. Вопрос об идентифицируемости систем общего вида допускает аналогичную трактовку вплоть до привлечения матрицы идентифицируемости однородной системы в составной критерий.

Вместе с тем, само понятие идентифицируемости неоднородной системы сложнее предыдущего. Как показано, интегральная кривая однородной системы в любом своем фрагменте несет заключительную информацию об объекте, включая условия идентифицируемости. В качестве критерия в равной мере можно привлекать системную матрицу или матрицу выборочных значений процесса. У неоднородной системы информативность интегральной кривой зависит от активности входного воздействия.

Следует учитывать, что ближайшие аналоги рассматриваемого системного свойства, понятия управляемости и наблюдаемости, описывают потенциальные свойства системы, а не особенности строения конкретных регуляторов или наблюдателей. С этой точки зрения полная идентифицируемость, являясь атрибутом системы, а не сигнала, не должна зависеть от способа формирования тестового воздействия. Будучи потенциальным свойством, она гарантирует возможность оценивания параметров при должной активности на входе.

Активные сигналы, реализующие потенциальное свойство идентифицируемости, назовем возбуждающими. К ним относятся классические импульсное и ступенчатое воздействия. По характеру влияния на интегральную кривую, импульс в виде дельта функции на входе адекватен дополнительному запуску процесса, поскольку обеспечивает перенос вектора состояния на расстояние, определяемое вектор столбцом матрицы входа. Это известное в теории управления свойство используется при моделировании импульсных весовых функций заменой импульса на задание необходимого вектора начального состояния.

Блочная матрица идентифицируемости однородной системы по нескольким запускам процесса включает в себя системные матрицы идентифицируемости по каждому запуску отдельно. В данном случае роль таких матриц будет играть, очевидно, матрица управляемости. Тем самым мы подходим к простому обобщению известных ранее свойств, наследующему традицию выделения влияния однородной части системы в общем решении задачи. Для пользы дела приведем сначала базовое определение идентифицируемости неоднородной системы, а затем дадим окончательную формулировку критерия.

Определение. Линейная неоднородная система называется полностью идентифицируемой по вектору состояния, если при заданном векторе начальных условий x_0 существует входной сигнал, при котором матрицы ее параметров A и B могут быть однозначно восстановлены за конечный отрезок времени идентификации по одной временной последовательности $x = x(t)$. Иначе, пара ((A,B), x_0) полностью идентифицируема или идентифицируема вполне, когда множество пар (($\underline{A}$,$\underline{B}$), x_0), объединенных общностью интегральной кривой $x = x(t)$, $x_0 = x(0)$, вырождается в точку $\underline{A}$=A, $\underline{B}$=B. В противном случае указанная пара неидентифицируема.

Теорема 3. Необходимое и достаточное условие полной идентифицируемости пары ((A,B), x_0) состоит в следующем

$$Rank\ [\ W_0\ W_в\ ] = n,$$

где W_0 – матрица идентифицируемости соответствующей однородной системы, $W_в$ – матрица управляемости [B, AB, A^2 B, … , A^{n-1}B].

Доказательство этой теоремы опирается на доказательство соответствующей теоремы для однородной системы и на приведенные ранее особенности действия разрывных тестовых сигналов, подаваемых на различные входы системы в различные моменты времени, разделенные между собой конечными отрезками времени идентификации. Разрывные импульсные воздействия позволяют оценить матрицу входа, а принцип суперпозиции гарантирует отделимость действия каждого из воздействий на систему, сводя тем самым, тестовый сигнал к серии испытаний однородной системы запусками из различных начальных условий. Доказательство окончено.

Общая теория систем включает критерий управляемости как необходимое условие минимальности модели. Неминимальная модель содержит неуправляемые части, которые могут быть идентифицированы ввиду влияния вектора начального состояния. Таким образом, системное свойство полной идентифицируемости вполне самостоятельное понятие.

Рассмотрим вопрос идентифицируемости линейных динамических систем в еще более общей его постановке.

После того, как удалось показать, что системные свойства и критерии идентифицируемости и управляемости объединяются при решении вопроса идентифицируемости неоднородных систем, велик соблазн задействовать системное свойство наблюдаемости для объектов вида

$$\dot{x} = \mathrm{A}\, x + \mathrm{B}\, u; \;\; y = \mathrm{C}\, x,$$

где $x \in \mathrm{R}^n$ – вектор состояния, пусть $x_0 = x(0)$; $u \in \mathrm{R}^m$ – вектор входа; $\mathrm{y} \in \mathrm{R}^l$ – вектор выхода. Шансы на это дает следующая трактовка проблемы идентифицируемости систем по выходу.

Определение. Линейная неоднородная система называется полностью идентифицируемой по вектору выхода, если при заданном векторе начальных условий x_0 существует входной сигнал, при котором матрицы ее параметров A, B, C могут быть однозначно восстановлены за конечный отрезок времени идентификации по одной временной последовательности $y= y(t)$ с точностью до инвариантов канонической формы наблюдаемости.

Иначе, пара ((A,B,C), x_0) полностью идентифицируема или идентифицируема вполне, когда множество пар (($\underline{\mathrm{A}}$,$\underline{\mathrm{B}}$,$\underline{\mathrm{C}}$), x_0), объединенных общностью интегральной кривой $\mathrm{y}= y(t)$ при $x_0 = x(0)$, вырождается в точку в базисе инвариантов канонического представления наблюдаемости. В противном случае указанная пара неидентифицируема по выходу.

В этом определении приходится учитывать избыточность расширенного математического описания систем, по параметрам. Известно, что эквивалентными преобразованиями, а, проще выражаясь, масштабированием вектора состояния можно менять содержимое матриц A, B, C, так что ставить вопрос об идентифицируемости их параметров не имеет смысла. Другое дело, когда структуры матриц A, B, C фиксированы и число входящих в них коэффициентов, инвариантов эквивалентного преобразования систем, сведено до минимума.

Теорема 4. Необходимое и достаточное условие полной идентифицируемости пары ((A,B,C), x_0) состоит в следующем

$$Rank\;[\,\mathrm{W}_0\;\mathrm{W}_{\text{в}}\,] = n, \;\; Rank\;\mathrm{W}_{\text{с}} = n,$$

где W_0, $\mathrm{W}_{\text{в}}$ – системные матрицы идентифицируемости и управляемости, $\mathrm{W}_{\text{с}}$ – системная матрица наблюдаемости $[\,\mathrm{C}^{\mathrm{T}}, \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{C}^{\mathrm{T}}, (\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^2\mathrm{C}^{\mathrm{T}}, \ldots, (\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{n-1}\mathrm{C}^{\mathrm{T}}\,]$.

Доказательство теоремы. Параметры матрицы А системы можно оценивать в рамках обычной в таких случаях блочной фробениусовой формы, соответствующей единичным ортам, составляющим содержание фиксированной матрицы выхода, т. е.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_k \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{k1} & a_{2k} & \cdots & a_{kk} & * & \cdots & * \\ \hline * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_0 \in \mathrm{R}^n.$$

Существование подобного канонического представления гарантируется свойством наблюдаемости. Разрывные входные импульсные сигналы теоретически снимают проблему оценивания вектора состояния, поскольку они равны нулю на основном протяжении времени идентификации. Вектор состояния канонической формы наблюдаемости однородной системы составляют выходные сигналы и их производные в количествах, определяемых размерами фробениусовых клеток. Таким образом, проблема идентифицируемости системы по выходу сводится к проблеме идентифицируемости системы по состоянию, критерий разрешимости последней задачи уже известен. Доказательство окончено.

Анализ потенциальных свойств систем важен постольку, поскольку раскрывает причины возможного расхождения гарантированно «сходящихся» алгоритмов идентификации, к которым относится известный рекуррентный метод наименьших квадратов. Нужно осознать, что причина некорректного поведения алгоритма может скрываться не в его внутренней ущербности, а в условиях применения квалифицированного инструмента, что называется, не по прямому назначению. Гарантии вычислительных методов не распространяются на сингулярные задачи.

Рассмотренные выше теоремы и критерии дают отчетливую перспективу вопроса оценивания параметров. Ни в коем случае не следует воспринимать условия реализации этих теорем как непосредственное руководство к действию. В особенности это касается импульсных тестирующих воздействий, привлекаемых исключительно в целях упрощения доказательств. Наличие сугубо теоретического решения вопроса об идентифицируемости систем не снимает трудностей практического воплощения алгоритмов параметрического оценивания в жизнь.

2.3. ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Критерии управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем сформулированы как для стационарных, так и для нестационарных систем. Естественно поэтому продолжить тему идентифицируемости переходом к классу нестационарных систем, для которого об объекте известно только то, что его параметры, являясь произвольными функциями времени, входят в состав системы линейных нестационарных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = \mathrm{A}(t)x + \mathrm{B}(t)\, u,$$

где $x \in \mathrm{R}^n$ – вектор состояния, пусть $x_0 = x(t_0)$; $u \in \mathrm{R}^m$ – вектор входа; $\mathrm{A}(t)$, $\mathrm{B}(t)$ – матрицы нестационарных параметров; $t \geq t_0$ – время, будем считать, что t_0=0.

Эта задача помогает раскрыть любопытное обстоятельство, придающее исследованию системных свойств стационарных систем самостоятельный характер. Раскроем его на следующем примере.

Рассмотрим сначала класс линейных нестационарных однородных динамических систем

$$\dot{x} = \mathrm{A}(t)\, x,\ \ x_0 = x(0).$$

Возникает вопрос, возможно ли однозначное восстановление параметров $\mathrm{A}(t)$ системы при наличии полной информации о динамическом процессе $x(t) = \Phi(t, t_0)\, x_0$. В данном случае $\Phi(t, t_0)$ – фундаментальная матрица системы. Ответ, в общем, отрицательный. Сформулировать причины параметрической неидентифицируемости нестационарных систем можно следующим образом.

Теорема 5. Любая система с матрицей $\hat{\mathrm{A}}(t)$, отличной от матрицы исходной системы, порождает адекватный ей динамической процесс при данном начальном условии, если они отличаются между собой аддитивной составляющей

$$\hat{\mathrm{A}}(t) = \mathrm{A}(t) + \mathrm{K}(t)(\mathrm{E} - x(t)x(t)^{+}),$$

где $\mathrm{K}(t)$ – произвольная матрица; $x(t)$ – вектор решения, найденного в силу исходной системе; $x(t)^{+}$ – псевдообратный по отношению к нему вектор, т.е. $x(t)^{+} = x(t)^{\mathrm{T}} / x(t)^{\mathrm{T}} x(t)$ (и при $x(t)$=0 имеем $x(t)^{+}$ =0).

Доказательство производится прямой подстановкой модифицированной при помощи аддитивной составляющей матрицы непосредственно в уравнение исходной системы, откуда видно, что уравнение это превращается в тождество, т. к. $x(t) - x(t)x(t)^{+}x(t) = 0$.

Параметрическая идентификация нестационарных систем невозможна. Вместе с тем, к ним часто применяются методы, ориентированные на решение задачи идентификации так, как если бы изменяющиеся во времени параметры были постоянны.

Квазиидентифицируемость. Рассмотрим класс нестационарных однородных систем, которому ставится в соответствие класс стационарных систем аналогичного вида

$$\dot{x} = \mathrm{A}\,x,\ \ x_0 = x(0).$$

Определение. Линейная нестационарная система называется квазиидентифицируемой (следуя Калману – вполне идентифицируемой) в момент времени t_0 на заданном отрезке времени идентификации протяженности Т тогда, когда ей в соответствие может быть поставлена только одна стационарная система, близкая к исходной в смысле минимума квадрата нормы разности векторов их фазовых скоростей, т. е.

$$\int_0^{\mathrm{T}} (\,\mathrm{A}(t)\,x - \mathrm{A}\,x\,)^{\mathrm{T}}\,(\,\mathrm{A}(t)\,x - \mathrm{A}\,x\,)\,\mathrm{d}\,t \to \min$$

Рассматривая линейные нестационарные системы, Р. Калман ввел для оценки свойств управляемости и наблюдаемости грамианы

$$\mathrm{G_B} = \int_0^{\mathrm{T}} (\,\Phi(t, t_0)\,\mathrm{B}\,\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\,\Phi(t, t_0)^{\mathrm{T}}\,)\,\mathrm{d}\,t\ ;\ \mathrm{G_C} = \int_0^{\mathrm{T}} (\,\Phi(t, t_0)^{\mathrm{T}}\,\mathrm{C}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{C}\,\Phi(t, t_0)\,)\,\mathrm{d}\,t.$$

В один ряд с ними можно поставить грамиан свободного движения

$$\mathrm{G}_0 = \int_0^{\mathrm{T}} (\,\Phi(t, t_0)\,x_0\,x_0^{\mathrm{T}}\,\Phi(t, t_0)^{\mathrm{T}}\,)\,\mathrm{d}\,t.$$

Его роль в теории систем точно такая же, как и у двух предыдущих грамианов. Линейная нестационарная динамическая система квазиидентифицируема тогда и только тогда, когда матрица G_0 (грамиан идентифицируемости) положительно определена.

Пример. В литературе по адаптивным системам встречаются кривые дрейфа коэффициентов модели объекта, сопровождаемые кривыми изменения их оценок рекуррентными алгоритмами параметрической идентификации. Рассмотрим нестационарную систему с матрицей

$$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 10 & 10\cos(t) & 10\sin(t) \\ -10 & 0 & 10\sin(t) & -10\cos(t) \\ -10\cos(t) & -10\sin(t) & 0 & 10 \\ -10\sin(t) & 10\cos(t) & -10 & 0 \end{pmatrix},$$

порождающую, в частности, динамический процесс

$$x(t)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -0.4 & 0.4 & 2.5 & 2.5 \\ 0.4 & 0.4 & -2.5 & 2.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin(15t) \\ \cos(15t) \\ \sin(14t) \\ \cos(14t) \end{pmatrix}.$$

Нестационарная система и ее аналитическое решение взяты из справочника Камке [9]. Нетрудно проверить, что грамиан идентифицируемости данной системы имеет полный ранг на любом отрезке времени идентификации. Более того, отрезку времени идентификации любой протяженности соответствует одна и та же стационарная система, которая аналитически точно аппроксимирует решение с матрицей A, отличающейся от матрицы A_0 с «замороженными» коэффициентами (взятыми на начальном участке идентификации):

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -11 & 0 & 10 \\ 11 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 10 \\ -10 & 0 & -10 & 0 \end{pmatrix},\ A_0=\begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & -10 \\ -10 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & -10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя аппроксимирует интегральную кривую нестационарной системы с быстро прогрессирующей погрешностью. Этим подчеркивается, что незначительность изменения параметров по сравнению с быстрым изменением переменных состояния вовсе не приводит, как это принято считать, к сходимости распространенных процедур параметрического оценивания к «истинным» оценкам параметров. В общем случае имеет место идентифицируемость совсем другого указанного выше типа.

ГЛАВА 3
ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ

3.1. ПРИНЦИП РАЗДЕЛЕНИЯ

Перед тем, как строить регулятор неадаптивной системы, закономерно поинтересоваться, насколько достижимы цели, которые при этом преследуются. На этом пути автор системного подхода предложил понятия и критерии управляемости и наблюдаемости. Общую теорию систем подкрепляет также принцип разделения Калмана, согласно которому оптимальные регулятор и наблюдающее устройство можно синтезировать в отдельности. Устойчивая работа объекта, наблюдающего устройства и регулятора в связке гарантируется некоторыми достаточно простыми соображениями. Не столь тривиально выглядит этот вопрос после появления в контуре самонастройки системы идентификатора.

Для адаптивных систем необходимы понятие и критерии ее адаптируемости. Адаптируемость системы можно определить через указанные три свойства, а именно: для того, чтобы динамическая система была полностью адаптируема, нужно, чтобы она была полностью наблюдаема, полностью управляема и полностью идентифицируема.

Анализ условий полной идентифицируемости показывает, что полная управляемость и полная наблюдаемость системы являются *предпосылками* ее полной идентифицируемости.

В адаптивных системах идентификатор и наблюдающее устройство нередко соединяют по перекрестной схеме «двух лжецов», когда они обмениваются информацией, находя оценки параметров и состояний по взаимным данным. Верные оценки параметров приведут к верному оцениванию состояния (и наоборот). Подобное соединение вызывает обоснованные сомнения относительно устойчивости работы адаптивной системы в целом, однако ничто не обязывает строить сомнительную схему.

Предлагаемый ниже обзор и анализ особенностей построения канонических форм показывает, что идентификацией параметров передаточных функций можно заниматься отдельно, не связывая ее с оценками вектора состояния. Поскольку коэффициенты передаточной функции используются затем для построения канонической формы описания системы в пространстве состояний, процесс этот однонаправленный.

Иными словами, идентификатор параметров отделим от наблюдающего устройства точно также, как и регулятор. Следовательно, если использовать канонические преобразования, принцип разделения Калмана справедлив и здесь.

3.2. КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ

Математическое описание динамических систем в пространстве состояний избыточно, по параметрам. Отсюда возникает разнообразие структур, уменьшающих число независимых коэффициентов модели. Исчерпывающее определение каноническим формам дать трудно, так как нелегко ограничить круг целей, ведущих к их построению. Параметры канонической формы инвариантны по отношению к матрицам систем, связанных между собой эквивалентными преобразованиями. В этом смысле они являются инвариантами динамической системы, аналогичными коэффициентам передаточной функции, ее нулям и полюсам, моментам, марковским параметрам, ганкелевым сингулярным числам и др.

Системы инвариантов взаимно связаны – через них выстраивается элегантный мост между моделями. Эта сторона дела особенно ценна, так как лобовые формулы пересчета параметров порою громоздки и способны испортить своим видом любую теорию. Далее нас в первую очередь будут интересовать канонические формы, возникшие в результате исследования системных свойств управляемости и наблюдаемости. С их помощью была доказана теорема о возможности произвольного размещения спектра матрицы замкнутой динамической системы обратными связями по состоянию. Системный подход задал тон каноническим построениям.

Задача построения канонических форм управляемости и наблюдаемости сводится к удовлетворению трех основных потребностей. Во-первых, с их помощью можно связать математические описания, в частности, модели пространства состояний с передаточными функциями. Во-вторых, благодаря каноническим формам удается вычислить вектор состояния. Наконец, от них зависит расчет модальных регулятора и наблюдателя, с этой стороны они наиболее известны. Стоит подчеркнуть, что не всякий существующий путь использования канонических форм удачен.

Канонические формы многосвязных систем традиционно сложны в рассмотрении. Их трактовка существенно зависит от сферы применения. Любое исследование, таким образом, нацелено на частные нужды и дает особое решение. В научной литературе можно наблюдать, как в процессе последовательных компиляций частные детали благополучно оторвались от породившего их содержания. Сомнительно, что многое из того, что возникло таким путем, надо поддерживать на плаву. Важнее овладеть приемами «формотворчества» и отчетливо видеть его перспективы с тем, чтобы уметь гарантировать реализуемость своих проектов.

3.3. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть модель линейного объекта в пространстве состояний имеет вид

$$\dot{x} = \mathrm{A}x + \mathrm{B}u;\ \ y = \mathrm{C}\,x + \mathrm{D}u,$$

где $x \in \mathrm{R}^n$ – вектор состояния системы, $x_0 = x(0)$; $u \in \mathrm{R}^m$ – вектор входа; $\mathrm{y} \in \mathrm{R}^l$ – вектор выхода.

Невырожденное преобразование внутренних координат

$$\hat{x} = \mathrm{T}^{-1}x$$

не отражается на отношениях входных и выходных сигналов, такие преобразования называются *эквивалентными*. После подстановки матрицы математического описания объекта меняются на следующие

$$\underline{\mathrm{A}} = \mathrm{T}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{T},\ \ \underline{\mathrm{B}} = \mathrm{T}^{-1}\,\mathrm{B},\ \ \underline{\mathrm{C}} = \mathrm{C}\,\mathrm{T},\ \underline{\mathrm{D}} = \mathrm{D}.$$

Поскольку одной и той же системе можно поставить в соответствие не одну, а множество тетрад $\{\underline{\mathrm{A}}, \underline{\mathrm{B}}, \underline{\mathrm{C}}, \underline{\mathrm{D}}\}$ с различным заданием матриц, она неидентифицируема. Вместе с тем, это описание избыточно. Если из всех моделей выбрать одну, опираясь на структурные признаки, то вопрос об ее однозначном определении вновь обретает значение.

Алгоритм построения интересующих нас канонических форм един и основан на следующем свойстве циклических матриц. Пусть совокупность векторов $\xi, \mathrm{A}\xi, \mathrm{A}^2\xi, \ldots, \mathrm{A}^{n-1}\xi$ образует базис, $\xi \in \mathrm{R}^n$. Матрица перехода T к новому базису, составленная из координат этих вектор-столбцов, приводит A к каноническому виду Фробениуса

$$\underline{\mathrm{A}} = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 1 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Доказательство состоит в проверке уравнения $\mathrm{T}\underline{\mathrm{A}}=\mathrm{AT}$ прямой подстановкой в него выражений для T и $\underline{\mathrm{A}}$.

Попутно, кроме матрицы $\underline{\mathrm{A}}$ можно упростить $\underline{\mathrm{B}}$, если использовать $\xi=\mathrm{B}$, что возможно для систем с одним входом. В координатах нового базиса вектор входа становится единичным ортом $\underline{\mathrm{B}} = (\,1\ 0\ \ldots\ 0)^{\mathrm{T}}$.

Матрица преобразования Т в таком случае совпадает с матрицей управляемости односвязной системы. Важно отметить то, что остаточное число параметров канонической формы становится соизмеримым с количеством коэффициентов числителя и знаменателя передаточной функции односвязной системы. Оказывается, что инварианты двух таких моделей связаны между собой линейной зависимостью. Если умножить вектор состояния на матрицу пересчета коэффициентов, в новом вспомогательном базисе каноническая форма будет с точностью до знаков наследовать параметры передаточной функции. Этот дополнительный базис наиболее популярен при построении модальных регуляторов, поскольку здесь легче влиять на характеристический полином матрицы замкнутой системы.

Обсудим возможные препятствия. Подход не универсален, поскольку даже для циклических матриц выбор ξ=В не всегда приводит к желаемому результату. Впрочем, это касается только неуправляемых систем, а таковые имеет смысл редуцировать с тем, чтобы упростить задачу. Значительно большая неприятность состоит в том, что циклическая последовательность векторов стремится к главному собственному вектору матрицы А, последние члены последовательности нередко так мало отличаются от него, что матрица Т оказывается крайне плохо обусловленной. Обходной маневр состоит в построении вспомогательной канонической формы непосредственно по передаточной функции, если таковая известна заранее.

К сожалению, ни основная, ни какая-либо вспомогательная каноническая форма управляемости не дает информации о том, как вектор состояния связан с входными и выходными сигналами. При моделировании реакций системы с нулевыми начальными условиями неизвестной взаимосвязью можно пренебречь. Принципиальный выход из положения дает построение канонической формы наблюдаемости односвязной системы выбором $\xi=C^T$. В этом случае циклическая последовательность векторов строится с транспонированной матрицей системы $\xi, A^T \xi, A^T \xi$ … , а переход к новому базису осуществляется на основе матрицы Т, инверсной по отношению к транспонированной матрице наблюдаемости.

Каноническая форма наблюдаемости решает проблему определения вектора состояния по входным и выходным сигналам для остальных форм, так как они связаны между собой в основном матрицами управляемости или наблюдаемости. Впрочем, препятствие в виде плохой обусловленности последних разрастается здесь до ощутимых размеров, ибо обходные пути отсекаются. У многосвязных систем канонические формы по этой причине делают блочными. Связь с параметрами передаточных функций усложняется, вспомогательные строчные и столбцовые формы целесообразно искать для ограниченного класса систем.

3.4. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА НАБЛЮДАЕМОСТИ

Рассмотрим односвязную систему с передаточной функцией

$$\mathrm{Q}(p) = d + \frac{\beta_{n-1} p^{n-1} + \ldots + \beta_1 p + \beta_0}{p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \ldots + \alpha_1 p + \alpha_0}$$

и строчной канонической формой наблюдаемости вида

$$\dot{x} = \underline{\mathrm{A}}\, x + \underline{\mathrm{B}}\, u; \quad y = \underline{\mathrm{C}}\, x + \underline{\mathrm{D}}\, u,$$

$$\underline{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ \underline{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}, \ \underline{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ \underline{\mathrm{D}} = d.$$

К этой канонической форме приводит эквивалентное преобразование координат с матрицей, инверсной транспонированной матрице наблюдаемости $\mathrm{W_c} = [\, \mathrm{C^T}, \mathrm{A^T C^T}, (\mathrm{A^T})^2 \mathrm{C^T}, \ldots, (\mathrm{A^T})^{n-1} \mathrm{C^T} \,]$, т. е. $\mathrm{T} = (\mathrm{W_c^T})^{-1}$.

Вектор состояния связан с входными и выходными сигналами

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & d & & 0 \\ b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \ddot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Вид канонической формы одинаков для непрерывных и дискретных динамических систем, для объектов вида

$$x_k = \underline{\mathrm{A}}\, x_k + \underline{\mathrm{B}}\, u_k; \quad y_k = \underline{\mathrm{C}}\, x_k + \underline{\mathrm{D}}\, u_k,$$

вектор состояния вычисляется следующим образом

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{k-n+1} \\ y_{k-n+2} \\ y_{k-n+3} \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & d & & 0 \\ b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{k-n+1} \\ u_{k-n+2} \\ u_{k-n+3} \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}.$$

Применяя преобразование Лапласа к производной вектора состояния $px = \mathrm{A}x+\mathrm{B}u$, получим $x = (p\mathrm{E}-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{B}u$ и далее $y = \mathrm{C}x+\mathrm{D}u=(\mathrm{C}(p\mathrm{E}-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{B}+\mathrm{D})u$. Отсюда следует, что

$$\mathrm{Q}(p)=\mathrm{C}(p\mathrm{E}-\mathrm{A}x)^{-1}\mathrm{B}+\mathrm{D}.$$

Однозначный переход в противоположную сторону, от коэффициентов передаточной функции к параметрам матриц пространства состояний возможен, разумеется, только для канонических форм. Тем самым, теория эквивалентных преобразований прокладывает мост между различными видами описания линейных динамических систем.

Коэффициенты знаменателя передаточной функции Q(p) с точностью до знака совпадают с коэффициентами фробениусовой матрицы $a_{ni} = -\alpha_{i-1}$, коэффициенты числителя связаны линейным преобразованием с коэффициентами вектора входа, а именно:

$$\begin{pmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-3} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & & 0 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим две попавшее в наше поле зрения теплицевы матрицы так

$$\underline{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & & 0 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \ \mathrm{L} = \begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & d & & 0 \\ b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & d \end{pmatrix}.$$

С их помощью уравнения связи для параметров и для сигналов записываются короче

$$a = -\alpha, \quad \underline{\mathrm{B}} = \underline{\mathrm{L}}^{-1}\beta, \quad d = \underline{\mathrm{D}}, \ x = \mathrm{Y} - \mathrm{L}\ \mathrm{U},$$

где $\alpha, \beta \in \mathrm{R}^n$ – векторы параметров передаточной функции; $a \in \mathrm{R}^n$ – коэффициенты нижней строки фробениусовой матрицы $\underline{\mathrm{A}}$; Y, U$\in \mathrm{R}^n$ – векторы выборок измерений входных и выходных сигналов и их производных.

Столбцовая каноническая форма. Пусть тетрада {$\underline{A}$,$\underline{B}$,$\underline{C}$,$\underline{D}$} приведена к канонической форме наблюдаемости. Столбцовая каноническая форма наблюдаемости получается эквивалентным преобразованием с матрицей вида $\underline{L}^{-1}$. Оно сводит вектор входа $\underline{B}$ к β, т. е.

$$\mathbf{A} = \underline{L}\ \underline{A}\ \underline{L}^{-1},\ \ \mathbf{B} = \underline{L}\ \underline{B},\ \ \mathbf{C} = \underline{C}\ \underline{L}^{-1},\ \ \mathbf{D} = \underline{D},$$

коэффициенты модели с точностью до знака совпадают с коэффициентами передаточной функции

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_1 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\ \ \mathbf{D} = d.$$

Доступ к вектору состояния осложняется $x = \underline{L}$ (Y – L U).

3.5. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА УПРАВЛЯЕМОСТИ

Каноническая форма управляемости имеет вид

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 1 & a_{nn} \end{pmatrix},\ \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \underline{C} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix},\ \underline{D} = d.$$

К этой канонической форме приводит эквивалентное преобразование координат с матрицей управляемости $W_в$ = [B, AB, A^2 B, … , A^{n-1}B], T=$W_в$. Его можно провести в два этапа, преобразуя исходную тетраду {A,B,C,D} сначала к канонической форме наблюдаемости, а затем – управляемости. Вектора состояния находится как x=$W_в{}^{-1}$(Y–LU). Параметры канонических форм управляемости и наблюдаемости совпадают, отсюда

$$\begin{pmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-3} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & & 0 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Строчная каноническая форма. Пусть тетрада {$\underline{A}$,$\underline{B}$,$\underline{C}$,$\underline{D}$} приведена к канонической форме управляемости. Вспомогательное преобразование с ганкелевой матрицей $\Gamma = flip\ L^T$ (*flip* ставит столбцы в обратном порядке) приводит описание системы к строчному виду, т. е.

$$\mathbf{A} = \Gamma^{-1}\underline{A}\,\Gamma,\ \ \mathbf{B} = \Gamma^{-1}\underline{B},\ \ \mathbf{C} = \underline{C}\,\Gamma,\ \ \mathbf{D} = \underline{D},$$

коэффициенты модели с точностью до знака совпадают с коэффициентами передаточной функции:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix},\ \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{pmatrix},\ \mathbf{D} = d.$$

Доступ к вектору состояния довольно сложен $x = \Gamma^{-1}\ W\text{в}^{-1}\ (Y - L\ U)$.

3.6. РЕДУЦИРОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ

Редуцированные канонические формы возникают в случае неуправляемых или ненаблюдаемых систем, когда порядок передаточной функции меньше размерности вектора состояния.

Матрица управляемости или наблюдаемости, соответственно, содержит вырожденные столбцы, которые можно безболезненно удалить. При построении канонической формы следует пользоваться укороченной прямоугольной матрицей T, заменяя инверсии на псевдообращение

$$\underline{A} = T^{+}\ A\ T,\ \ \underline{B} = T^{+}B,\ \ \underline{C} = C\ T,\ \ \underline{D} = D.$$

Никаких накладок с нахождением вспомогательных форм и отысканием вектора состояния не возникнет. Эта идея пока неоправданно редко используется.

Рассматриваемый метод редукции позволяет получать приближенные описания системы любых порядков, начиная с первого, когда

$$T = B,\ T^{+} = B^T/B^T B\ \ \text{или}\ T^{+} = C,\ T = C^T/CC^T.$$

Заметим, что звено второго порядка таким способом сводится к апериодическому звену с постоянной времени, обратно пропорциональной постоянной времени исходного звена.

3.7. МНОГОСВЯЗНЫЕ СИСТЕМЫ

Блочная каноническая форма наблюдаемости имеет вид

$$\dot{x} = \underline{A}\, x + \underline{B}\, u; \quad y = \underline{C}\, x + \underline{D}\, u,$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{l1} & A_{l2} & \cdots & A_{ll} \end{pmatrix}, \ \underline{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_l \end{pmatrix}, \ \underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

Она является продуктом эквивалентных преобразований системы с матрицей, построенной из фрагментов матриц наблюдаемости для каждого из выходов. Диагональные блоки блочной фробениусовой матрицы $\underline{A}$ наследуют структуру, изученную ранее у односвязных систем. Внедиагональные блоки отличаются от фробениусовых отсутствием угловой единичной матрицы. Они содержат только нижние отличные от нулей строки. Матрицу $\underline{C}$ образуют орты, отражающие очередность следования строк C в матрице, построенной из столбцов $W_c = [\, C^T, A^TC^T, (A^T)^2C^T, \ldots, (A^T)^{n-1}C^T \,]$.

Вектор состояния каждой подсистемы находится подобно вектору состояния первой подсистемы

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \vdots \\ y_1^{(k-1)} \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{m} \begin{pmatrix} d_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{1i} & d_{1i} & & 0 \\ b_{2i} & b_{1i} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k-1,i} & b_{k-2,i} & \cdots & d_{1i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_i \\ \dot{u}_i \\ \ddot{u}_i \\ \vdots \\ u_i^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Блоки матриц L, $\underline{L}$ наследуют теплицеву структуру от матриц связи сигналов и параметров односвязной системы:

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} \underline{L}_{11} & \underline{L}_{12} & \cdots & \underline{L}_{1l} \\ \underline{L}_{21} & \underline{L}_{22} & \cdots & \underline{L}_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{L}_{l1} & \underline{L}_{l2} & \cdots & \underline{L}_{ll} \end{pmatrix}, \ L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1l} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{l1} & L_{l2} & \cdots & L_{ll} \end{pmatrix}.$$

Прямоугольные внедиагональные клетки блочных матриц приходится наращивать нулями или усекать сверху.

Основные проблемы кухни канонических форм многосвязных систем начинаются с попытки установления связи параметров их матриц с коэффициентами передаточных функций и нахождения вектора состояния через измерения входных и выходных сигналов и их производных в соответствии с делением модели системы на подсистемы.

Связь параметров и сигналов по-прежнему укладывается в формулы

$$a = -\alpha, \quad \underline{\mathrm{B}} = \underline{\mathrm{L}}^{-1}\beta, \quad d = \underline{\mathrm{D}}, \quad x = \mathrm{Y} - \mathrm{L}\ \mathrm{U}.$$

где α, β – матрицы коэффициентов передаточных функций; a – расширенный вектор параметров блочной матрицы $\underline{\mathrm{A}}$; Y, U$\in$ R^n – векторы выборок измерений входных и выходных сигналов и их производных.

Значительное упрощение матрицы системы возможно при использовании базисов ее инвариантных подпространств. Последовательность векторов ξ, $\mathrm{A}\xi$, $\mathrm{A}^2\ \xi$, ... , $\mathrm{A}^{k-1}\xi$ образует базис цикличного инвариантного подпространства R^k тогда, когда $\mathrm{A}^k\ \xi$ линейно зависит от предыдущих векторов. В координатах расщепленного пространства $\mathrm{R}^k + \mathrm{R}^g + \ldots + \mathrm{R}^q = \mathrm{R}^n$ матрица канонической формы приобретает блочную диагональную структуру $\underline{\mathrm{A}}$, называемую естественной нормальной формой матрицы А. Если каждый вектор последовательности зависит от всех векторов своей цепочки и векторов предыдущих цепочек, то соответствующие инвариантные подпространства вложены друг в друга $\mathrm{R}^k \subset \mathrm{R}^g \subset \ldots \subset \mathrm{R}^q = \mathrm{R}^n$. Каноническая форма матрицы $\underline{\mathrm{A}}$ приобретает нижний квазитреугольный вид. Все же, вряд ли разумно всегда жертвовать ресурсами управляемости и наблюдаемости в угоду простоте внешнего вида модели.

Метод редукции, рассмотренный в предыдущем разделе, указывает простой путь нахождения передаточных функций многосвязной системы от любого входа к любому выходу на основе частных канонических форм для односвязных подсистем

Более громоздкий подход связан с построением блочной фробениусовой формы. Основная сложность теории канонических форм многосвязных систем связана с нарушением регулярности блоков приводящих структур вследствие возможной асимметрии их размеров. Внедиагональные клетки блочной теплицевой матрицы $\underline{\mathrm{L}}$, необходимой при построении вспомогательных структур, вместо треугольных становятся трапециевидными. Материал становится труднообозримым настолько, что в ряде работ это естественное для односвязных систем направление вообще не рассматривается. Вместо него в расчет принимаются иные соображения, ведущие к преимуществам, охотно используемым при синтезе регуляторов.

ГЛАВА 4
ПОСТРОЕНИЕ АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ С ИДЕНТИФИКАТОРОМ

4.1. УПРАВЛЕНИЕ И ИЗУЧЕНИЕ

Концепция изучения системы в процессе ее управления естественным образом возникает из особенностей реальных объектов, математические модели которых известны недостоверно или меняются в процессе эксплуатации. Общая структура адаптивной системы, содержащей начальную (жесткую) и настраиваемую модели, приведена на рис. 4.1.

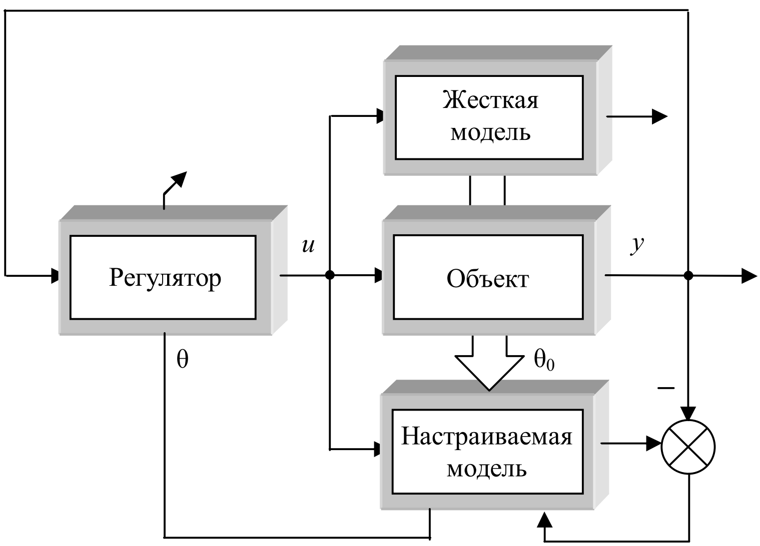


Рис. 4.1 Типичная схема адаптивной системы

Основной проблемой адаптивного управления является риск расхождения процессов в контуре самонастройки, которого неадаптивные регуляторы лишены вовсе. Для систем регулирования температуры теплиц эта опасность, может быть и не столь велика, поскольку риск сказывается на овощах. Но в адаптивных системах управления самолетом даже ничтожно малая вероятность такого события перечеркивает все достоинства адаптационного подхода. Цели управления и идентификации антагонистичны: для идентификации необходимо раскачать объект.

Оптимальные регуляторы порождают линейные обратные связи по состоянию, это приводит к неидентифицируемости объекта (следствие 1.4).

На рис. 4.2 (слева) приведена геометрическая интерпретация решения системы уравнений идентификации, напоминающая точку створа двух слабо разведенных половинок ножниц (еще иллюстраторами теории относительности осознано, что она может двигаться со сверхсветовой скоростью). При оценивании параметров динамической системы в таких случаях возникает значительный коэффициент усиления невязок измерений.

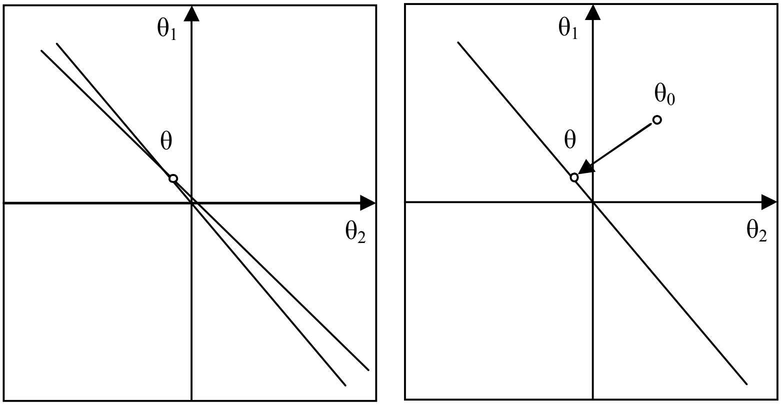


Рис. 4.2. Иллюстрация к изменению цели идентификации

Вместо того, чтобы решать плохо обусловленную систему уравнений, есть смысл изменить цель идентификации. Отбрасывая одно из уравнений, мы почти ничего не теряем, зато обретаем свободу. Важно ею разумно распорядиться. Задача поиска проекции некоторой точки θ_0 на множество возможных решений внутренне менее противоречива и, значит, более приемлема в адаптивном управлении. Жесткая система в парной схеме как бы «смотрится в зеркало», которое отражает ее постольку, поскольку вырождены уравнения параметрического оценивания. Это серьезная альтернатива традиционному подходу, компромисс между неадаптивным и адаптивным (в обычном контексте) принципами управления. Она способна вдохнуть жизнь в целое направление, простаивающее ввиду очевидной опасности, несомой контуром самонастройки.

Заметим, что разложение матрицы системы нормальных уравнений метода наименьших квадратов, применяемого при идентификации, на множители осуществимы и тогда, когда обратной матрицы нет. Это снижает риск получить на выходе вычислительного агрегата ерунду. Детали разложений достаточно разговорчивы, по их виду бывает несложно предсказать судьбы частных инверсий. Для симметричных матриц $P^T=P$ большой популярностью пользуется разложение Холецкого $P=LL^T$, где часть представляет собой нижнюю треугольную матрицу

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{12} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Признаком вырожденности L служат нулевые диагональные элементы. Располагая сведениями о матрице разложения, несложно оценить ее ущербность по отношениям элементов (алгоритм Балонина, см. mathscinet.ru).

Более полная история вопроса вкратце такова. Традиция решать вырожденные или несовместные системы $Z\,\theta = Y$ восходит к Гауссу, который минимизировал квадрат нормы разности $\|\, Z\,\theta - Y \,\|^2$. Квадратичная функция привлекательна тем, что ее экстремум отвечает линейному уравнению, получаемому после дифференцирования и приравнивания нулю производной. Система нормальных уравнений $Z^T(Z\,\theta - Y)=0$ метода наименьших квадратов Гаусса совместна всегда, но может иметь множество решений. Далее будем использовать обозначения $P= Z^TZ$, $R= Z^TY$ и запись $P\,\theta = R$.

Сначала Мур (1920), а потом Пенроуз (1955) предложили использовать в роли аналога обратной матрицы «масштабированную» транспонированную матрицу $P^+ = MP^T = P^TW$, удовлетворяющую уравнению $PP^+P = P$. Его решение единственно. Пенроуз озаботился тем, чтобы найти близкие аналоги уравнениям $P^{-1}P=E$, $PP^{-1}=E$. Псевдообратная (как бы обратная) матрица отвечает условиям $PP^+P=P$, $P^+PP^+=P^+$, $PP^+=(PP^+)^T$, $P^+P=(P^+P)^T$. Первые два из них подтверждают представление о том, что выживает сильнейший. Остальные уравнения констатируют симметрию взаимных произведений матриц P и P^+. Разработав столь совершенную теорию, алгебраисты смогли облегченно вздохнуть и написать «решение» системы линейных уравнений $P\,\theta = R$, годное на все случаи, как $\theta =P^+R$.

В вырожденном случае псевдорешение выделяет среди прочих вектор минимальной длины. Расчет дает точку, наиболее близкую к началу системы координат на множестве возможных решений.

Математическое выражение, указывающее путь вычисления проекции любой точки θ_0, а не только нулевой, имеет вид

$$\theta = \theta_0 + P^+ (R - P\theta_0).$$

Это общее псевдорешение зависит от ряда произвольных постоянных. Изменяя точку θ_o, мы получаем все новые и новые решения задачи ортогональным проецированием. Нет такого места на множестве возможных решений, до которой мы не дотянулись бы проекцией из точки, принадлежащей всему пространству. Для несовместных систем поиск по-прежнему ведется на множестве оценок, минимизирующих норму разности левой и правой частей исходного уравнения.

Разновидность общего псевдорешения уравнения идентификации описывает проецирование точки в пространстве с метрикой, порожденной эллиптической нормой $\| W^{-1}(\theta-\theta_0) \|$, когда

$$\theta = \theta_0 + P_w^+ (R - P\theta_0),$$

где $P_w^+ = W(PW)^+$ называется W–взвешенной псевдообратной матрицей. Она обобщает понятие Пенроуза на случай линейных операторов, определенных в пространстве с произвольной метрикой. Сведем свойства псевдорешений в таблицу.

Таблица свойств псевдорешений

$\theta = P^{-1}R,\ \det(P) \neq 0$	$\| P\theta - R \| = 0$
$\theta = P^+R$	$min\ \| P\theta - R \|$ $min\ \| \theta \|$
$\theta = \theta_0 + P^+(R - P\theta_0)$	$min\ \| P\theta - R \|$ $min\ \| \theta - \theta_0 \|$
$\theta = \theta_0 + P_w^+(R - P\theta_0),\ P_w^+ = W(PW)^+$	$min\ \| P\theta - R \|$ $min\ \| W^{-1}(\theta - \theta_0) \|$
$\theta = \theta_0 + \underline{P}_w^+(R - P\theta_0),\ \underline{P}_w^+ = W(\underline{W}PW)^+\underline{W}$	$min\ \| \underline{W}(P\theta - R) \|$ $min\ \| W^{-1}(\theta - \theta_0) \|$

Точки зрения на принцип назначения весовых коэффициентов могут быть различными. Наиболее простой выбор дает соображение равных пропорций, когда элементы диагональной матрицы W совпадают со значениями элементов θ_0, тогда

$$\| W^{-1} (\theta - \theta_0) \| = \sqrt{\left(\frac{\theta_1 - \theta_{01}}{\theta_{01}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\theta_n - \theta_{0n}}{\theta_{0n}}\right)^2} .$$

Пропорционально взвешенная оценка параметров ищется по формуле

$$\theta = \theta_0 + \mathit{diag}\,(\theta_0)\,(P\,\mathit{diag}\,(\theta_0))^+\,(R - P\,\theta_0).$$

Этот подход напоминает налоговую систему, чем меньше коэффициент вектора притяжения, тем с большим вниманием он рассматривается. Отметим некоторые его преимущества.

Очевидно, что он отличается от распространенной теперь уже практики использования всюду, где только можно, нормального псевдорешения, которому отвечает нулевой вектор притяжения. Синтеза полезной информации в таких процедурах не происходит. В отличие также от обобщенного метода наименьших квадратов (ОМНК), здесь весовые коэффициенты уравновешивают не невязки измерений, а непосредственно отклонения коэффициентов искомой оценки θ от коэффициентов вектора притяжения θ_0. Метод наименьших квадратов без весовых коэффициентов слишком «мешковат», для того, чтобы самостоятельно исправлять странности, вытекающие из различия между тем, что требуется по существу от идентификации и механической подгонкой оценки под ответ.

Дисбаланс весовых коэффициентов позволяет выделить наиболее подверженные дрейфу нестационарные параметры. Столь гибкий аппарат управления оцениванием неоправданно мало используется.

Следует иметь в виду, что за качество оценок придется платить полновесной монетой. Эффективность вычислительных методов заключается в «причесывании» выделяющихся элементов, тогда как веса препятствуют масштабированию. При неосторожном обращении метод счета легко превращается в то самое мифическое решето, которым в России носят в избу воду. Вырожденные задачи требуют особой щепетильности, и при различных подходах к очевидно простым, казалось бы, уравнениям параметрического оценивания возникает большое количество проблем, с изучением которых связано дальнейшее исследование.

4.2. ДВУХКАНАЛЬНЫЙ ИДЕНТИФИКАТОР ПАРАМЕТРОВ

Особенностью нестационарных объектов управления, вызывающих потребность в адаптации, состоит в том, что параметры таких объектов могут изменяться ступенчато, а потом оставаться постоянными. Например, подобное происходит с автомобилем при посадке и высадке пассажиров. Значение опыта наблюдения за объектом, соответственно, резко снижается, если параметры объекта систематически меняются.

Обычная накопительная схема метода наименьших квадратов этого не учитывает, матрицы системы нормальных уравнений МНК формируются по массивам выборок данных как

$$P = Z^T Z,\ R = Z^T Y$$

и решение $P\,\theta = R$, каким бы оно ни было, с вырожденной матрицей или матрицей полного ранга, совершенно неоправданно сглаживает оценки по итогам наблюдений от времен старта накопительного процесса.

Если применить скользящее окно наблюдений или экспоненциальное взвешивание невязок измерений, упремся в иную крайность: недоиспользование информации на участках относительной стабильности параметров.

Для таких случаев формула

$$\theta = \theta_0 + P_w^{+} (R - P\,\theta_0),$$

может интерпретироваться совершенно иначе. Она отражает работу канала оперативной идентификации, в котором ограниченный объем данных, заключающийся в выборках, применяемых при вычислении матриц P и R, дополняется оценкой некоторого консервативного канала θ_0.

Сочетание оперативного и консервативного каналов очень характерно для построения иерархических систем, в том числе, в социумах.

В свое время эти соображения послужили предметом нескольких авторских изобретений и статей об адаптации с использованием элементов искусственного интеллекта, получивших широкий международный отклик. Статьи заинтересовали тем, что в них классические темы, такие как построение идентификаторов, наблюдающих устройств, регуляторов, сочетаются с направлениями, выходящими за пределы математической теории управления. Двухканальный идентификатор представляет собой модель, неожиданно напоминающую собой в работе двухпалатный парламент. Оказывается, в технических системах могут быть свои консерваторы и радикалы, в том числе, и решение жизненно важных вопросов голосованием.

4.3. АДАПТАЦИЯ И ХАОС

С появлением на свет теории детерминированного хаоса стало легче планировать порт прибытия лобового «адаптационного» подхода.

В хаотическом режиме одной и той же системе, в принципе, соответствует множество отличающихся между собой процессов. В зоне неидентифицируемости одному и тому же процессу в системе соответствует множество моделей, отличающихся между собой параметрами. Между прочим, эти альтернативы дополняют друг друга и в такой связи практически не рассматривались. С подачи Лоренца и Фейгенбаума ныне высоко ценятся источники хаотических колебаний. Уравнения самонастройки нелинейны, это роднит их с логистическим уравнением $x_{k+1} = ax_k - bx_k^2$, напоминающим алгоритмы накопления информации в методе наименьших квадратов и других. В сходстве черт кроется нечто большее внешнего подобия.

В этой связи возникает любопытный вопрос о побочной сфере применения различных рекуррентных алгоритмов идентификации.

До сих пор с расхождением оценок параметров в контуре адаптивного управления усиленно боролись, видя в этом только негативную сторону. Вместе с тем, если рассматривать адаптивную систему как генератор хаотических колебаний, то исследование вопросов идентифицируемости способно дать дополнительные соображения по крайне интересному вопросу, занимающему сейчас специалистов. Критерии идентифицируемости и область неидентифицируемости необходимы не только в плане констатации возможности или невозможности однозначного оценивания параметров. Они предопределяют условия появления хаотических режимов у систем.

Возьмите систему в области ее неидентифицируемости и примените к ней идентификационный алгоритм.

Вот общая канва, ведь, собственно, если параметры в принципе ненаходимы, то уж тут до «эффекта бабочки» (бабочка подняла крылышки в Пекине, а дождик пошел в Москве) рукой подать.

Зыбкая грань между параметрами и процессами в адаптивном управлении размывается динамикой, которую придают оценкам параметров рекуррентные алгоритмы идентификации. Они утрачивают смысл (если система заведомо неидентифицируема – параметры найти нельзя), но часто не теряют своей завидной работоспособности. Идентификатор выдает оценки даже тогда, когда почва для их получения отсутствует. На вырожденных участках оценки подвержены дрейфу вследствие малейших шумов измерений. Адаптивные системы, построенные без учета системных особенностей, это генераторы хаотических процессов, вполне закономерно становящиеся объектами изучения иной теории, теории катастроф.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эта небольшая книга написана по результатам, полученным автором еще в студенческие годы (они попали в тематический обзор Клеймана [10]), когда, вооружившись книгами Эйкхоффа [11] и Гропа [12], наблюдал процессы расхождения адаптационного контура в самых простых, казалось бы, для работы алгоритмов условиях.

Те, еще довольно древние вычислительные машины, о которых вспоминал и Гейтс, программировались даже не при помощи попавших в футуристические рассказы Айзека Азимова перфолент, но при помощи перфокарт, дырочки в которых читались на просвет с помощью специального сложенного из них же коробка. И вот эти весьма несовершенные машины обладали, вместе с тем, существенным преимуществом перед механическим арифмометром Феликс. Они показывали завораживающие картинки, графики оценок параметров рекуррентных алгоритмов.

После многих и многих опытов постепенно пришло понимание, что те простые гипотетические рецепты построения адаптивных систем, которые писались поколениями и вовсе лишенными аппаратной поддержки, не срабатывают. Нельзя просто взять рекуррентную процедуру и применить ее к любому объекту, в особенности, к объекту в режиме его нормального функционирования. Между прочим, у нас такой гипотетической литературы до сих пор полно, поскольку внедрение вычислительных систем и совершенствование компьютеров произошли стремительно.

Прошлую литературу нужно критически пересматривать и переписывать. Этот процесс вовсе не простой, учитывая, что и сами книги изменились. Появились и приобретают все большее значение их электронные версии, которые лишь на первой стадии оцифровки будут некими подобиями прежних книг. Современная книга будет включать в себя как текст, так и алгоритмы, а поскольку процессор у такой книги под рукой, несложно будет ознакомиться с работой алгоритма и увидеть те самые графики.

Это совершенно новые условия, которые стимулируют технический прогресс. Прибавьте сюда возможности коммуникационных сетей, логическую целесообразность подключения к ним сенсоров, появление сетевых роботов на базе суперкомпьютеров. Разрыв между стадиями познавательного процесса будет исчисляться тогда не поколениями.

Автор участвует в работах по становлению очерченного направления, нацеленного на будущее и отраженного, в частности, сайтами matscinet.ru, artspb.com и другими. Многое и многое изменится, прежним останется всегда удовольствие от познания нового.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калман Р.* Об общей теории систем управления. Труды 1 Конгресса ИФАК. – М.: Изд. АН СССР, т. 2. 1961. С. 521–547. [*Kalman R.E.* On the General Theory of Control System //Proc. of 1st IFAC Congress, Moskow, 1960.]
2. *Ли Р.* Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. – М.: Наука, 1966. [Lee R.C.K. Optimal Estimation, Identification and Control, MIT Press, Cambridge, Mass., 1964.] – 176 с.
3. *Ройтенберг Я.И.* Автоматическое управление. – М.: Наука, 1978. – 552 с.
4. Прасолов А.В. Обратная задача для линейной стационарной системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22. № 3. – С. 430–434.
5. Справочник по теории автоматического управления /Под ред. *А.А. Красовского*, –М.: Наука, 1987. –712 с
6. *Аоки М.* Оптимизация стохастических систем. – М.: Наука, 1971. –424 с
7. *Савитский С.К.* Инженерные методы идентификации энергетических объектов. Л.: Энергия, 1978. – 70 с.
8. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц – М.: Наука, 1967. – 576 с.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 576 с.
10. *Клейман Е.Г.* Идентификации нестационарных объектов. //Автоматика и телемеханика. 1999. № 10. С. 3–45.
11. *Гроп Д.* Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
12. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975. – 683 с.