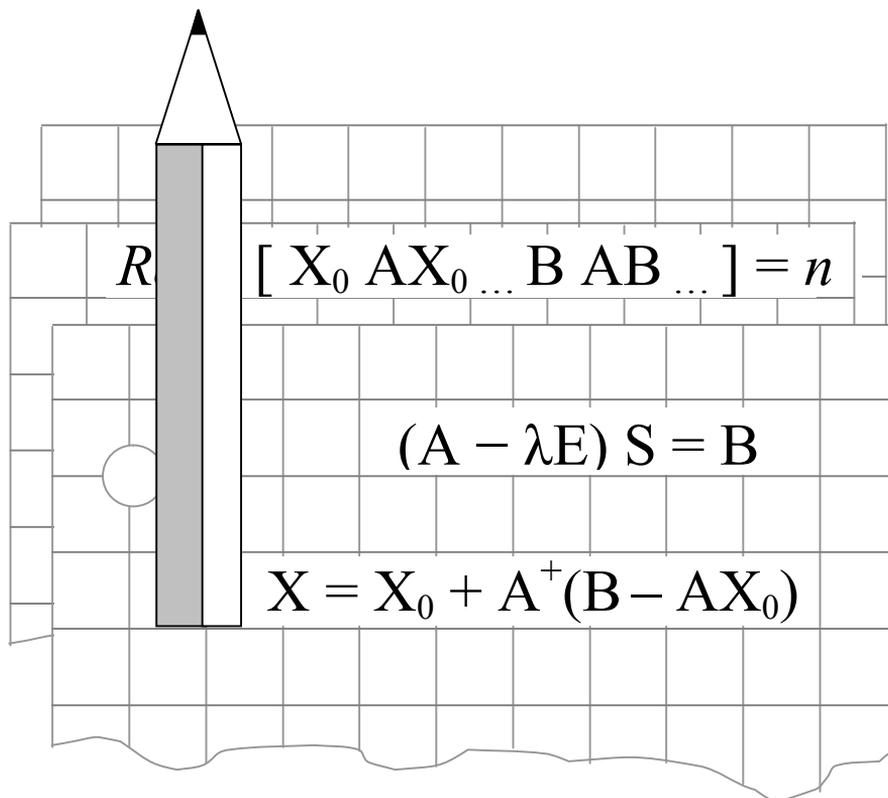


Н. А. Балонин

НОВЫЙ КУРС ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ



Санкт-Петербургский государственный университет

Н. А. Балонин

**НОВЫЙ КУРС
ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ**



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2000

УДК 62.52

ББК 32.965
Б 20

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. А.Х. Гелиг

*Рекомендовано к печати Ученым советом
Учебно-научного центра математики, механики и астрономии
С.-Петербургского государственного университета*

2

Балонин Н.А.

Б 20 Новый курс теории управления движением. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2000. 160 с.

ISBN 5-288-02710-2

В книге освещен ряд вопросов теории динамических систем. Она существенно отличается от традиционных курсов по теории управления, как рассматриваемым материалом, так и стилем изложения. Автор щедро делится своим опытом решения различных управленческих задач. Подготовленный читатель, занимающийся анализом и синтезом динамических систем, найдет в книге много полезных практических рекомендаций. Монография написана живым языком и читается с удовольствием.

Книга представляет несомненный интерес для преподавателей, студентов старших курсов и аспирантов, а также для исследователей, занимающихся расчетами систем управления.

Без объяв.

ББК 32.965

ISBN 5-288-02710-2

© Н.А. Балонин, 2000
© Издательство С.-Петербургского
университета, 2000

О Г Л А В Л Е Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ЧАСТЬ I. У ИСТОКОВ НАУКИ О ДВИЖЕНИИ	7
ГЛАВА 1. Очерк античной натурфилософии	9
1.1. Начало	9
1.2. Укрупненная панорама событий	12
1.3. Космогонические модели	15
1.4. Механические модели	17
1.5. Кризис философии математики	19
ГЛАВА 2. Матричное исчисление	21
2.1. Матричная алгебра	21
2.2. Собственные значения	26
2.3. Матричное дифференцирование	28
2.4. Многомерные пространства	32
2.5. Линейные системы	34
ЧАСТЬ II. ЭВОЛЮЦИЯ МОДЕЛЕЙ ДВИЖЕНИЯ	41
ГЛАВА 3. Естественное и управляемое движения	43
3.1. От Зенона до Ньютона	43
3.2. Формализм Лагранжа	45
3.3. Формализм Гамильтона	47
3.4. Формализм Якоби	48
3.5. Формализм Понтрягина	49
ГЛАВА 4. Модели пространства состояния	52
4.1. Канонические формы	52
4.2. Эквивалентные преобразования	53
4.3. Каноническая форма наблюдаемости	55
4.4. Каноническая форма управляемости	57
4.5. Редуцирование моделей	58
4.6. Многосвязные системы	59
ГЛАВА 5. Модальный синтез систем	61
5.1. Состояние проблемы	61
5.2. Матричное уравнение Сильвестра	63
5.3. Замыкание уравнения Сильвестра	67
5.4. Меры модального доминирования	70
5.5. Автоматизация выбора спектра	73

ЧАСТЬ III. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	81
ГЛАВА 6. Критерии идентифицируемости	83
6.1. Идентифицируемость однородной системы	83
6.2. Модальный критерий	86
6.3. Экспериментальный критерий	88
6.4. Каноническая форма идентифицируемости	89
6.5. Область неидентифицируемости	91
6.6. Структурно неидентифицируемые объекты	92
6.7. Отделение идентифицируемой части	93
6.8. Идентифицируемость неоднородных систем	94
6.9. Идентифицируемость нестационарных систем	98
ГЛАВА 7. Алгоритмы идентификации	101
7.1. Составление уравнений идентификации	101
7.2. Рекуррентные алгоритмы	103
7.3. Рекурсивные алгоритмы	106
7.4. Вырожденные задачи идентификации	107
7.5. Пошаговые процедуры	110
7.6. Поиск общего псевдорешения	112
7.7. Поиск взвешенного псевдорешения	115
ЧАСТЬ IV. КОМБИНИРОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ	121
ГЛАВА 8. Задачи пространственного маневрирования	123
8.1. Управление транспортным роботом	123
8.2. Посадка шатла на экраноплан	127
8.3. Задача жонглера с маятниками	131
8.4. Анализ и синтез нелинейных систем	132
8.5. Учет ограничений в виде неравенств	133
8.6. Локально-оптимальное управление	135
ГЛАВА 9. Проблема адаптивного управления	141
9.1. Управление и изучение	141
9.2. Адаптация и хаос	143
9.3. Принцип двойственности	144
9.4. Принцип разделения	145
9.5. Вычислительные аспекты	146
ДОБАВЛЕНИЕ. Модальный синтез нелинейных систем (И.Е. Зубер)	147
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	154

*Он не солгал нам, дух печально-строгий,
Принявший имя утренней звезды,
Когда сказал: «Не бойтесь высшей мзды,
Вкусите плод и будете, как боги».*

*Для юношей открылись все дороги,
Для старцев – все запретные труды,
Для девушек – янтарные плоды,
И белые, как снег, единороги.*

Н. С. Гумилев.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий курс теории управления движением написан на основе лекций, прочитанных в Новгородском институте повышения квалификации инженеров и Санкт-Петербургском университете аэрокосмического приборостроения, а также по результатам совместных научных работ с кафедрой теоретической кибернетики Санкт-Петербургского университета.

Джон Пирс не без юмора отметил как-то, что в компании теоретиков поддержать свое реноме на протяжении тридцати минут несложно, нужно только на всякий затруднительный вопрос с энтузиазмом отвечать: «да, уж это то с очевидностью вытекает из гамильтониана». Для того, чтобы оценить достоинства этой шутки, полезно знать путь, пройденный наукой, и то место, которое в ней занимают гамильтоновы системы.

К сожалению, несмотря на то, что наши студенты много и охотно учатся, по каким-то необъяснимым причинам научное мировоззрение подавляющего большинства из них прочно застревает на рубеже XVII века, охотнее всего вам прокомментируют законы Ньютона, и хорошо еще, если при этом вспомнят роль яблока. Дальнейшие изобретения ума человеческого остаются покрытыми дымкой неопределенности. Причины кроются, пожалуй, не в учащихся, а в материале для обучения.

Обширное поле науки поделено ныне на множество грядок и огородов. Теоретическая механика, основы электротехники, теория поля, теория дифференциальных уравнений и многие другие наделы лежат едва ли не поперец друг друга. Ясно, что приблизиться к истине, пусть даже и в вечном стремлении к ней, невозможно, все время что-либо расчлняя. Иногда надо собирать из кусочков мозаику мира.

О насущной необходимости синтетического подхода заявлял крупный математик и философ Норберт Винер своей кибернетикой. В пестром полевоенном лагере у него быстро нашлось немало врагов и сторонников. После снятия длительной осады, сторонники учения о связях в живом мире и в машинах победили, оно перестало быть источником раздоров и удостоилось должного признания.

О важности и неотвратимости синтетического этапа на пути познания вдоль грандиозной спирали развития человечества писал в «Поисках вымышленного царства» Л. Н. Гумилев.

Пьер Симон Лаплас не долго мучился с названием многоотомного труда, посвященного математической теории движения. Мир был вполне невинен, не разделен на составляющие, и подстать открывающейся мысленному взору картине математик назвал свою работу безыскусно и величественно: *Mécanique céleste* (небесная механика).

Так хотелось бы и сегодня поступить, но уже трудно что-либо выбрать. Достоянства внимания идея Н.Н. Красовского, поместившего рядом со словом «управление» термин «движение» [36]. Управлять можно не обязательно механическим движением, а, наоборот, и тем, что весьма на него непохоже: цветом, например, или химической реакцией. Добавка не столько ограничивает круг вопросов, сколько является верной приметой синтеза.

Итак, нужные акценты предисловием расставлены, его задача, по сути, выполнена. Осталось похвалить сам курс. Модальный синтез до сих пор не наделен внятыми указаниями на выбор «желаемого» спектра и «желаемых» собственных векторов. Вырожденные задачи идентификации существуют и ныне здравствуют, их надо решать, а научная литература наполнена «начальными установками» на несмещенность, эффективность и состоятельность оценок параметров, что реализовать затруднительно. Нелинейные системы и модальный синтез лежат, казалось бы, на разных полюсах планеты знаний, между тем их можно совместить. Все это составляет интригу разворачиваемого повествования. Декларация новизны, по самому замыслу обслуживания некоторого синтетического направления, курсу необязательна, но так уж получилось, что признаки нового отношения к старым задачам действительно присутствуют.

Предлагаемые взгляды пока вовсе не доминируют, но есть отчетливое ощущение их непотопляемой живучести.

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность коллегам, чье доброе и придирчивое внимание сделало возможным завершение этой работы, в частности, Л.А. Мироновскому, И.Е. Зубер и Г.С. Бритову. Рисунок, вырезанный из бумажной обложки программы международной конференции по теории нелинейных систем маленькими ножницами Ирины Ефремовны, помещен в заключение. Им передается благожелательная атмосфера семинаров лаборатории компьютерного моделирования, в которой автор имеет честь работать. При ином стечении обстоятельств и без основательной помощи близких автору людей Ю.В. Попкова, Т.В. Балониной и О.И. Пиккулевой писать столь отвлеченные от суетных реалий вещи в наше бурное богатое событиями время было бы верхом непредусмотрительности и неосторожности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 98-01-00011, 99-01-00083.

ЧАСТЬ I У ИСТОКОВ НАУКИ О ДВИЖЕНИИ

Наука о движении стала складываться, в первую очередь, у народов, оторвавших взор от Земли и устремивших его в небо. Таковыми были уже древние люди, о жизни и достижениях которых мы можем только догадываться, зная беспокойный нрав человека и его предприимчивость в отношении того, что не требует значительных физических затрат. Космос представляет собой природную всем доступную лабораторию, где процессы идут в стерильной чистоте вакуума. Остается только записывать показания. Этим начали заниматься повсеместно, сохранились глиняные таблицы и папирусы со следами первых упражнений. Путешественники, освоившие плавание по Средиземному морю, еще на заре античного мира поражались достижениям погрузенных в прошлое цивилизаций.

Астрономия волновала умы предсказаниями небесных событий, она служила опорой власти и занимала своими мистическими тайнами не одно поколение жрецов. Но и изучение движения самых обыденных предметов составляло большой практический интерес. Возьмем хотя бы такое оружие мезолита, как бумеранг. Для овладения его убийственной силой человек должен был провести немало экспериментов, ведущих к обширным познаниям в аэродинамике. Не так то легко пользоваться луком и стрелами, не говоря уж об искусстве кормчего – всегда ценимом в Средиземноморье. Для передачи опыта нужен язык, специальные понятия и особые символы. Он начал складываться из века в век постепенно.

Жрецы первыми познали могущество абстрактных математических моделей. Таблицы данных и правила их обработки превращали человека в чародея, прозревающего будущее. Геометрия возникла из споров вокруг раздела плодородных участков, восстанавливаемых после разливов рек. Синтез наук породил сложные траекторные модели небесных тел. Александрийская школа, занявшись сортировкой кривых, создала учение о конических сечениях, которое использовал Иоганн Кеплер. Траекторные модели наглядны, но громоздки. Опираясь на аналитическую геометрию Декарта (Картезия), Ньютон заложил основы нового исчисления, из свойств которого вырос ньютоново-картезианский детерминизм.

Эпизоды истории науки о движении не просто интересны, они дают ключ к пониманию тенденций развития важной области знаний. Их умело использовал в непревзойденных, по-своему, лекциях А. Н. Крылов. С тех пор, как вышли в свет его книги, прошло более полувека, и усилиями этого автора тоже [15] наука изменилась. Поэтому вводная часть посвящена прогулке в прошлое и современному языку математики.

Творение человека, математика, словно ожившая скульптура, вызывает восторг и замешательство своего создателя.

Таинственной кажется точность ее предсказаний, но за причудливым фасадом, скрывающим от взоров публики тяжкий труд и сомнения, кроется то мастерское копирование черт действительности, которое относят к опыту художественного восприятия действительности. Разве планеты движутся по орбитам, проложенным Кеплером? Нет, и они не подчиняются несовершенным, как выяснилось, законам Ньютона. Соображения Эйнштейна пока не нашли приложения за пределами Солнечной системы и, возможно, будут дополнены другими идеями. Точно также художник сначала создает эскиз, а потом начинает работать над картиной. Анри Пуанкаре флегматично заверил, что значение существующих концепций всегда завышается, хотя их могли бы заменить иные не менее хорошие теории.

Если история науки чему-либо учит, то взгляды на мир будут меняться и впредь. Обычно это связано с нарушением очередного «табу». Снятие запрета на понимание времени, отличное от образа реки, в которой, кружась и толкаясь, плывут погруженные в нее предметы, вызвало когда-то бурный всплеск мысли. Появилось непривычное представление о том, что причина и следствие – костыли нашего ограниченного сознания [3]. Подобно геометрии, где аксиомы и некоторые теоремы можно поменять местами, четырехмерный континуум пространства-времени статичен и обозреваем, как старый заброшенный дом с щелями, в любом направлении. Не об этом ли смутно толковали античные ученые, берясь за первые наброски реальности? Апории Зенона всколыхнули античный мир так, что и сейчас, спустя более двух тысяч лет, наблюдаются некоторое колебание.

Нет времени – нет и движения. Такого рода абстракции вызывают невольный протест, поскольку они предлагают принять к сведению точку зрения на сущее, собственно, не человека. Но давайте задумаемся, сможет ли тролль, нарисованный на экране дисплея и снабженный, благодаря совершенству компьютера, интеллектом, догадаться об истинном устройстве его «Вселенной», ставя опыты по падению нарисованных камней с наклонной башни? Даст ли ему повод гордиться собой экспериментально открытый им закон «всемирного» тяготения, и заподозрит ли он когда-либо за своей спиной настоящего автора *его* гравитации? Есть ли вообще смысл задавать настолько «бессмысленные», казалось бы, вопросы? Как знать, может быть, в связи с ними рухнет следующий заслон.

Философов давно мучает страшное подозрение, что несовершенные органы чувств обманывают нас, донося ложные впечатления, и, на самом деле, мы живем вовсе не там, где нам кажется. Что бы то ни было, мир велик, любопытен и наполнен занятыми деталями.

ГЛАВА 1 ОЧЕРК ИСТОРИИ АНТИЧНОЙ НАТУРФИЛОСОФИИ

1.1. НАЧАЛО

Начало истории моделирования человеком окружающего мира скрывается в сумеречных даях седого палеолита. На протяжении сотен тысяч лет люди жили собирательством, охотой и рыболовством, расписывая стены пещер рисунками. В позднем палеолите они пользуются не только огнем, но и колесом, гончарным кругом. Землю постепенно оставляют остатки последнего оледенения, на берегах плодородных рек в Египте и Месопотамии начинается копошение. Народы усиливаются, складываясь в крупные державы. Потребности государств в учете и контроле приводят к первым успехам, возникают причудливые, как мифы, арифметики, притягивающие к себе пришельцев издалека. Космогонические модели требуют тщательного ухода, питающего корни математики.

Вначале слегка тронутое редкими мазками поселений, набирает вес Средиземноморье. К исходу бронзового века очаги старой культуры выгорели, центр событий перемещается на побережье Эгейского моря. В туманной дымке встречает утро Милет, самый южный из двенадцати городов Ионии на западной границе Малой Азии. Здесь живет Фалес, посетивший древние царства и набравшийся восточной премудрости. О его страстном увлечении астрономией знает каждый встречный и охотно расскажет вам о том, как чужак провалился в колодец, наблюдая звездное небо. Под полой походного плаща он принес на родину записи о таинственных египетских дробях, древние астрологические таблицы и желание постичь неизведанное. Фалес заслужил репутацию мудреца, предсказав солнечное затмение 585 г. до н. э.. Своей славой он пробудил в согражданах любопытство.

Будить любопытство греков – мероприятие, обреченное на повальный успех. Фалес скоро обзаводится последователями. Пифагор родился на острове Самос близ Милета и в своих путешествиях исходил немало дорог. Он познакомился с астрономией стран Востока. Его воображение поражает то, что для предсказания небесных явлений не надо задираť голову вверх. В числах Пифагор видит проводников в параллельный мир, показывающий внутреннее обустройство Вселенной. За ним не следят хранители, ревниво оберегающие сокровища знаний. Пифагор открывает число как загадочную шкатулку, трепеща и предвкушая увидеть чудо. В интуиции кладоискателя ему не откажешь. Задолго до изобретения комплексной арифметики, он наделяет число свойством отражать не только количественные, но и пространственные отношения предметов, появляется, например, треугольное число $\cdot\cdot$ и прочие странные числа.

Пифагорейцев винят в мистицизме, но они не большие мистики, чем наши современники, додумавшиеся до относительности одновременности. В кружении вокруг треугольной фигуры Пифагор верен своей путеводной звезде. И она его не подвела, он стал самым известным математиком со времен сотворения мира. Прямоугольный треугольник – это уже не прямая, но еще далеко не плоскость. При аппроксимации гипотенузы ступенчатой линией (лесенкой) ее длина упорно равна сумме двух катетов. Так как такое приближение не выдерживает проверки, ученый изобрел иной ход мысли, приводящий к результату, превосходно согласующемуся с опытом. В наши дни к его способу измерять длины по площадям приклеилась поговорка: «Пифагоровы штаны на все стороны равны».

Если задуматься, чем ломаная линия отличается от прямой, помимо флюидно исчезающих при стремлении числа ступеней к бесконечности узлов, не следует ли сделать вывод о том, что умом постигаемых Вселенных существует несколько?

Полагая, что проводники в неведомый мир не должны путаться на дорогах и врать, Пифагор предпочел уйти от, безусловно, неприятного ему рассуждения. Возможно, он вовремя увидел и обратную сторону медали, поскольку дискуссия вокруг знаменитой аксиомы Евклида о параллельных закончилась для профессора Лобачевского обвинением в помешательстве. Чернышевский в своих письмах издалека сурово осудил почтенного геометра, не простив ему сущей шалости – невинного предположения о том, что через точку на плоскости можно провести несколько прямых линий, параллельных некоторой обособленной прямой.

Зенон из Элеи, тот вовсе не стал помогать плутающему в потемках сознанию, а решительно подставил ему бойцовскую подножку. Совершенствуясь, как античный полубог, в логических построениях, он всякому желающему охотно доказывал, что окружающий нас мир не более чем обман зрения. Для того, чтобы и пастуху стали ясны его доводы, он оформил свои апории в похожие на басни высказывания, известные под названиями Ахиллес, Дихотомия (деление на два), Стрела и Стадион. Приведем первые две истории, пересказав их своими словами.

Ахиллес. Ахиллес – самый быстроногий герой Илиады Гомера. Но и он не в состоянии догнать черепахи. В самом деле, когда скороход достигнет места, в котором черепаха была, она отползет на некоторое расстояние. И так будет повторяться без конца.

Дихотомия. Допустим, что путник хочет пройти некоторое расстояние. Он должен сначала достичь половины пути. Каждая часть пути допускает, в свою очередь, деление пополам, и так до бесконечности, так что движение никогда не сможет начаться.

Попробуйте отложить бесконечное количество поклонов и задайте себе вопрос, когда все это закончится? Никогда, подтвердите вы, ибо в этом состоит суть невыполнимости мероприятия. Аргументы Зенона показали, что доводы разума способны приводить к выводам, диаметрально противоположным наблюдаемым явлениям. Истории свойственно повторяться. На пороге двадцатого века физики уверяли всех, что ничто не способно смутить гармонии нарисованной ими картины мира, пока не получили удар из собственного лагеря. Нашлись отщепенцы, которые заявили, что возраст человека во Вселенной, как и всякой мелкой сошки в ней, зависит от позиции наблюдателя. Самое обидное, что, несмотря на явную бессмыслицу утверждения, будто бы Павел Павлович, сойдя с электрички, найдет своих закадычных приятелей более постаревшими, чем он сам, солидные книги сошлись вдруг во мнении, что так оно и есть на самом деле.

Но, если само время фикция, то в чем виноват Зенон? Он доказывал, что на изменения нужно смотреть философски, и неважно, что его коллеги, урезонивая мастера, молча ходили перед ним. Им было невдомек, что есть таки во Вселенной углы, из которых они видны как застывшие соляные столбики. Позвольте после этого не цитировать Аристотеля, который распял беднягу Зенона за то, что тот не оставил для слушателей пифагорейской лазейки: надо, дескать, оперировать скоростями, а не путями. Пусть этим пользуются школьники. Умозрительная теория в ловких руках оказалась инструментом более опасным, чем бритва.

Изворотливые греки попытались найти рецепт лечения заблуждений ума, сложив миф о Гордиевом узле.

Согласно легенде, Александр Македонский, прохаживаясь по ярмарке, заметил зевак, столпившихся около телег, скрепленных намертво хитрым узлом. Желаящие развязать узел отходили сконфуженно. Некий злонамеренный Гордий зарабатывал деньги на ставках, конечно, не совсем честно. Александр ударом меча рассек Гордиев клубок пополам.

У этого мифа и апорий Зенона есть общая часть, касающаяся спорной неразрешимости задачи. Если базироваться на предположении, что Гордий был проходимцем, зарабатывающим на хлеб внешним подобием морского узла, тогда Александр выглядит единственно мудрым в толпе человеком. Работа рассудка его оппонентов не вызывает нареканий, просто их действия изначально неправильно мотивированы. Урок, преподнесенный Зеноном, не прошел зря. После него ученые стали тщательно проверять исходные предпосылки. Особенно досталось всеми ругаемой бесконечности. Однако Евклиду не удалось изгнать ее окончательно из аксиом, на которых построено здание классической геометрии. Неопределенность, присущая и миру, оказалась платой за вход в него.

1.2. УКРУПНЕННАЯ ПАНОРАМА СОБЫТИЙ

Странное, что проступает при ознакомлении с хронометражем Земли, состоит в том, что в ее громадном по протяженности прошлом с легкостью могло бы уместиться множество цивилизаций, подобных нашей. Двести пятьдесят миллионов лет длится господство динозавров. В некоторых своих чертах они должны были достичь невысказанного совершенства. Кроме того, почва обязана быть наспигована их останками. Неугомимый Фридрих фон Уене искал динозавров от Америки до Африки, а нашел кости чудовищного зверя в 48 километрах от места своего рождения в Тюбингене (Германия). Не путайте замерзших в Сибири мамонтов с древними монстрами. Динозавры вымерли шестьдесят миллионов лет тому назад, причины их ухода неясны. Последнее оледенение законсервировало животных каменного века, который отстоит от нас недалеко – рукой подать.

Учение Вернадского об оболочках Земли придает особое хирургическое значение сфере космического холода для формирования живого [1]. Он пишет о направляемом холодом движении вещества, струившемся в косной материи задолго до появления первой белковой молекулы. В живой материи процессы идут в масштабе исторического времени, в косной – в масштабе геологического времени, «секунда» которого много больше декамириады, т.е. ста тысяч лет исторического времени. Биогенный ток атомов выковал человека. Примерно двадцать тысяч лет тому назад криосфера утянула щупальца ввысь, к заоблачным вершинам гор, ледяные реки обмелели, и началось победное шествие новоиспеченного существа. Болотистые низины, леса и пустыни заселили животные. Питаясь ими, «мыслящий тростник», как называл человека Паскаль, необычайно размножился. Он сумел справиться с легкоплавкими металлами, делал горшки, варил пиво. За этими достойными занятиями мы застаем его в неолите.

Великие реки – Нил, Тигр, Инд, позже – Ганг, Хуанхэ, а позже – Янцзы, приютили на пышных берегах сторонников интенсивного земледелия. Регулирование разливов и осушение болот повысило уровень жизни, что немедленно принесло плоды. Зародилась городская аристократия во главе с могущественными вождями. В раздорах и войнах возникли первые деспотии, объединившие обширные территории под властью единого монарха. Эту картину мы видим в Египте, Месопотамии, позднее в Китае и Индии. Стабильная сытая жизнь имеет свои недостатки. Благодаря устоявшейся традиции знания легко превращались в религии, передаваемые добросовестными учителями. В таком замороженном состоянии древние государства легко преодолевали тысячелетия. Чтобы стронуть маховик истории с места, на ее авансцене должны были появиться новые народы.

Средиземноморский бассейн по праву именуется местом рождения современной цивилизации. Три тысячи лет тому назад он был освоен финикийскими мореходами, связавшими ниточками торговых путей прибрежные города. Этот образ напоминает мозг, окутанный кровеносными сосудами. Как орган мысли он и начал функционировать, подарив миру золотой век науки и искусства. Древние государства на Ближнем Востоке послужили щитом, оградившим его от напора кочевников. Омолаживающиеся царства сами время от времени пытались прибрать к рукам приморские территории. В борьбе Персия не смогла переломить хребет свободолюбивой Греции. Александр Македонский выполнил миссию, уготованную ему инерцией спора Востока и Запада. Он умер в покоренном им Вавилоне в 323 г. до н. э.. Античная история распалась на периоды до и после него.

До Александра наука питалась наставлениями бродячих проповедников мудрости. После него его полководцы поделили между собой богатства разросшегося эллинского мира. Сирия и Македония приглянулись Селевку и Антигону, затем только лишь, чтобы впоследствии достаться Риму. Потомки Птолемея превратились в фараонов. Благодаря их религиозной терпимости, им на триста лет подчинился Египет. Александрия прославилась как жемчужина в ореоле городов Средиземного моря. Образованные эллины, желая придать блеск новому центру Ойкумены, превратили науку в профессию. Римляне не трогали этот оазис, поскольку он не задевал их солдафонских амбиций, а наиболее просвещенные императоры черпали отсюда свое вдохновение. Цезарь снова возложил к ногам Клеопатры, дочери Птолемея XII, покоренный его солдатами город.

В Египте сошлись встречные традиции созерцать и размышлять, в итоге работы александрийских астрономов намного опередили свое время. Библиотека Александрии стала плацдармом для накопления знаний. Здесь были изданы «Начала» Евклида. Наше школьное образование в области геометрии почти целиком основывается на первых шести томах его сочинений. Арабы, захватившие в 630 г. Александрию, по сути, спасли некоторые труды от забвения. До них ценную библиотеку частично разграбили, частично сожгли захиревшие потомки бывших ее обладателей. Восточные ученые перевели уцелевшие книги, в таком виде работы древних мыслителей пережили долгие смутные времена.

На протяжении нескольких столетий в булькающем котле Европы растворились остатки рабовладельческого строя, как щелочь, разложившего античный мир. В мучительных поисках сложилась экономическая система нового типа, феодальные государства окрепли и, наконец, смогли обратиться к культуре. Накопленное античным миром богатство вернулось при полном своем блеске во времена Ренессанса.

Первыми абстрактными моделями действительности стали числа, в обозначениях цифр и оснований (11 на деле проще выразить как 10 и 1) люди проявили немалую изобретательность. Для распространенных оснований, кратных, очевидно, количеству пальцев на руках, а при большом торге, – еще и на ногах, стали возникать памятные знаки в виде пучков травы, зарубок на палках, узлов на веревках или ракушек, сложенных по пяти в кучки. Отсюда один шаг до возникновения специальных символов для пяти, десяти и т. д. Египетская десятка копировала сноп.

Римляне перевернули сноп, заострили угол и превратили в пятерку V. Резон приблизить основание к началу у них был простой, цифры от 1 до 9 простодушные египтяне отображали палочками. Экономные греки избрали в качестве цифр первые буквы своего алфавита. Древнеславянский счет заимствовал у греков эту идею. Рядом с цифрой, чтобы отличить ее от буквы, ставились разные знаки: черточки, кружочки. Забавное число «ворон» было окружено крестиками, как бы летающими птицами. Покорение континентов раскрыло сходную картину у других народов. В американском племени Майя цифры изображались точками, а основания черточками [7]. Черточка обозначала пятерку. Размер полочки позволял выстроить над основанием несколько точек подряд:

$$\begin{array}{c} \dots \\ \text{---} \end{array} = \text{VIII} = 8$$

Свои числа майя могли мастерить из ближайших предметов: камешков, щепочек. Цифры сходны с римскими, но это таинственное государство индейцев не знало колеса и затерялось в джунглях X века.

Повсюду в числовых системах древности мы видим удобство для выражения количественных отношений предметов. Делить добро собственник предпочитал скорее физически, нежели умственно. Попробуйте, допустим, хотя бы умножить MСХI на XVII. В Египте писцам ставились памятники. Размышления над несовершенством числа заставило Архимеда написать трактат «Исчисление песчинок».

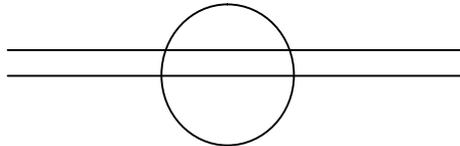
В Китае первый царь, основавший династию Цинь, появился в 221 г. до н. э. Император приказал ввести для объединенных царской властью разноязычных племен символы не только для цифр, но и для слов. В наследство мы получили как бы незамкнутый алфавит, в котором изучению смысла одного знака можно было посвятить целую жизнь. Понятно, какие блестящие перспективы открывало это для учителей мудрости, чьи знания, умещающиеся в несколько иероглифов, способны были годами удерживать при себе толпы прилежных учеников.

1.3. КОСМОГОНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В александрийский период изучению географии и астрономии посвятили себя Эратосфен, Аполлоний, Аристарх, Гиппарх, Птоломей и десятки других светил эллинской науки. Все это способствовало тому, что александрийцы создали астрономическую теорию, которая на протяжении пятнадцати столетий оставалась непревзойденной.

Эратосфен (родился примерно в 276 г. до н. э.) известен тем, что измерил радиус Земли, заглянув в колодец.

В день летнего солнцестояния в Сиене, ныне Асуан, в полдень солнечные лучи освещали дно глубокого вертикального колодца, в то время как в Александрии стержень солнечных часов отбрасывал в полдень короткую тень. Сопоставив эти два факта, ученый решил подкрепить свои догадки относительно формы Земли вычислениями. Предположим, что солнечные лучи в Александрии и Сиене практически параллельны. Перед нами фигура, которая предстала мысленному взору Эратосфена:



Сиена отстоит от столицы на 5000 стадий, будучи примерно на том же меридиане. Тщательно юстированные солнечные часы позволяют по тени стержня измерить главное, что нужно геометру, – угол между солнечным лучом и земной поверхностью в Александрии. Решив геометрическую задачу, Эратосфен показал, что расстояние между городами, отложенное по поверхности земного шара, должно составлять $1/50$ окружности Земли. Отсюда он нашел длину окружности Земли равной 250 000 стадий, что соответствует приблизительно 39 690 км.

В теории чисел известно «решето Эратосфена». Сначала берется крупное решето, через него выпадает все, что делится на два. Затем более мелкое отсеивает все, что делится на три, и т. д. Сухой остаток – простые числа, делятся только сами на себя. Блестяще образованный даже для грека ученый, не довольствуясь успехами в математике, астрономии и географии, выступал также на поприще поэзии, истории, грамматики и литературной критики и был удостоен почетного прозвища «Бета» (по названию второй буквы греческого алфавита) за то, что во всех этих областях знания уступал лишь сильнейшим.

Аристарх Самосский (родился в 310 г. до н. э.) вычислил расстояния до Луны и Солнца следующим занятным образом.

Астроном наблюдает восход Луны и определяет угол между направлениями на нее и на некоторую неподвижную звезду. Положение далекой звезды не зависит от вращения Земли. Другое дело, более близкий к нам спутник, уже через 12 часов наблюдатель фиксирует его на новом месте. Этого вполне достаточно для расчета расстояния до Луны, Аристарх нашел его равным 56 радиусам Земли (действительное – 60,2 радиуса Земли). Оценивая расстояние до Солнца, астроном определяет угол между направлениями на него и на Луну в тот момент, когда спутник Земли находится в квадратуре, т.е. видна четверть Луны. Тогда космические тела расположены строго по углам прямоугольного треугольника, о котором теперь многое что известно. Оружием Аристарха был великолепный труд Евклида, написанный несколькими десятилетиями ранее.

Евклид занимался, собственно, оптикой. С его подачи в совершенных солнечных лучах геометры видят прямые линии.

Сплотивший ученых Египет располагал колоссальными сведениями о движениях планет. Находки Аристарха Самосского не помогли устоять гелиоцентрической системе. Траектории небесных тел не укладывались в круговые орбиты, а другие кривые не отвечали эстетическим вкусам греков. Клавдий Птоломей заметил, что Солнце обращается не столько вокруг Земли, сколько вокруг точки рядом с нею. Позднее это служило косвенным указанием на место расположения бога, сотворившего все сущее и любящегося им. Для того, чтобы теория не расходилась с практикой, поднатеревшие в геометрии эллины придумали эпициклы: так, задолго до рядов Фурье, возник метод последовательных приближений. Ныне им пользуются всякий раз, когда природа сигнала непонятна, не забывая поругивать древних за их шепетильность, ибо эллипс был им знаком.

Ведущая скрипка в космогонических учениях принадлежит Пифагору. Изучая резонансные явления, он обнаружил, что гармонические созвучия рождают струны, длины которых дают целые отношения. Это лишний раз подтверждало величие теории числа, построенной на процедуре деления. Понятие красоты сопричастно божественному вдохновению. Для того, чтобы постичь законы Вселенной, человек должен подняться от арифметики и геометрии к музыке и астрономии. Сложился «квадривиум», первая концепция образования, которую мы находим у Платона, ученика Сократа. Предполагалось, что планеты в кружении издают гармоничные созвучия, иначе небеса уподобились бы иррациональной Земле. Парадоксально, но факт, что поиски музыки небесных сфер вывели Кеплера и Ньютона на закон всемирного тяготения и теоретическую механику.

1.4. МЕХАНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

На первом месте среди создателей механики стоит Архимед. Он родился в 287 г. до н. э. в Сицилии, в городе Сиракузах. Образование получил в Александрии, научная переписка связывала его с Эратосфеном. В покровительстве Архимед не нуждался, он был родственником царя Гиерона. Когда римляне осадили Сиракузы, они столкнулись с дьявольской изобретательностью этого неординарного ума. Предоставим слово Плутарху.

«При двойной атаке римлян сиракузцы онемели, поражённые ужасом. Что они могли противопоставить таким силам, такой могущественной рати? Архимед пустил в ход свои машины. Сухопутная армия была поражена градом метательных снарядов и громадных камней, бросаемых с великою стремительностью. Ничто не могло противостать их удару, они всё низвергали пред собою и вносили смятение в ряды. Что касается флота – то вдруг с высоты стен брёвна опускались, вследствие своего веса и приданной скорости, на суда и топили их. То железные когти и клювы захватывали суда, подымали их на воздух носом вверх, кормою вниз, и потом погружали в воду. А то суда приводились во вращение и, кружась, попадали на подводные камни и угёсы у подножья стен. Большая часть находившихся на судах погибала под ударом. Всякую минуту видели какое-нибудь судно поднятым в воздухе над морем. Страшное зрелище! Судно поворачивается из стороны в сторону, люди валятся, как бы пускаемые из пращи. Опустошённое судно или разбивается о стены, или погружается в море, будучи выпущено машиною.

Марцелл придвинул на большом помосте машину, называвшуюся самбук, по сходству с музыкальным инструментом этого имени. Когда она приближалась к стене и была ещё довольно далеко, Архимед пустил в неё камень весом в десять талантов, затем другой, третий. Камни, как бурею несомые, попадали в машину, ударялись в помост и разбивали его. Марцелл, не зная, что делать, поспешил увести флот и дал приказ войску на суше отступить. Был собран совет; порешили, если будет можно, ночью подойти под самые стены. Машины Архимеда с их огромною силою будут – думали – бросать снаряды так, что они пролетят над головами осаждающих, не попадая в них. Но Архимед давно заготовил приспособления на этот случай. Он расположил и такие машины, которых действие сопряжено было с расстоянием и которые почти без перерыва выбрасывали короткие копья. В стенах сделаны были многие дыры, чрез которые действовали на близком расстоянии скорпионы, невидимые неприятелю.

Достигнув стен, римляне воображали себя в безопасности, но они были под ударами. Камни падали на них сверху, стены – отовсюду пускали в них копья. Они было удалились, но машины слали новые метательные снаряды и поражали отступающих. Много погибло, суда сталкивались между собою, и осаждаемым причинить какой-либо вред было нельзя. Большая часть машин Архимеда была за стенами. Невидимая рука бросала тысячи зол в римлян: они боролись с богами. Сам Марцелл ускользнул от опасности. Подсмеиваясь над своими инженерами, он говорил: «Не перестать ли нам воевать с этим геометром Бриарием, который принимает корабли наши за ковши для черпания воды, разбивает самбук и превосходит сторук мифологических великанов, бросая столько копий за раз». Действительно, население Сиракуз было телом, а Архимед – душою, проводившей все машины в движение. Все другие орудия бездействовали: только его употреблялись и для нападения, и для защиты. Под конец страх римлян сделался так велик, что как только увидят конец верёвки, бревно над стенами, обращаются в бегство, крича: «ещё машина Архимеда против нас!»

Циклопические пирамиды Египта свидетельствуют о знакомстве населявших его народов с клином и рычагом. Изображения чашечных весов и колодезного «журавля» (шадуф) встречаются в египетских папирусах [4]. Склонных к математическим изыскам александрийцев грубый рычаг мог заинтересовать законом пропорций, позволяющим дополнить популярные со времен Пифагора исследования рационального и иррационального наглядными механическими иллюстрациями. К теме рычага обращался не только прославленный купанием в ванне и битвами Архимед, но также астроном и геометр Евдокс. Позднее Папп Александриец (годы деятельности 305–284) подведет итог изучению свойств статических машин, указывая, что все сводится к пяти простым приспособлениям: ось с колесом (ворот), рычаг, полиспаст, клин и бесконечный винт, см. рис. 1.1.

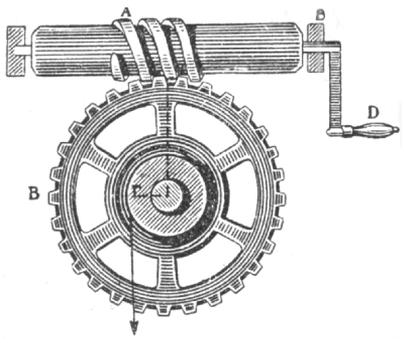


Рис. 1.1. Бесконечный винт

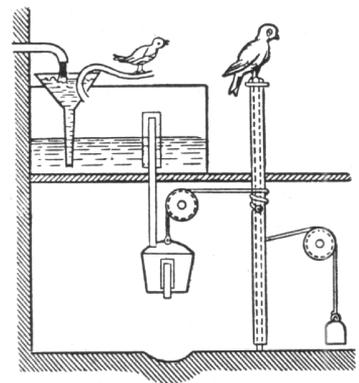


Рис. 1.2. Поющая птичка и сова

Водные процедуры Архимеда имели далеко идущие последствия. Сын брладобрея, искусный изобретатель Ктезибий, жил во II веке до н. э.. Он изготовил водяные часы с указателем, водяной орган, а также пожарную машину. Его ученик, Герон Александрийский, построил реактивную паровую «мельницу». Исследуя сифоны, он набрел на идею водного компаратора. Устройство прибора изображено на рис. 1.2., передающем детали игрушки «поющая птичка». Сифон представляет собой трубку, которая вставлена в дно кастрюльки. На трубку надета перевернутая пробирка. Кастрюлька медленно заполняется водой через воронку. Когда вода в пробирке достигает края трубки, возникает коленный ствол, каким часто пользуются шоферы. Кастрюлька опоражнивается. Приводимая механизмом в действие птичка свистит, когда сова на нее не смотрит.

1.5. КРИЗИС ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ

Зародившись в античной Греции, теория числа превратилась во всемирно признаваемое ристалище, на котором испытывали свои силы сильнейшие математики. При делении яблока между едоками на доли нельзя получить иррациональное количество вещества. Греки были поражены изобретением геометрической машины, которая без натуги производила числа, не равные отношениям двух целых величин. Этот парадокс казался им родственником апорий Зенона. Отвергнув движение как фикцию, греки вполне последовательно вывели иррациональность за пределы понятия «число». В дальнейшем в Европе будет изготовлено много других «числоделательных» машин. Поиск корней полиномов увенчался открытием, появились алгебраические числа. Потом заявили о себе числа трансцендентные. Разрастающееся древо познания выбрасывало все новые и новые побеги.

В начале XIX века сортировать числа принялся сын садовода, Карл Фридрих Гаусс, переняв привычки селекционера у трудолюбивого отца. Своими работами он прославил Геттингенский университет, ставший с тех пор центром притяжения для математиков. Примерно в те же годы Эварист Галуа создал необычную арифметику над конечным набором элементов. Его таблица умножения четырех «чисел», содержащая в клетках только сомножители, производит неизгладимое эстетическое впечатление. В общем, алгебраисты в смелости поисков не уступали основоположникам неевклидовой геометрии. Уильям Гамильтон понял, что в угоду сложности суперкомплексного числа, кватерниона, придется пожертвовать коммутативным законом арифметики $AB \equiv BA$. Он отсек одну ветвь, Давид Гильберт принялся за другие: данные им бледными едва различимыми красками трансфинитные абстракции бесполезно увеличивать, от суммирования они не возрастают, по определению $A \equiv A+1$.

Каждая новая математическая машина отличалась присущими одной ей деталями. Следует ли их особенности складывать в одну кучку, и если да, то есть ли смысл говорить о пределах мыслимой Вселенной? Проблемы трисекции угла, удвоения куба, квадратуры круга волновали умы не одно столетие. Оказалось, что на ряд простых вопросов в геометрии нельзя получить ответы построениями при помощи циркуля и линейки. Абель, исследуя полиномы, указал на недостаточную разрешающую силу привычных арифметических операций. Если мы ограничиваем себя в средствах, вправе ли мы считать задачи неразрешимыми, и, наоборот, если наши возможности беспредельны, то в чем состоит содержание наших проблем? Конечно, чтобы достичь чего-либо, надо разумно ограничиться. Беда рассудку, когда граница разумного все время переносится.

«Мнимые числа, – писал в 1702 г. Готтфрид фон Лейбниц, – это паразитический полет духа божьего; это почти амфибии, находящиеся где-то между бытием и небытием». Трудно подыскать, пожалуй, лучшее свидетельство опиумного действия плодов древа познания. Если мнимые числа – амфибии, то трансфинитные, уж точно, не более чем дымка от числа. Даже флюксии Ньютона заслужили более телесное прозвище «привидений». Леопольд Кронекер, вторя древним, считал, что целые числа суть творения божьи, а все остальные виды чисел – результат человеческой изобретательности. О том, какому пристальному досмотру подверглись божьи посланцы, свидетельствует определение положительных целых чисел, данное итальянцем Джузеппе Пеано:

«1 есть положительное целое число; за каждым положительным целым числом следует ровно одно и только одно положительное целое число; ни за каким положительным целым числом не следует 1; за разными положительными целыми числами следуют разные положительные целые числа; пусть некое утверждение выполняется для числа 1, и пусть всякий раз, как это происходит для некоторого положительного целого числа, оно выполняется и для следующего за ним числа, тогда это утверждение распространяется и на все положительные целые числа.»

Стремясь прикрыть уязвимые места математики броней безупречных аксиом, К. Вейерштрасс, Р. Дедекин и Г. Кантор тремя различными способами подошли к определению числа. Накопленный ими опыт лишний раз показал, что мыслимые вселенные не стремятся слиться и объяснить одну единственную, нашу. Их узор напоминает неплотно пригнанные чешуйки рыбы. При критическом обозрении между пластинами всегда обнаруживается досадный зазор. Исследования породили новые парадоксы. Выпас стада математических созданий только прибавил хлопот. Говоря языком биологии, проявили себя генетическая несовместимость и отторжение тканей, запахло всеобъемлющим кризисом математики.

Приблизимся к пугающему коллапсу с безопасной стороны. Задолго до эры книгопечатания природа изобрела свой печатный станок, репродуцируя ДНК. Кино, телевидение и радио – лишь слабое ему подражание и продолжение той же тенденции. Мощное информационное поле развивает и воспитывает людей. Человек в нем играет разве что роль электрона. На деле, неясно еще, кто кого создает и направляет, мы поле, или поле нас. Претворяя витающие в воздухе идеи в реальность, мы материализуем накопленный полем потенциал. Как это ни парадоксально, но мыслимые миры при всей их множественности – часть окружающей нас действительности, такая же, как земля под ногами и звезды над головой.

ГЛАВА 2 МАТРИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2.1. МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА

Вот уже столетие как матрицы пользуются повышенным вниманием математиков. Им целиком посвящен один из заметных научных трудов уходящего века, монография Ф. Р. Гантмахера [12]. Свойства матриц тщательно изучаются, некоторые из них, как астероиды, носят имена своих первооткрывателей. Спрашивается, почему объекты, шагнувшие в мир как бы со страниц конторской книги, обрели в нем такое звучание? Попытаемся подыскать вразумительный ответ на поставленный вопрос.

Матрица является закономерным продуктом развития теории числа. Еще греки задавали рациональные числа отношением двух целых чисел. Иррациональные числа можно представить таблицей длин катетов прямоугольного треугольника. Комплексные числа оставались для математиков лишь предметом отвлеченных манипуляций вплоть до XIX в., когда норвежец Гаспар Вессель первым ввел их геометрическое представление [5]. Позднее ирландский математик Уильям Роуэн Гамильтон развил алгебраическую интерпретацию комплексных чисел, согласно которой каждое комплексное число задается парой обычных чисел.

Умножение комплексных чисел можно представить как поворот на плоскости. Нельзя ли ввести новый вид числа и определить способ умножения, выразив с его помощью поворот в трехмерном пространстве? Эти числа Гамильтон назвал триплетами. Задача о триплетях, беспрестанно занимавшая математика, оказалась крепким орешком. Вся семья Гамильтона переживала с ним его неудачи. Сам он рассказывал, что стоило ему спуститься к завтраку, как один из его сыновей спрашивал: «Ну, папа, можешь ли ты уже умножать триплеты?» И папа должен был удрученно отвечать: «Нет, я могу только складывать и вычитать их».

Секрет триплетов оказался прост. Законы арифметики выверялись веками, нелегко было поверить, что платой за усложнение числа послужит коммутативный закон. Кватернионы не допускают приведения подобных членов заменой $AB+BA$ на $2AB$. Спустя полвека Софус Ли создал алгебру и вовсе на противоположном начале $AB=-BA$. В этом случае $AB+BA=0$ и $(A+B)^2=A^2+B^2$. Затея Гамильтона прижилась и вскоре дала замечательные всходы. В соревновании нарождающихся алгебраических систем кватернионы уступили место матрицам, которые вобрали в себя удивительное свойство отображать резонанс. Резонансными свойствами обладают атом и электрическая схема, элементарная частица и звезда. Матрица оказалась весьма простой и удобной моделью многих систем.

Матрицы – это прямоугольные таблицы чисел с элементами, пронумерованными по строкам и столбцам:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Складывать и вычитать их между собой нужно поэлементно. Сходно оперируют с комплексными числами. Умножение матриц не наследует черты комплексной арифметики. Оно опирается на представление о скалярном произведении пары векторов

$$c = (a, b) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

Его используют в аналитической геометрии при определении величины косинуса угла раствора двух векторов a , b единичной длины. При умножении матриц $C=AB$ каждая строка A умножается скалярно на каждый столбец B , результаты сводятся в итоговую таблицу C . Умножение вектора на матрицу описывает его поворот с одновременным масштабированием. Это можно трактовать также просто как смену ортов системы координат на векторы, составляющие столбцы A .

Произведение матриц не коммутативно: $AB \neq BA$. Кроме того, возникают проблемы с делением их друг на друга. Алгебраисты склонны объединять хорошо ведущие себя объекты в поле или в кольцо. По определению, существует поле вещественных чисел. Оно задает правила игры. Им подчиняются также комплексные числа. Целые числа поля не образуют, их скромный удел – кольцо, сохраняющее правила сложения, вычитания и умножения. Это означает частичную возможность пускать процессы вычислений вспять. Матрицы образуют некоммутативное кольцо. Если отсеять нехорошие матрицы, а это, прежде всего, неравнобокие по длине и ширине таблицы, то из них удастся сконструировать приличное поле.

Мерой приличия матрицы является ее определитель – функция элементов квадратной матрицы порядка n , обозначаемая $\det(A)$. Определитель (детерминант) матрицы второго порядка равен разности произведений элементов двух ее диагоналей $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Определитель матрицы более высокого порядка можно выразить через определители ее блоков, на этот счет разработана строгая, но громоздкая теория. Выход ее прост: в поле вещественных чисел делить на нуль запрещается, то же самое касается матриц с нулевым определителем – на них делить нельзя.

Не следует забывать о том, что матрица значительнее числа. У нее есть свои, присущие только ей свойства и операции. Например, так как она имеет горизонтальный и вертикальный размеры, ее можно поставить набок. Не каждая матрица заслуживает обратной, но любую таблицу легко «опрокинуть». Матрица, у которой столбцы заменены строками, называется транспонированной по отношению к исходной и обозначается A^T , т. е.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Транспонирование – в некотором смысле не доведенное до конца обращение, слабое утешение за запрет образовывать поле. О том, что природа операции транспонирования близка к инверсии, свидетельствует то, что для ортогональных матриц, с ортогональными нормированными столбцами, в точности $A^T=A^{-1}$. Кроме того, правило раскрытия скобок едино для операций транспонирования и обращения $(AB)^T=B^T A^T$, $(AB)^{-1}=B^{-1} A^{-1}$.

Вырожденных матриц много, между тем ноль в обычной арифметике должен быть только один. Поэтому все отличные от строго нулевой неинвертируемые матрицы выбраковываются. Как ни удивительно, оставшегося материала хватает на поле. Математик, вооружившись определителем, выступает в роли портного, отхватывающего ножницами у старой, но годной на жакет рубахи протертого рукава. Если принять во внимание размеры матриц, понятно, почему они выдерживают все.

Что касается поля, то о нем многое известно из школьной арифметики. Невырожденные матрицы через отношения $A^{-1}A=E$, $AA^{-1}=E$ обзаводятся обратными элементами A^{-1} . Единичная матрица E содержит только нули и еще единицы на главной (направленной слева-направо и вниз) диагонали. Уравнение $AX=B$ имеет единственное решение $X=A^{-1}B$ тогда и только тогда, когда $\det(A) \neq 0$. Матричная «нотация» резко упростила вид записи систем алгебраических и дифференциальных уравнений, с ее помощью научные книги с середины XX века стали заметно тоньше.

Матричное исчисление ущербно, так как нет возможности приводить подобные вида AB и BA . Его сильная сторона видна не сразу. Оказывается, что потеря мобильности в перестановке сомножителей с лихвой окупается перспективой замены матрицы A более простыми компонентами разложения $A=QR$ или $A=UDV$. Здесь все как в химии, занятой возней с ингредиентами – разложения необычны, но действенны.

Распространенные в матричной алгебре разложения A на множители осуществимы и тогда, когда обратной матрицы нет. Это снижает риск получить на выходе вычислительного агрегата ерунду. Детали разложений достаточно разговорчивы, по их виду бывает несложно предсказать судьбы частных инверсий. Для симметричных матриц $A^T=A$ большой популярностью пользуется разложение Холецкого $A=LL^T$, где часть представляет собой нижнюю треугольную матрицу

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{12} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Признаком вырожденности L служат нулевые диагональные элементы. Располагая сведениями о матрице разложения, несложно оценить ее ущербность по отношениям элементов.

Никто не инвертирует ныне матрицы на основе теории определителей. Дело в том, что во внешнему виду таблицы никак не скажешь, насколько она предрасположена к обращению. Точно также «молчит» определитель. Он зависит от масштабного множителя при матрице $\det(kA) = k^n \det(A)$. Умножили матрицу на большое число – и ее определитель «поправился». Это не означает, конечно, что проблемы машинной арифметики решает простое масштабирование. С легким сердцем можно попытаться заложить плохо обусловленные данные в вычислительную технику, как в стиральную машину, и нажать кнопку. Увы, компьютер сам по себе ничего умного не придумает, вместо A^{-1} он вернет «тряпочки». Беда не в них, собственно, а в том, что мы об этом, порою, даже не подозреваем.

Среди разложений большое значение имеет спектральное разложение квадратной матрицы $A=VDV^{-1}$, в котором D – диагональная матрица. Его аналогом для прямоугольных таблиц является более сложное сингулярное разложение вида $A=USV^T$. После разложений, уравнение $AX=B$ заменяется на $LL^T X=B$ или $USV^T X=B$ и решается последовательной инверсией сомножителей, например, $L^T X=L^{-1}B$, $X=(L^{-1})^T L^{-1}B$ и т. п. Сингулярное разложение используется для формальной оценки зависимости решения от погрешностей: *числом обусловленности* $cond(A)$ называется максимум отношения сингулярных чисел (элементов диагонали S). Компьютер выполняет над складываемыми несоразмерными значениями работу сенокосилки. Так что своевременное информирование о характере обрабатываемого им материала позволяет заглянуть в будущее.

Примерно до середины XX столетия не пришедшие ко двору прямоугольные матрицы вызывали вялую реакцию алгебраистов. Наконец, стало ясно, что более нельзя терпеть неопределенность в способах выражения решения системы линейных алгебраических уравнений общего вида $AX=B$, с любыми матрицами левой и правой частей. Вычислительные алгоритмы, конечно, хорошо, но без соответствующих обозначений трудно работать с вырожденными или, наоборот, с переопределенными системами. В эпоху торжества матричной алгебры такая помеха смотрелась как белое пятно на карте досконально изученной территории.

Сначала Мур (1920), а потом Пенроуз (1955) предложили использовать в роли аналога обратной матрицы «масштабированную» транспонированную матрицу $A^+ = MA^T = A^TW$, удовлетворяющую уравнению $AA^+A = A$. Его решение единственно. Пенроуз озабочился тем, чтобы найти близкие аналоги уравнениям $A^{-1}A=E$, $AA^{-1}=E$. Псевдообратная (как бы обратная) матрица отвечает условиям $AA^+A=A$, $A^+AA^+=A^+$, $AA^+=(AA^+)^T$, $A^+A=(A^+A)^T$. Первые два из них подтверждают представление о том, что выживает сильнейший. Остальные уравнения констатируют симметрию взаимных произведений матриц A и A^+ . Разработав столь совершенную теорию, алгебраисты смогли облегченно вздохнуть и написать «решение» системы линейных уравнений, годное на все случаи, как $X=A^+B$.

Традиция решать несовместные системы восходит к Гауссу, который минимизировал квадрат нормы разности $\|AX-B\|^2$. Квадратичная функция привлекательна тем, что ее экстремум отвечает линейному уравнению, получаемому после дифференцирования и приравнивания нулю производной. Система нормальных уравнений $A^T(AX-B)=0$ метода наименьших квадратов Гаусса совместна всегда, но может иметь множество решений. В таком случае псевдорешение выделяет среди прочих вектор минимальной длины. Расчет $X=A^+B$ дает точку, наиболее близкую к началу системы координат на множестве возможных решений. Если ранг матрицы вторичной системы полон, то ее вид подводит к часто используемой в литературе формуле для псевдообратной матрицы $A^+=(A^TA)^{-1}A^T$.

Следуя Гауссу, уравнения $A^{-1}A=E$, $AA^{-1}=E$ можно заменять условиями минимума квадратов норм $\|PA-E\|^2$, $\|AP-E\|^2$. Такое обобщение не противоречит предыдущему, причем среди претендентов на роль псевдообратной матрицы выбирается экстремальное решение $P=A^+$, минимальное, в свою очередь, по норме (сумма квадратов элементов итоговой матрицы P минимальна). Теория матриц, с ее разнообразием необычных элементов, однажды дала импульс развитию алгебре, абстрагируемой от особенностей арифметики чисел. Она и сейчас образует богатую почву для проведения масштабных параллелей.

2.2. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Теперь мы готовы обсудить главное качество матриц. Физическое явление резонанса хорошо знакомо каждому. Моделируя прохождение сигнала S через акустическую систему A , запишем

$$y = AS.$$

Если входной сигнал – резонансный тон, тогда выходной сигнал повторит его с точностью до масштабного множителя $y = \lambda S$, подобно тому, как струна, отзываясь при настройке на зажатую соседнюю, звучит ей в унисон или вторит камертону.

Распространенный музыкальный инструмент имеет шесть струн. У матрицы количество резонансных тонов отвечает ее размеру. Их называют собственными векторами, а масштабные коэффициенты при них – собственными числами или, короче, спектром A .

Полная алгебраическая проблема собственных значений заключается в отыскании всех собственных чисел (спектра матрицы) и собственных векторов, заданных уравнением

$$AS = \lambda S.$$

Оно нелинейно относительно искомым переменных, поскольку его правая часть содержит произведение неизвестных составляющих. В лоб их найти сложно. Попробуем отделить «мухи» λ от «котлет» S , переписав уравнение в виде $(A - \lambda E)S = 0$. Если определитель матрицы в круглых скобках отличен от нуля, есть тривиальное решение $S = (A - \lambda E)^{-1}0 = 0$. Нетривиальные собственные векторы существуют тогда и только тогда, когда

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Разделение переменных произошло. В последнем выражении нет собственных векторов. Его называют *характеристическим уравнением* матрицы A . Детерминант матрицы в круглых скобках представляет собой полином от λ . Теория комплексных чисел появилась, отчасти, потому, что позволила приписать полиному n -го порядка n корней.

При найденных значениях λ теперь нетрудно рассчитать собственные векторы из уравнения $(A - \lambda E)S = 0$. Линейно зависимой строкой вырожденной матрицы $A - \lambda E$ пренебрегают: вектор S находят с точностью до масштабного множителя, фиксирующего его длину.

Составим из собственных векторов и собственных значений и матрицы $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и $V = (S_1, S_2, \dots, S_n)$, связанные между собой как $AV = VD$. Отсюда следует важная формула спектрального разложения матрицы по матричным же составляющим

$$A = VDV^{-1}.$$

Пользуясь анатомическими терминами, мы отделили «скелет» D матрицы A от облегающей его «плоти» V .

Матрица A сложнее ее «рентгеновского снимка» D . Этим обстоятельством пользуются для того, чтобы упрощать уравнения. Проиллюстрируем эту идею на примере анализа квадратичной функции

$$f = x^T A x,$$

где A – симметричная матрица.

Собственные числа таких матриц вещественны, собственные векторы ортогональны. После нормирования собственных векторов, получаем ортогональную матрицу V , для которой $V^{-1} = V^T$, и $f = x^T V D V^T x$. Замена переменных $y = V^T x$ отвечает повороту координатных осей, в новом базисе квадратичная форма выглядит заметно проще

$$f = y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

Закон инерции квадратичных форм гласит о том, что нет такой квадратичной функции, которую нельзя привести к главным осям, т.е. к простому выражению указанного выше вида.

Отмеченная тактика с успехом используется также для решения дифференциальных уравнений, пусть

$$\dot{x} = Ax,$$

где x – вектор состояния; $x_0 = x(0)$ – начальное условие.

После подстановки разложения, имеем $\dot{x} = V D V^{-1} x$ или $V^{-1} \dot{x} = D V^{-1} x$, и

$$\dot{y} = D y, \quad x = V y.$$

В итоге, система линейных дифференциальных уравнений распалась на совокупность уравнений первого порядка.

2.3. МАТРИЧНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Аппарат векторно-матричного исчисления не приспособлен для манипуляций, целью которых является нахождение интегралов и производных от функций матричного аргумента. Недосток аксиоматики в этом направлении известен, памятная табличка формул матричного дифференцирования нет-нет, да встречается в работах – в приложении или в первой главе. При внимательном отношении табличкам свойственно разрастаться в таблицы. Чтобы от них избавиться, надо предложить систему формального дифференцирования, позволяющую находить результат, желательно, по простым правилам.

Попытаемся привести некоторые лежащие на поверхности соображения на этот счет. Начнем с формального определения.

Понятие производной скалярной функции по матрице уже устоялось. Это матрица, элементами которой являются частные производные функции по каждому элементу. Таков, например, градиент. Производная матрицы по скалярному аргументу образуется матрицей производных каждого ее элемента по одному и тому же аргументу. Расширяя эти толкования, придем к определению, согласно которому производная матрицы по матричному аргументу представляет собой блочную матрицу, в которой каждый блок включает производную дифференцируемой матричной функции по скалярному аргументу – элементу матричного аргумента.

Для того, чтобы лаконично записывать результаты формальных матричных действий, придется ввести пару относительно новых обозначений. Первое касается *векторизации* A^\uparrow матрицы, когда ее элементы строчка за строчкой последовательно слагаются в столбец. Второе обозначение для блочно-диагональной структуризации существует $diag(A, A, \dots, A)$, но есть желание иногда писать его короче, просто $\{A\}$. Количество повторений блоков A на диагонали, как и многое другое в матричной алгебре, остается за бортом, что не всегда правильно. Можно предложить другой эквивалент обозначения этой операции, например, такой: $\{A, n\}$.

Указанные операции обладают рядом почти очевидных свойств, например, $(x^T)^\uparrow = x$ и $\{A^{-1}\} = \{A\}^{-1}$.

Такие качества позволяют упрощать выкладки, тем большего интереса заслуживает связь диагонализации, векторизации и транспонирования, а именно: $\{A\}B^\uparrow = (BA^T)^\uparrow$, предполагается, что размерности сомножителей согласованы. Пара новых обозначений и одно правило, оказывается, способны вывести формулы матричного дифференцирования на вполне достойную лаконичного аппарата матриц орбиту. Покажем их действенность на ряде заслуживающих внимания примеров.

Отметим попутно у матричного дифференцирования коммутирующее знак транспонирования качество, оказывается что

$$\frac{d y^T A x}{dA} = y x^T, \text{ отсюда } \frac{d y^T A^T x}{dA} = \frac{d (x^T A y)^T}{dA} = x y^T.$$

Любопытно и просто выглядят производные векторных функций по векторному аргументу, существует несколько вариантов, в частности, такие

$$\frac{dx^T}{dx} = E, \quad \frac{dx}{dx} = E^\uparrow.$$

Производная произведения двух матриц по матричному же аргументу размера $n \times m$ трансформируется к виду

$$\frac{dAB}{dX} = \frac{dA}{dX} \{B, m\} + \{A, n\} \frac{dB}{dX}.$$

В случае скалярного аргумента формула становится тривиальной. Для часто встречаемого векторного аргумента первая диагонализация отмирает, поскольку $m = 1$. Символ n можно подразумевать.

В качестве демонстрации силы разделяемся с квадратичной формой, которую при ином подходе приходится дифференцировать поэлементно, а потом собирать ответ, как картинку из кубиков, итак

$$\frac{d x^T A x}{dx} = \frac{dx^T}{dx} A x + \{x^T A\} \frac{dx}{dx} = A x + \{x^T A\} E^\uparrow = (A + A^T) x.$$

Метод наименьших квадратов связан с поиском сложной производной от матрицы, имеем

$$\frac{d (y - A x)^T (y - A x)}{dA} = \frac{d x^T A^T A x}{dA} - 2 y x^T = 2 A x x^T - 2 y x^T = 2(A x - y) x^T.$$

Так, в одну строчку, выводятся формулы, под которые бронируется место в приложениях. Идее нужно выдержать испытание временем, пусть пока эстетическая сторона дела доставит удовольствие.

В теоретической механике и теории поля есть свой набор дифференциальных операторов, например, ротор и дивергенция.

Вспоминая правило буравчика, незаменимое в исследовании электромагнитных явлений, отметим, что оно описывает поворот на 90 градусов. Механики для этой цели придумали *векторное произведение* $y = \omega \times x$, паясынка матричного исчисления: ортогональные матрицы закрывают потребности в обеспечении поворотов. Среди них есть конструкции кососимметрические, отвечающие за прямой угол. Поворот с дополнительным растяжением не меняет вида матрицы, так что для векторного произведения нелегко подыскать матричный аналог $y = W x$, где

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Смешанное произведение векторов $z (\omega \times x)$ выливается в привычную запись билинейной формы $z^T W x$.

Попробуем найти матричную интерпретацию дифференциальных операторов. Понять их содержание неспециалисту нелегко, между тем, они используются в уравнениях Максвелла, играющих фундаментальную роль в науке. Эти уравнения дали жизнь теории относительности и навели Шредингера на объяснение дискретной природы процессов микромира. Матричная аналогия способна внести некоторое более ясное видение сложных вещей. Физическое пространство, в котором распространяется электромагнитная волна, трехмерно. Изменения полей в нем оцениваются частными производными напряженности вдоль трех пространственных направлений.

Оператором Гамильтона ∇ называют собрание операций взятия частных производных по трем направлениям физического мира. Применительно к скалярной функции трех координат этот оператор порождает градиент. Что касается векторной функции $\mathfrak{G}(x)$, наделенной в каждой точке x пространства величиной и направлением, то количество частных производных расширяется до девяти, собираемых в матрицу $d \mathfrak{G}^T / dx$. Дивергенция представляет собой след этой матрицы, т.е. сумму трех обусловленных индексами координатных осей производных $div \mathfrak{G}(x) = trace d \mathfrak{G}^T / dx$.

Дивергенция носит все признаки скалярного произведения векторов ∇ и $\mathfrak{G}(x)$. Ротор, напротив, формально определяется как векторное произведение, т.е. $rot \mathfrak{G}(x) = \nabla \times \mathfrak{G}(x)$. Такого сорта дефиниции дают скудную пищу воображению. Недаром с уравнениями Максвелла пришлось поработать нескольким математикам, только чтобы их разъяснить [6].

Фарадей находил силовые линии магнитного поля, насыпая металлические опилки на лист бумаги и поднося его к полюсу магнита.

Попробуем воспользоваться его методом. Лучи силовых линий в чем-то подобны градиенту $\nabla f(x) = Ax$ квадратичной функции $f(x) = 0.5 x^T Ax$.

Фазовые портреты линейных динамических систем, описывающих движения вдоль градиента $\dot{x} = Ax$, являются удобным руководством для постижения топологических особенностей векторных полей. Дивергенция вектора градиента представляет собой сумму вторых частных производных (это действие приписывают оператору Лапласа Δ) квадратичной функции, в данном случае она равна сумме диагональных элементов матрицы A . Не менее просто определить у такого поля ротор. Он составлен из разностей внедиагональных элементов A . Полям с нулевым ротором отвечают диагональные матрицы простыми собственными значениями.

Полям с нулевой дивергенцией отвечают матрицы с чисто мнимыми собственными значениями. Среди матриц с нулевой диагональю отметим кососимметрические. Квадратичную форму с их помощью не построишь, градиент не способен на такие фокусы, как замыкание. Но динамическая система $\dot{x} = Ax$ существует. В отсутствии монополей силовые линии электрического и магнитного полей замкнуты, не имеют ни начала, ни конца. Такие траектории прочерчивают частицы несжимаемой жидкости, подкрученной в ванне без слива. Задание нулевых дивергенций электрического и магнитного полей сродни заданию начальных условий, определяющих пространственные характеристики силовых линий.

Электромагнитное поле распространяется благодаря самоиндукции. Для ее описания и потребовался ротор или вихрь – *завиток* (*curl*), как поэтично назвал его склонный к стихотворным опусам Джеймс Клерк Максвелл, имевший, к тому же, привычку подписываться формулой $dp/dt = JCM$. В безвихревом гравитационном поле книга падает на пол прямо, не совершая утиньи движения сорванного осенью с ветки листка. Уравнение электростатического поля констатирует, что ротор его напряженности равен нулю. Такое поле развернуто и скручивается в пространстве, если происходят изменения во времени поля магнитного. И наоборот, магнитное поле скручивается под влиянием изменения во времени поля электрического.

Максвелл крест накрест приравнял (с точностью до коэффициентов) временные и вихревые пространственные производные напряженностей электрического и магнитного полей. Теорию ждало открытие. Коэффициенты уравнений можно установить из опыта с диэлектриками. Отсюда вычисляется скорость распространения электромагнитного излучения. Она оказалась равной скорости света, измеренной астрономами.

2.4. МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Каждый школьник, знакомясь с теорией относительности, узнает о преобразованиях Лоренца. Они описывают изменение масштабов времени и пространства в соответствии со скоростью v сближения двух инерциальных систем отсчета А и В. Для некоторой оси x имеем

$$x_A = \frac{x_B + vt_B}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad t_A = \frac{t_B + vx_B/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Теория матриц способна выдать нам некоторые секреты преобразований Лоренца, если записать их в векторно-матричной форме $\underline{X}=AX$, где вектор X содержит текущую координату и время, причем

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ \frac{v/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{pmatrix}.$$

Обратное преобразование $X=A^{-1}\underline{X}$ немногим отличается от прямого, а именно: знаком при величине относительной скорости

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ \frac{-v/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{pmatrix}.$$

Сопоставление прямой и обратной матриц лишней раз убеждает, что среди инерциальных систем действительно нет выделенных. Каждая сторона оперирует *одним и тем же* преобразованием, смена знака при v напоминает, что во встречной системе отсчета вектор относительной скорости видится зеркально перевернутым. Иногда возникает вопрос о замене преобразований Лоренца другими. Зенон показал, что доводами можно прикрыть любое суждение. Теория табличек способна помочь покончить со спорами, если указанный баланс матриц не соблюдается.

В XIX веке сознание наивного обывателя поразили картинки, спускаемые с заоблачных высот абстрагирующими геометрию Евклида учеными. Наибольшим успехом пользовался мир забавных двумерных существ, живущих на плоскости. Для того, чтобы выйти за дверь, вошедшему в помещение двумерному господину нужно было пройти по потолку и продолжить свое следование на руках наружу. Эта богатая на юмористические сюжеты аналогия подчеркивала, что наша Вселенная тоже может выглядеть для кого-то открытой книгой со стороны. Наделенным богатым воображением людям предлагалось построить трехмерную развертку четырехмерного куба или представить себе разрез такого же шара.

Что касается шара, пронизывающего трехмерное пространство, то он должен предстать перед нами песчинкой, затем каплей, раздувающейся до размеров футбольного мяча и затем снова постепенно уходящей в небытие. Организм, растущий из клетки, в каком-то смысле напоминает этот объект. Теория относительности очень живо использовала развитые геометрические идеи, присоединив к трем пространственным осям еще одну ось времени. Следует понимать так, что в четырехмерном пространстве-времени объекты неподвижны, как гвозди в коробке, их прошлое, настоящее и будущее сосуществуют вместе. Текущая реальность представляет собой срез пирога, начиненного нами, нашими внуками и прадедами.

Все переплетено, все замерло, все застыло, только настоящее бойко вытекает из будущего, как фарш из мясорубки.

Оставим прелести этой картины на совести физиков. Им, в конце концов, нужно было побаловаться со временем. Согласно Ньютону реальность для всех одна, тогда как по Эйнштейну каждый ведет свою собственную жизнь. Отсюда возникают парадокс близнецов, парадокс относительности одновременности и другие штучки новой теории. Замечательная эта наука до сих пор вызывает замешательство. Вывод о том, что даже время нельзя считать независимым, последовал из изучения электромагнитных явлений. Солнечная система и Земля участвуют в движении огромной ветви нашей Галактики. Это движение никак не сказывается на замерах скорости света. Физики сумели объяснить парадокс, посягнув на масштаб времени. Как часто бывает, избавление от одной неприятности повлекло за собой возникновение десятка других. Анализ движения вновь, как в античные времена, заставил физиков усомниться в способностях разума.

Впрочем, матричное исчисление приучило спокойнее воспринимать четырехмерные и прочие континуумы. В начале XX века математика сделала очередной рывок, увидев в функции времени аналог вектора с бесконечным количеством компонент. В обиход вошли бесконечномерные пространства, и это продолжение никого теперь не шокирует.

2.5. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Гитара отвечает на произвольное входное воздействие звоном своих струн. Распространение этого свойства на прочие объекты знакомит нас с широким классом систем. Для того, чтобы возвысить значение резонансов объекта до уровня его паспорта, требуется соблюдение двух правил, составляющих определение линейной системы.

Во-первых, надо, чтобы коэффициент усиления входного сигнала не зависел от уровня этого сигнала. Линейная система одинакова в большом и малом своих проявлениях, тогда есть смысл интересоваться собственными значениями и собственными векторами.

Во-вторых, надо, чтобы реакция объекта на сумму входных сигналов была равна сумме реакций на каждый сигнал в отдельности. Линейную систему, как хорошего каратиста, не пугает количество «соперников». Это качество называется свойством суперпозиции.

Опирируем атрибутами структурных схем: первое свойство линейных систем означает возможность переносить масштабирующий усилитель с входа системы на выход. Второе свойство позволяет переносить с входа на выход точку суммирования сигналов. Указанные качества не выходят за пределы свойств алгебры матриц, поэтому матрица является воплощением не только объекта с резонансами, но и, вполне последовательно, линейного объекта. Теория операторов утверждает, что она является тенью заметно более сложных математических конструкций (изоморфна им).

Базис собственных векторов выгоден для представления в нем произвольных входных воздействий. Рассмотрим разложение $u = S_1 + S_2 + S_3$. Сменой входного и выходного базисов можно добиться замены $A=VDV^{-1}$ диагональным представлением D . Знание собственных свойств избавляет нас от необходимости вовлекать в вычисления всю матрицу, выходной сигнал $y = Au = \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3$. Если среди собственных значений есть одно превалирующее, это упрощает модель $y = Au \approx \lambda_1 S_1$.

На принципе суперпозиции основаны итерационные процедуры поиска собственных векторов. Обращаясь к приведенному выше примеру, нетрудно видеть, что слагаемое, отвечающее максимальному по абсолютному значению собственному числу, входит в выходной сигнал y с большим весом, чем это было во входном сигнале u . Следовательно, повторная подача выходного сигнала на вход только увеличит диспропорцию. После нескольких таких итераций установившийся выходной сигнал будет пропорционален главному собственному вектору S_1 . Старший резонанс проявляет себя сам, вместе с тем, по той же циклической схеме можно найти и все остальные более слабые тона, фильтруя более сильные.

Следующий пример из жизни животных принадлежит изобретателю гомеостатических механизмов Россу Эшби [9].

Допустим, в мелком пруду и около него развивается стайка насекомых. Часть из них скачет по берегу в поисках пропитания, часть держится на поверхности воды, часть находится под камнями. Описать манеру поведения каждого из этих несерьезных существ невозможно. Если мы отойдем от пруда, отдельные насекомые постепенно исчезнут из вида, и мы будем видеть только три больших облака, три популяции – одну на берегу, другую в воде и третью под камнями. Эти три популяции становятся теперь тремя количествами, которые могут изменяться во времени, см. рис. 2.1.

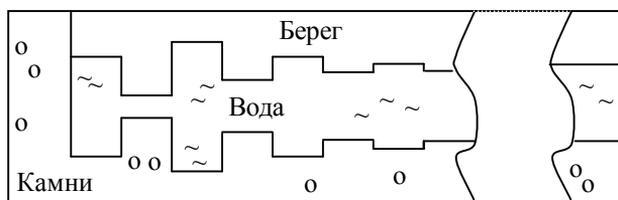


Рис. 2.1. Рисунок из книги Р. Эшби

На рисунке столбиками разной высоты отмечено изменение величин всех трех популяций. Из наблюдений удастся почерпнуть вероятности, с которой одна форма активности сменяет другую, и собрать их в матрицу A . Если в данный момент времени состояние системы описывается вектором X_i из трех компонент, то в следующий $X_{i+1}=AX_i$. Поместим сначала всех насекомых под камни, долго они там не усидят. В процессе итераций информация о начальном состоянии системы постепенно шаг за шагом стирается. Решение, как видно, сводится к доминирующему собственному вектору, описывающему резонанс в биологической системе.

Модель Эшби лежит на стыке весьма непохожих друг на друга наук. Уравнения ее детерминированы, хотя поведение отдельных насекомых описывается некоторой вероятностной моделью. Информация о начальном состоянии системы полностью определяет динамический процесс и, вместе с тем, она постепенно утрачивается, так что в состоянии равновесия нельзя различить предысторию. Эти черты можно усилить, и тогда возникает новая концепция, даже новая парадигма. Властвовавший умами триста лет детерминизм, в итоге, нашел себе альтернативу в лице теории детерминированного хаоса. Но это уже совсем другое учение и другой рассказ, который продолжает сочинять наше столетие.

Круг линейных систем широк и разнообразен, поскольку ограничивающие его признаки носят нежесткий характер. Линейные динамические системы принято описывать дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad y = Cx,$$

где $x=x(t)$ – вектор состояния, $x_0 = x(0)$; $u(t), y(t)$ – входной и выходной скалярные или, в общем, векторные сигналы.

Решение этой системы уравнений при нулевом векторе начального состояния описывается интегралом свертки

$$y(t) = \int_0^t q(t-\tau)u(\tau) d\tau.$$

где $q(t)$ – весовая функция, реакция на импульсное воздействие.

Задумчивость хода истории математики проявляется в том, что матрицы, возникнув как функции дискретных аргументов, индексов, никогда решительно не пересматривались в сторону расширения области их определения. Естественным обобщением матрицы является функция двух непрерывных переменных. Знак интеграла, представляющий собой такой же анахронизм, как и знак суммы в явном определении скалярного произведения или определении операции произведения матриц, пока робко, только в пределах теории операторов, отмирает, позволяя записывать свертку короче $y=qu$. Это произведение подчеркивает родство представителей линейных систем, не столь очевидное в дифференциальной форме.

Обратим внимание, что матрицы A, B, C , по сути, это «атомарное» описание системы, тогда как функция двух аргументов $q(t,\tau)$, несомненно, «галактический» для конечномерной математики объект.

Динамические системы вносят задержку во входной сигнал, по этой причине, на первый взгляд, они не имеют собственных «векторов» или собственных функций – как их следовало бы называть. На бесконечном интервале в роли собственных функций выступают элементарные гармоники. Система только усиливает или ослабляет синусоидальные сигналы, что отвечает представлению о собственных векторах. Разложение произвольного сигнала в ряд Фурье аналогично разложению вектора в базисе собственных векторов. Закономерно интересоваться аналогом процедуры диагонализации матриц, приводящей их к канонической форме Жордана. В мире динамических систем сходную обязанность выполняет предложенное Оливером Хевисайдом преобразование Лапласа.

Следующий рис. 2.2 показывает соотношение двух родственных «диагонализаций» матричной и интегральной моделей систем.

ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ

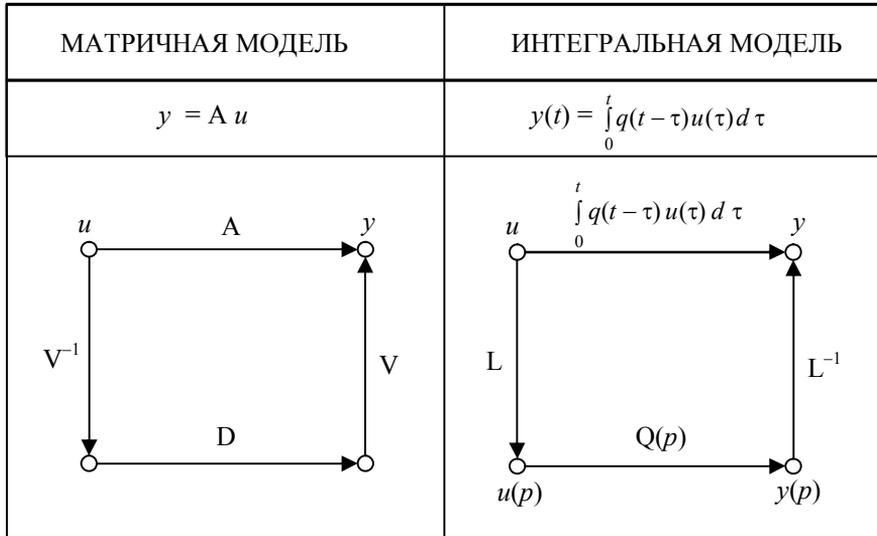


Рис. 2.2. Упрощение моделей переходом к новому базису

Разложение $A=VDV^{-1}$ трактуется как переход к базису, в котором A упрощается до диагональной матрицы D . Интегральное преобразование Лапласа $L : u(t) \rightarrow u(p)$ играет роль сходную с умножением на матрицу V^{-1} , для функций имеем

$$u(p)=\int_0^{\infty} e^{-p\tau} u(\tau) d\tau, \quad y(p)=\int_0^{\infty} e^{-p\tau} y(\tau) d\tau.$$

Произведение $y(p)=Q(p)u(p)$ сходно с умножением компонент входного вектора на элементы диагонали D . Отсюда видно, что на бесконечном интервале времени гармонические сигналы выступают как собственные функции динамических систем, а передаточная функция $Q(p)$ – как спектр, это «диагональ» бесконечномерной «матрицы».

Анализ спектра матрицы A , т. е. диагонали D , позволяет судить об устойчивости разомкнутой динамической системы. Поскольку свободные движения описываются суммой экспонент с показателями, равными собственным значениям, спектр A должен располагаться в левой полуплоскости. Спектр бесконечномерной «матрицы» сортируют по частоте гармонических сигналов. Логарифмируя модуль передаточной функции, его график можно построить при помощи карандаша и линейки, см. 2.3. Сравнительно недавно это имело большое значение.

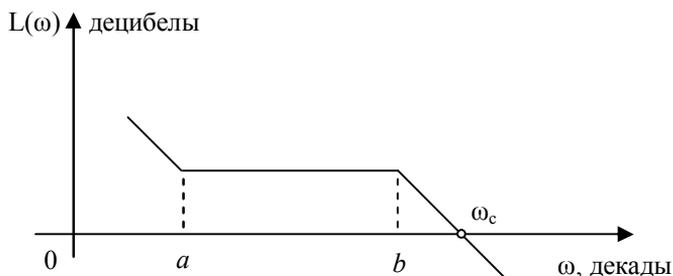


Рис. 2.3. Частотная характеристика динамической системы

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ) линейной динамической системы $L(\omega) = 20 \lg |Q(j\omega)|$ измеряется в децибелах, ось частот логарифмируется, интервал изменения частоты на порядок называется декадой. Точки надломов характеристики на оси ω связаны с полюсами и нулями передаточной функции. Отклонения происходят в противоположных направлениях, для корней знаменателя — вниз, и всегда на один и тот же угол: двадцать децибел на декаду.

Допустим, что объект замыкается отрицательной единичной обратной связью. Вследствие запаздывания сигнала в системе, знак отрицательной обратной связи может динамически изменяться на противоположный. Если коэффициент усиления в контуре на частоте этого сигнала больше единицы, возникает самовозбуждение. Свист, который издает усилитель при подключении к нему микрофона, связан с подобным эффектом.

Каждый надлом частотной характеристики вниз описывает задержку гармонического сигнала со сдвигом его фазы на девяносто градусов. Найквист доказал, что надломы вниз и вверх компенсируют друг друга, поэтому достаточно контролировать критический наклон только на частоте среза ω_c . Сигналы более высокой частоты гаснут в замкнутом контуре. Потеря устойчивости системы при повышении коэффициента усиления связана с крутым фронтом ЛАЧХ и напоминает переворот айсберга.

До эпохи вычислительных машин представление о бесконечномерном операторе было полезным, но мало осязаемым понятием. С появлением современной компьютерной графики ситуация изменилась.

Структуру оператора свертки позволяет детально рассмотреть матрица его дискретного приближения

$$S = h \begin{pmatrix} q(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ q(t_1) & q(t_0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q(t_N) & q(t_{N-1}) & \dots & q(t_0) \end{pmatrix},$$

где $q(t)$ – импульсная весовая функция, взятая в равноотстоящие моменты времени с шагом h .

Спектральное описание оператора свертки на конечном интервале малопродуктивно. Матрица его дискретного приближения имеет только один собственный вектор, от которого у непрерывной системы остается «рудинент» в виде оконечного дельта-импульса. Строгому определению собственной функции он не отвечает. Динамическая система вносит задержку в сигнал и, казалось бы, собственных функций не имеет. Это представление долгие годы господствовало в теории динамических систем, и оно находится в разительном противоречии с центральным свойством линейности, которое обретает смысл при опоре на собственный базис.

Между тем, положение можно решительно изменить, разрешив инвертировать входной или выходной сигнал во времени. Оператор разворота (флипа) F не меняет энергетических характеристик сигнала и не нарушает свойство линейности. Его умножение на оператор свертки слева или справа меняет у матрицы дискретного приближения главную диагональ на побочную, причем итоговый оператор становится симметричным, см. рис. 2.4. Данное обстоятельство явно недооценено. Оно снимает указанное выше основное противоречие, позволяя применять к динамическим системам методы, разработанные в матричной алгебре [39].

Остается добавить, что оператор флипа F играет специфическую роль мнимой единицы, позволяя строить алгебру операторов с двумя образующими. Эта тема, безусловно, заслуживает отдельного обсуждения. Рис. 2.4 дает представление о семействе классифицированных по принципу симметрии комплексных операторов, ассоциированных с одним и тем же динамическим объектом. Их упрощение связано с разнесением отрезков времени управления и наблюдения, в результате чего спектр бесконечномерного объекта может стать конечным. Таков ганкелев оператор.

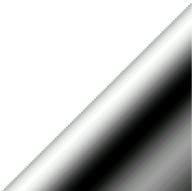
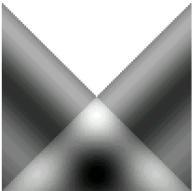
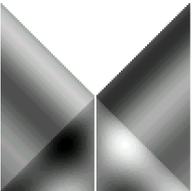
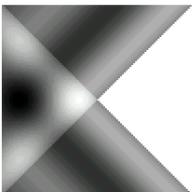
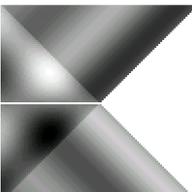
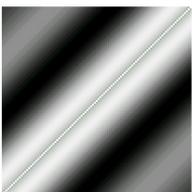
S  Оператор свертки	$M = (S+S^*)/2$  Симметричная часть	$K = (S-S^*)/2$  Кососимметричная часть
$H_1 = SF$ 	$M_1 = (S+SF)/2$ 	$K_1 = (S-SF)/2$ 
$H_2 = FS$ 	$M_2 = (S+FS)/2$ 	$K_2 = (S-FS)/2$ 
$S^* = FSF$ 	$FM = (FS+SF)/2$ 	$FK = (FS-SF)/2$ 

Рис. 2.4. Портреты линейных операторов

ЧАСТЬ II ЭВОЛЮЦИЯ МОДЕЛЕЙ ДВИЖЕНИЯ

Выплавленные в горниле древних цивилизаций космогонические модели длительное время оставались вне критики. Еще бы, спорить нужно с убедительными данными в руках, а их не так то просто добыть. Громоздкие эксцентриситеты и даже орбита солнца находили свое оправдание в соответствии их визуальным наблюдениям. Четыреста лет тому назад положение начало постепенно меняться. Астрономы обрели, наконец, более точные инструменты и накопили опыт, достаточный для того, чтобы вернуться к отложенным спорным вопросам. Обработывая многочисленные наблюдения Марса, ученик Тихо Браге, Иоганн Кеплер (1571–1630), пришел к твердому убеждению, что точки ложатся на эллипс.

За спиной исследователя был долгий путь находок и разочарований. Сначала он опоясывал орбитами небесных тел трехмерные многогранники: куб, пирамиду и пр., вложенные друг в друга наподобие матрешек. Модели были более изящны, чем верны, но дали необходимый навык вычислений и сильно продвинули ученого к формулировке трех его знаменитых законов. Напомним их для общего сведения. Первый закон гласит о том, что каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Второй закон касается расписания движения планеты по орбите и констатирует постоянство ее секторной скорости: радиус-вектор тела за равные промежутки времени «ометает» равные площади. Третий закон позволяет сравнивать орбиты тел между собой, утверждая, что квадраты периодов движения двух планет пропорциональны кубам «больших осей» эллипсов. Это был серьезный шаг вперед: теория описывала движение не только известных планет, но и *любого* небесного странника.

Ньютон в дальнейшем обобщил эти находки и идеи Галилея, придав им вид законов динамики. Наука, словно сама подчиняясь гравитации, неуклонно двинулась вперед, набирая ускорение. Камень, скатываясь с насыпи, проявляет в своем поведении черты явно выраженного рационализма, в поисках объяснения которому вырос ворох полезных формализмов, связанных с именами Лагранжа, Гамильтона, Якоби и других. Лагранж усовершенствовал запись уравнений динамики, сделав ее ковариантной к выбору системы координат. Гамильтон показал, что рациональное движение происходит по линиям уровня функции полной энергии системы. Якоби был занят выводом уравнений поверхностей, по которым происходит соскальзывание. Успехи аналитической механики, красота и наглядность ее положений, сказались на теории управления движением. Отсюда берут начало формализмы Ляпунова и Понтрягина.

Изобретя формализмы, наука не избавилась от груза неразрешимых проблем. Анри Пуанкаре пишет об этом следующее.

«Ускорение тела равно действующей на нее силе, деленной на его массу. Можно ли проверить на опыте этот закон? Для этого нужно было бы измерить три величины, входящие в его выражение: ускорение, силу и массу. Отвлекаясь от трудности, связанной с измерением времени, допустим, что возможно измерить ускорение. Но, как измерить силу или массу? Мы не знаем даже, что это такое.

Что такое масса? Это, отвечает Ньютон произведение объема на плотность. Лучше сказать, возражают Томсон и Тэт, что плотность есть частное от деления массы на объем. Что такое сила? Это, отвечает Лагранж, причина, производящая или стремящаяся произвести движение тела. Это, скажет Кирхгоф, произведение массы на ускорение. Но тогда почему не сказать, что масса есть частное от деления силы на ускорение? Эти трудности непреодолимы ...

Трудности, возникшие в механике, побудили некоторые умы отдать предпочтение новой системе – так называемой энергетике. Энергетическая система получила свое начало вслед за открытием закона сохранения энергии, окончательная форма была ей дана Гельмгольцем.

Начнем с определения двух величин, которые играют фундаментальную роль в этой теории. Это следующие величины: во-первых, кинетическая энергия, или живая сила; во-вторых, потенциальная энергия.

Все перемены, какие могут происходить с телами природы, управляются двумя экспериментальными законами:

1. Сумма кинетической энергии и потенциальной энергии не меняется. Это – принцип сохранения энергии.

2. Если система тел в момент t_0 имеет конфигурацию А, а в момент t_1 конфигурацию В, то переход от первой конфигурации ко второй всегда совершается таким путем, что среднее значение разности между двумя видами энергии за промежуток времени от t_0 до t_1 является величиной, самой малой из всех возможных. Это – принцип Гамильтона, представляющий одну из форм принципа наименьшего действия.

Принцип сохранения энергии и принцип Гамильтона сообщают нам нечто большее, чем сообщали основные принципы классической теории; они исключают некоторое движение, которое не реализуется в природе, но совместимо с классической теорией. Но в свою очередь энергетическая система создает и новые проблемы. Именно, определение двух видов энергии представляет почти столь же значительные трудности, как и определение силы и массы в первой системе».

Что ж, природа, как и великая литература, любит недосказанность.

ГЛАВА 3 ЕСТЕСТВЕННОЕ И УПРАВЛЯЕМОЕ ДВИЖЕНИЯ

3.1. ОТ ЗЕНОНА ДО НЬЮТОНА

Вол и плуг – символ динамики античного времени. Будь катание на коньках и лыжах забавами более близкими пронизательным эллинам, учение об инерции созрело бы значительно раньше. Физика Аристотеля складывалась под влиянием умозрительных теорий, сознание невольно брало в расчет силу трения и уравнивало им тягу. В задачах применение находили скорости, но не ускорения. С приходом Ньютона динамические модели систем «поправились» на порядок. Незадолго до этого Кеплер разгадал законы движения планет и создал кинематическую модель, о которую первопроходцы могли точить свои перья. Любопытны детали, приведшие Ньютона к разгадке тайн земного тяготения и законов движения. Хорошее представление о силах гравитации было уже у некоторых его современников, более того, они состояли в научной переписке.

В свое время куратор королевского общества, Роберт Гук, развлекал дворян демонстрациями законов физики. Это входило в непосредственную обязанность ученого и страшно угнетало его обилием работы. Он должен был показывать не менее одного нового опыта в неделю. Демонстрируя силы, он растягивал и сжимал пружины. Закон упругости до сих пор носит имя Гука. Нечто подобное большим пружинам подозревал он и в небесной механике. Удрученный своей службой, Гук предложил в письме Ньютону проверить закон обратных квадратов для силы тяготения. К сорока годам тот остыл к физическим опытам и отвечал Гуку вполне откровенно и просто: «Моя страсть к философии утихла, я думаю о ней не больше, чем торговец о чужой торговле или крестьянин об учении».

Пожар в лаборатории, погубившую большую часть записей по оптике, едва не расстроил этот могучий ум. К тому же, Ньютон не избежал свойственного той эпохе увлечения алхимией, поисков философского камня и золота. Уцелевшие рабочие тетради содержат следующие откровения: «Вонь ужасная, видимо, я близок к открытию». Сами посудите, до планет ли тут, когда некогда открыть форточку. Гук выманил отшельника из пещеры. Ньютон написал манускрипт, добился первоклассных результатов, но не нашел средств, чтобы опубликовать его. Непосильное бремя расходов взял на себя сын мыловара, Галлей, издавший триста лет тому назад книгу «Математические начала натуральной философии». Ньютон перенес учение о силах с небес на землю, единообразно рассматривая движение песчинки, выпущенной из пушки снаряда и далекой планеты.

Земное тело оказалось уравненным в правах с небесным светилом. Это должно было впечатлять. И за меньшее святотатство Галилей много лет замаливал грехи перед инквизицией, опасаясь произнести громко вслух: «и все-таки она вертится».

В распоряжении Ньютона не было современного нам математического аппарата, он создавал его по крупицам сам. Стоит заглянуть в средства передачи им приобретенных знаний для того лишь, чтобы оценить прогресс языка математики. Приведем отрывок из его сочинения.

«Закон II. Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует. Если какая-нибудь сила производит некоторое количество движения, то двойная произведет – двойное, тройная – тройное. Будут ли они приложены разом все вместе или же последовательно и постепенно. Это количество движения, которое всегда происходит по тому же направлению, как и производящая его сила, если тело уже находилось в движении, при совпадении направлений прилагается к количеству движения тела, бывшему ранее, при противоположности – вычитается, при наклонности – прилагается наклонно и соединяется с бывшим ранее, соответственно величине и направлению каждого из них».

Необходимость щадящей ум формализации наиболее остро осознал тогда барон фон Лейбниц. В Европе уже царствовал Декарт, его трактат по аналитической геометрии в изящном переплете можно было увидеть среди духов на дамских столиках. Следуя предшественнику, Лейбниц разработал систему удобных обозначений и опубликовал две статьи по дифференциальному и интегральному исчислению. Он создал механизм для перемалывания математических задач. Формальный подход, который освобождал бы от необходимости возвращаться к вопросам, изученным ранее. Большое значение придавалось умению наводить мосты к стандартным постановкам проблем, прилагались правила и формулы.

Известно, что Ньютон болезненно отреагировал на пионерские работы в области бесконечно малых, он узрел в них только грубое подражание его математическому методу. Вегетарианские наклонности барона не пошли ему впрок, пристрастный судебный трибунал нашел в его действиях признаки научной недобросовестности и мошенничества. Тут досталось и Гуку. Разгневанный Ньютон затворился в меланхолии, сетуя, что каторжный труд невеждами признается плодом светлого озарения. Как шеф-повар, он знал секреты своего варева. Математика вовсе не казалась ему прогулкой по залитой солнцем дорожке, и он предупреждал об опасностях, поджидающих путника на ее крутых переправах. Увы, благодаря провокатору Лейбницу новое исчисление завладело умами его современников.

3.2. ФОРМАЛИЗМ ЛАГРАНЖА

Взяв трудный старт, наука о движении стала развиваться. Наибольших успехов далее добился Лагранж, известный многими оригинальными находками, в частности, методом множителей (его имени) и ковариантными уравнениями аналитической механики.

Метод множителей Лагранжа касается поиска условного экстремума функции $f(x)$ при заданном ограничении $g(x) = 0$. Согласно изобретенному ученым формальному приему, составляется функция $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$. Лагранж доказал, что искомый условный экстремум соответствует абсолютному экстремуму расширенной функции двух переменных. Его метод пользуется успехом и встречается в огромном количестве работ.

В качестве примера рассмотрим поиск направлений наибольшего и наименьшего возрастания квадратичной формы $f(x) = x^T A x$, см. рис. 3.1. Иными словами, нас интересуют экстремальные склоны чаши, образуемой графиком функции в случае двух переменных.

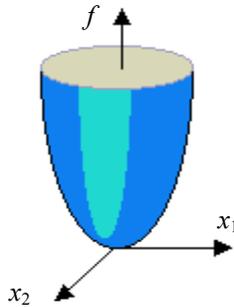


Рис. 3.1. Квадратичная функция двух переменных.

Экстремальные точки будем искать на «сфере» единичного радиуса, отсюда, в общем, получим ограничение $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = x^T x = 1$.

Составляем функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = x^T A x + \lambda (1 - x^T x),$$

дифференцируем ее по каждому из аргументов и приравниваем частные производные нулю. Отсюда имеем $Ax - \lambda x = 0$, $\|x\| = 1$. Как видно, экстремальные значения квадратичной формы, равные, кстати, собственным числам ее матрицы, достигаются на собственных векторах A .

Этот вывод подтверждается смыслом закона инерции квадратичных форм. Свойства квадратичной задачи послужили в дальнейшем предметом глубоких теоретических обобщений. В механике формализм Лагранжа вылился в составление функции разности кинетической T и потенциальной P энергии механической системы, лагранжиана $L(x, v) = T - P$.

Лагранжиан обладает экстремальными качествами. Вдоль траектории естественного движения интеграл функции $L(x, v)$ минимален, отсюда выводится следующее уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Суть формализма постигается на примере анализа колебаний груза на пружине. Кинетическая энергия груза пропорциональна произведению его массы на квадрат скорости v . Потенциальная энергия пружины сходным образом зависит от растяжения. Отсюда легко выписывается лагранжиан $L = T - P = Mv^2/2 - Kx^2/2$, K – коэффициент упругости в законе Гука. Уравнение Эйлера-Лагранжа вторит закону Ньютона

$$M \ddot{x} = F,$$

где x – смещение, сила пружины пропорциональна ее растяжению $F = -Kx$.

Для более сложных систем результат двух подходов также одинаков, но путь к нему оказывается разным. Подход Ньютона связан с определением проекций сил и реакций на оси координат. Облегчить труд может выбор удобного базиса. Поскольку вид уравнений движения существенно зависит от субъективных факторов, это потенциальный источник ошибок и разногласий исследователей при изучении одного и того же объекта. Другое дело, уравнения Лагранжа. Их вид не зависит от выбора базиса, он *ковариантен* (не зависит от выбора обобщенных координат).

Занимаясь энергетическими соотношениями, нельзя пройти мимо принципа сохранения энергии, который возник из представлений о том, что движение, также как и материя, неуничтожимо и претерпевает серию метаморфоз. Изобретатель кватернионов Гамильтон занимался механикой, он сумел придать уравнениям движения специальную форму, носящую его имя. Подход Ньютона оперирует силами, которые недоопределены. Назначив несуществующие в природе силы, получим несуществующее в ней движение. Закон сохранения энергии отсекает подобного рода варианты, так что речь идет не просто о замене обозначений, а о важном шаге теории динамических систем вперед.

3.3. ФОРМАЛИЗМ ГАМИЛЬТОНА

В сравнении с Лагранжем, Гамильтон разрешил энергетическую проблему ровно наоборот, используя не разность, а сумму кинетической и потенциальной энергий

$$H(x, v) = T + P = \text{const.}$$

Эту формулу можно рассматривать как дифференциальное уравнение, связывающее состояние системы и скорость. Его порядок меньше порядка уравнений Ньютона и Лагранжа. Еще бы, оно отчасти содержит решение задачи на определение движения, облегчая интегрирование. В механике вместо скорости v принято рассматривать *импульс движения* $p = Mv$, этой традиции будем придерживаться далее и мы.

Принцип сохранения энергии сообщает добрую половину решения. Поэтому *гамильтониан* $H(x, p)$ называют еще *первым интегралом* уравнений динамики.

Закону сохранения энергии можно придать также привычную дифференциальную форму, пусть

$$\frac{d}{dt} H = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{dt} = 0 .$$

Нулевой баланс нетрудно получить, приравняв друг другу сомножители слагаемых с точностью до знака и коэффициента пропорциональности $k=M$, учитывающего связь переменной p с производной x . Отсюда следует система *канонических уравнений Гамильтона*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k \frac{\partial H}{\partial p} , \\ \frac{dp}{dt} = -k \frac{\partial H}{\partial x} . \end{cases}$$

Напомним, что возникший в вариационной математике лагранжиан обладает экстремальными свойствами. Остается увязать вместе все факты, указав, что для консервативной системы *минимум интегральной разности кинетической и потенциальной энергий достигается на движениях вдоль линий уровня функции полной энергии H .*

3.4. ФОРМАЛИЗМ ЯКОБИ

Формализм Гамильтона не подходит для описания движения тел, рассеивающих энергию. Некоторыми искусственными поправками можно спасти положение, получив гамильтониан, лишенный физического смысла, но годный к формальному употреблению. Особенность качения шарика в чаше наводит на мысль поискать поверхность, по градиенту которой (а не вдоль линий уровня) происходит естественное движение.

Поверхность чаши дает все та же квадратичная форма $f(x)=0.5x^T Ax$, где компонентами вектора x теперь служат состояние и скорость системы. Формализм Якоби связан с отысканием такой функции. Если это сделано, то движение по $grad(f)=Ax$ описать несложно:

$$\dot{x} = Ax.$$

Метод Гамильтона допускает аналогичную интерпретацию, только в нем вектор фазовой скорости, направленный вдоль линий уровня функции полной энергии, ортогонален градиенту. В теории матриц поворот вектора на прямой угол осуществляется умножением его на произвольную кососимметричную матрицу K . Из этих соображений получаем программу, описывающую движение, протекающее *вдоль линии уровня*

$$\dot{x} = KAx.$$

Кососимметричная структура – родственник симметричной матрицы. Зеркально противопоставленные друг другу относительно главной диагонали элементы матрицы K равны друг другу по абсолютным величинам и отличаются знаком, что соответствует инверсии знака в рассмотренных ранее канонических уравнениях механики.

Для систем *консервативных*, сохраняющих энергию, уравнения механики принято представлять в форме уравнений Гамильтона, отражающих движение по линиям уровня функции полной энергии.

Для систем *диссипативных*, теряющих энергию, бывает проще выписать уравнение некоторой поверхности скольжения.

Эти иллюстрации дополнили учение о динамике новыми страницами. История последующих двух столетий наполнена утомительными поисками первых интегралов движения, сложивших теорию движения твердого тела. Постепенно математика избавилась от груза физических интерпретаций, предпочтя простоту описания обилию вариантов. Теории Гамильтона и Якоби привели к концепции пространства состояний.

3.5. ФОРМАЛИЗМ ПОНТРЯГИНА

Следующий формализм связывают с именем Льва Семеновича Понтрягина. Некоторыми деталями биографии он напоминает чемпиона мира АLEXИНА, игравшего более двадцати шахматных партий вслепую.

Дополним вектор *состояния* x импульсами движения, не выделяя более их в нем, тогда уравнение системы приобретет вид

$$\dot{x} = \Phi(x, u),$$

где u – вектор управления, отыскиваемый в соответствии с интегральным критерием качества

$$\int_0^{\infty} L(x, u) dt \rightarrow \min.$$

В динамике естественного движения гамильтонова функция равна разности между значениями удвоенной кинетической энергией и лагранжианом, т.е. $H=2T-L$. Заметим, что понятие первого интеграла (гамильтониана) шире его узкой энергетической трактовки в том смысле, что так мы можем называть *любую функцию* H , вдоль линии уровня которой движется точка, изображающая состояние.

Обозначим через ψ расширенный вектор обобщенных импульсов для объекта с регулятором. Тогда удвоенную «кинетическую энергию» можно посчитать через квадратичную форму от ψ или, что то же самое, если вспомнить соотношение импульса движения и скорости, через билинейную функцию так, что $H = \psi^T \Phi - L$.

Рациональное движение достигается поддержкой в системе постоянного уровня H . Очевидно, что назначением управления можно поддерживать разные уровни энергии, вопрос состоит в том, какой именно уровень избрать? В консервативных системах энергия, как мы знаем, не просто сохраняет постоянное значение, ее выгодно, в смысле интегрального критерия качества, не расходовать.

Принцип максимума Понтрягина. Принцип гласит, что необходимым условием *минимума* интегрального критерия качества является выбор оптимального управления, обеспечивающий поддержку на постоянном уровне *максимума* обобщенной энергии (гамильтониана) $H = \max (\Phi^T \psi - L) = \text{const}$.

В задачах управления регулятор меняет энергетический баланс системы. Если закачать в нее «энергии» больше оптимального уровня, она не сможет удержаться от трат, приводящих к потерям качества.

Линейно-квадратичная задача. В задачах оптимального управления линейными системами

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

часто минимизируется интегральный квадратичный критерий качества

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) d\tau, \quad Q \geq 0, \quad R > 0.$$

Гамильтониан, соответственно, имеет вид

$$H = \psi^T \Phi - L = \psi^T (Ax + Bu) - \frac{1}{2} (x^T Q x + u^T R u).$$

Согласно принципу максимума, оптимальное управление отыскивается на частном экстремуме этой функции по управлению, следовательно

$$\frac{\partial H}{\partial u} = B^T \psi - R u = 0, \quad \text{отсюда} \quad u = R^{-1} B^T \psi.$$

Постоянство гамильтониана на оптимальной траектории гарантируется двумя сопряженными уравнениями Гамильтона

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi} = Ax + Bu, & x_0 = x(0), \\ \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T \psi + Qx, & \psi_\infty = \psi(\infty). \end{cases}$$

При стабилизации объекта в нулевом конечном состоянии конечные обобщенные импульсы принимают нулевое значение $\psi_\infty = 0$.

Верхом совершенства в решении задачи оптимального управления считается реализованная возможность заменить выходы сопряженной системы линейной комбинацией выходов самого объекта $u = -Kx$. Этим мы устраняем дублирование динамики (согласно логике естественного движения объект сам по себе состоит из сопряженных подсистем) и упрощаем регулятор. Данное направление называется *оптимальным синтезом регуляторов* или *аналитическим конструированием*.

Матричное уравнение Риккати. Стремясь к обозначенной выше цели синтеза, заменим выходы сопряженной системы линейной комбинацией переменных состояния $\psi = -P x$.

Взяв производную от последнего выражения и сопоставив ее второму уравнению системы Гамильтона, получим $\dot{\psi} = -\dot{P} x - P \dot{x} = -A^T \psi + Q x$. Пользуясь уравнением системы и учитывая вид оптимального управления, приходим к дифференциальному уравнению Риккати

$$\dot{P} + P A + A^T P - P B R^{-1} B^T P = -Q, \quad P_{\infty} = 0$$

В том случае, когда верхний предел интегрального критерия качества бесконечен, квадратная матрица искомым коэффициентов P постоянна. Отсюда следует матричное алгебраическое уравнение Лурье-Риккати

$$P A + A^T P - P B R^{-1} B^T P = -Q,$$

которое на сегодняшний день решается большинством математических пакетов вычислительными методами.

Синтез регулятора. С приключениями мы добрались, наконец, до формулы оптимального регулятора. Наградой за проявленное терпение будет то, что формула эта чрезвычайно проста

$$u = -K x,$$

где $K = R^{-1} B^T P$, P – решение уравнения Риккати. Оптимальное управление достигается безынерционным регулятором, обеспечивающим функционалу минимальное значение $J = 0.5 x_0^T P x_0$.

Система уравнений Гамильтона содержит уравнения динамики *исходного* и *сопряженного* объекта. Вместе с краевыми условиями проблема их решения называется двухточечной граничной задачей (ДГЗ).

Критерий качества управления представлен функционалом, зависящим от состояния и управления, первое слагаемое гарантирует вывод объекта в нулевое положение, второе экономит ресурсы регулятора.

Примечание. В задачах с нефиксированным временем развития процесса заведомо известно оптимальное значение H , оно равно нулю. Этим еще раз подчеркивается, что название *обобщенная энергия* для этой функции весьма условно, следует из предыстории, поэтому лучше употреблять здесь более нейтральный термин «гамильтониан».

ГЛАВА 4 МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

4.1. КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ

Математическое описание динамических систем в пространстве состояний избыточно, по параметрам. Отсюда возникает разнообразие структур, уменьшающих число независимых коэффициентов модели. Исчерпывающее определение каноническим формам дать трудно, так как нелегко ограничить круг целей, ведущих к их построению. Параметры канонической формы инвариантны по отношению к матрицам систем, связанных между собой эквивалентными преобразованиями. В этом смысле они являются инвариантами динамической системы, аналогичными коэффициентам передаточной функции, ее нулям и полюсам, моментам, марковским параметрам, ганкелевым сингулярным числам и др.

Системы инвариантов взаимно связаны – через них выстраивается элегантный мост между моделями. Эта сторона дела особенно ценна, так как лобовые формулы пересчета параметров порою громоздки и способны испортить своим видом любую теорию. Далее нас в первую очередь будут интересовать канонические формы, возникшие в результате исследования системных свойств управляемости и наблюдаемости. С их помощью была доказана теорема о возможности произвольного размещения спектра матрицы замкнутой динамической системы обратными связями по состоянию. Системный подход задал тон каноническим построениям.

Задача построения канонических форм управляемости и наблюдаемости сводится к удовлетворению трех основных потребностей. Во-первых, с их помощью можно связать математические описания, в частности, модели пространства состояний с передаточными функциями. Во-вторых, благодаря каноническим формам удастся вычислить вектор состояния. Наконец, от них зависит расчет модальных регулятора и наблюдателя, с этой стороны они наиболее известны. Стоит подчеркнуть, что не всякий существующий путь использования канонических форм удачен.

Канонические формы многосвязных систем традиционно сложны в рассмотрении. Их трактовка существенно зависит от сферы применения. Любое исследование, таким образом, нацелено на частные нужды и дает особое решение. В научной литературе можно наблюдать, как в процессе последовательных компиляций частные детали благополучно оторвались от породившего их содержания. Сомнительно, что многое из того, что возникло таким путем, надо поддерживать на плаву. Важнее овладеть приемами «формотворчества» и отчетливо видеть его перспективы с тем, чтобы уметь гарантировать реализуемость своих проектов.

4.2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть модель линейного объекта в пространстве состояний имеет вид

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad y = Cx + Du,$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния системы, $x_0 = x(0)$; $u \in R^m$ – вектор входа; $y \in R^l$ – вектор выхода.

Невырожденное преобразование внутренних координат

$$\hat{x} = T^{-1}x$$

не отражается на отношениях входных и выходных сигналов, такие преобразования называются *эквивалентными*. После подстановки матрицы математического описания объекта меняются на следующие

$$\underline{A} = T^{-1} A T, \quad \underline{B} = T^{-1} B, \quad \underline{C} = C T, \quad \underline{D} = D.$$

Поскольку одной и той же системе можно поставить в соответствие не одну, а множество тетрад $\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}\}$ с различным заданием матриц, она неидентифицируема. Вместе с тем, это описание избыточно. Если из всех моделей выбрать одну, опираясь на структурные признаки, то вопрос об ее однозначном определении вновь обретает значение.

Алгоритм построения интересующих нас канонических форм един и основан на следующем свойстве циклических матриц. Пусть совокупность векторов $\xi, A\xi, A^2\xi, \dots, A^{n-1}\xi$ образует базис, $\xi \in R^n$. Матрица перехода T к новому базису, составленная из координат этих вектор-столбцов, приводит A к каноническому виду Фробениуса

$$\underline{A} = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 1 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Доказательство состоит в проверке уравнения $T\underline{A}=AT$ прямой подстановкой в него выражений для T и \underline{A} .

Попутно, кроме матрицы \underline{A} можно упростить \underline{B} , если использовать $\xi=B$, что возможно для систем с одним входом. В координатах нового базиса вектор входа становится единичным ортом $\underline{B} = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$.

Матрица преобразования T в таком случае совпадает с матрицей управляемости односвязной системы. Важно отметить то, что остаточное число параметров канонической формы становится соизмеримым с количеством коэффициентов числителя и знаменателя передаточной функции односвязной системы. Оказывается, что инварианты двух таких моделей связаны между собой линейной зависимостью. Если умножить вектор состояния на матрицу пересчета коэффициентов, в новом вспомогательном базисе каноническая форма будет с точностью до знаков наследовать параметры передаточной функции. Этот дополнительный базис наиболее популярен при построении модальных регуляторов, поскольку здесь легче влиять на характеристический полином матрицы замкнутой системы.

Обсудим возможные препятствия. Подход не универсален, поскольку даже для циклических матриц выбор $\xi=V$ не всегда приводит к желаемому результату. Впрочем, это касается только неуправляемых систем, а таковые имеет смысл редуцировать с тем, чтобы упростить задачу. Значительно большая неприятность состоит в том, что циклическая последовательность векторов стремится к главному собственному вектору матрицы A , последние члены последовательности нередко так мало отличаются от него, что матрица T оказывается крайне плохо обусловленной. Обходной маневр состоит в построении вспомогательной канонической формы непосредственно по передаточной функции, если таковая известна заранее.

К сожалению, ни основная, ни какая-либо вспомогательная каноническая форма управляемости не дает информации о том, как вектор состояния связан с входными и выходными сигналами. При моделировании реакций системы с нулевыми начальными условиями неизвестной взаимосвязью можно пренебречь. Принципиальный выход из положения дает построение канонической формы наблюдаемости односвязной системы выбором $\xi=C^T$. В этом случае циклическая последовательность векторов строится с транспонированной матрицей системы $\xi, A^T \xi, A^T \xi, \dots$, а переход к новому базису осуществляется на основе матрицы T , инверсной по отношению к транспонированной матрице наблюдаемости.

Каноническая форма наблюдаемости решает проблему определения вектора состояния по входным и выходным сигналам для остальных форм, так как они связаны между собой в основном матрицами управляемости или наблюдаемости. Впрочем, препятствие в виде плохой обусловленности последних разрастается здесь до ощутимых размеров, ибо обходные пути отсекаются. У многосвязных систем канонические формы по этой причине делают блочными. Связь с параметрами передаточных функций усложняется, вспомогательные строчные и столбцовые формы целесообразно искать для ограниченного класса систем.

4.3. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА НАБЛЮДАЕМОСТИ

Рассмотрим односвязную систему с передаточной функцией

$$Q(p) = d + \frac{\beta_{n-1}p^{n-1} + \dots + \beta_1 p + \beta_0}{p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0}$$

и строчной канонической формой наблюдаемости вида

$$\dot{x} = \underline{A} x + \underline{B} u; \quad y = \underline{C} x + \underline{D} u,$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \underline{C} = (1 \ 0 \ \dots \ 0), \quad \underline{D} = d.$$

К этой канонической форме приводит эквивалентное преобразование координат с матрицей, инверсной транспонированной матрице наблюдаемости $W_c = [C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T]$, т. е. $\Gamma = (W_c^T)^{-1}$.

Вектор состояния связан с входными и выходными сигналами

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & d & \dots & 0 \\ b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \ddot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Вид канонической формы одинаков для непрерывных и дискретных динамических систем, для объектов вида

$$x_k = \underline{A} x_k + \underline{B} u_k; \quad y_k = \underline{C} x_k + \underline{D} u_k,$$

вектор состояния вычисляется следующим образом

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{k-n+1} \\ y_{k-n+2} \\ y_{k-n+3} \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & d & \dots & 0 \\ b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{k-n+1} \\ u_{k-n+2} \\ u_{k-n+3} \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}.$$

Применяя преобразование Лапласа к производной вектора состояния $px = Ax + Bu$, получим $x = (pE - A)^{-1}Bu$ и далее $y = Cx + Du = (C(pE - A)^{-1}B + D)u$. Отсюда следует, что

$$Q(p) = C(pE - A)^{-1}B + D.$$

Однозначный переход в противоположную сторону, от коэффициентов передаточной функции к параметрам матриц пространства состояний возможен, разумеется, только для канонических форм. Тем самым, теория эквивалентных преобразований прокладывает мост между различными видами описания линейных динамических систем.

Коэффициенты знаменателя передаточной функции $Q(p)$ с точностью до знака совпадают с коэффициентами фробениусовой матрицы $a_{ni} = -\alpha_{i-1}$, коэффициенты числителя связаны линейным преобразованием с коэффициентами вектора входа, а именно:

$$\begin{pmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-3} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & & 0 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим две попавшие в наше поле зрения теплицевы матрицы так

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & & 0 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & d & & 0 \\ b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & d \end{pmatrix}.$$

С их помощью уравнения связи для параметров и для сигналов записываются короче

$$a = -\alpha, \quad \underline{B} = \underline{L}^{-1}\beta, \quad d = \underline{D}, \quad x = Y - L U,$$

где $\alpha, \beta \in R^n$ – векторы параметров передаточной функции; $a \in R^n$ – коэффициенты нижней строки фробениусовой матрицы \underline{A} ; $Y, U \in R^n$ – векторы выборки измерений входных и выходных сигналов и их производных.

Столбцовая каноническая форма. Пусть тетрада $\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}\}$ приведена к канонической форме наблюдаемости. Столбцовая каноническая форма наблюдаемости получается эквивалентным преобразованием с матрицей вида \underline{L}^{-1} . Оно сводит вектор входа \underline{V} к β , т. е.

$$\mathbf{A} = \underline{L} \underline{A} \underline{L}^{-1}, \quad \mathbf{B} = \underline{L} \underline{B}, \quad \mathbf{C} = \underline{C} \underline{L}^{-1}, \quad \mathbf{D} = \underline{D},$$

коэффициенты модели с точностью до знака совпадают с коэффициентами передаточной функции

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_1 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \ 0 \ \cdots \ 0), \quad \mathbf{D} = d.$$

Доступ к вектору состояния осложняется $x = \underline{L} (Y - L U)$.

4.4. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА УПРАВЛЯЕМОСТИ

Каноническая форма управляемости имеет вид

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 1 & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{C} = (c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n), \quad \underline{D} = d.$$

К этой канонической форме приводит эквивалентное преобразование координат с матрицей управляемости $W_B = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$, $T = W_B$. Его можно провести в два этапа, преобразуя исходную тетраду $\{A, B, C, D\}$ сначала к канонической форме наблюдаемости, а затем – управляемости. Вектора состояния находится как $x = W_B^{-1}(Y - LU)$. Параметры канонических форм управляемости и наблюдаемости совпадают, отсюда

$$\begin{pmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-3} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & & 0 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Строчная каноническая форма. Пусть тетрада $\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}\}$ приведена к канонической форме управляемости. Вспомогательное преобразование с ганкелевой матрицей $\Gamma = \text{flip } L^T$ (*flip* ставит столбцы в обратном порядке) приводит описание системы к строчному виду, т. е.

$$\mathbf{A} = \Gamma^{-1} \underline{\mathbf{A}} \Gamma, \quad \mathbf{B} = \Gamma^{-1} \underline{\mathbf{B}}, \quad \mathbf{C} = \underline{\mathbf{C}} \Gamma, \quad \mathbf{D} = \underline{\mathbf{D}},$$

коэффициенты модели с точностью до знака совпадают с коэффициентами передаточной функции:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (\beta_0 \ \beta_1 \ \cdots \ \beta_{n-1}), \quad \mathbf{D} = d.$$

Доступ к вектору состояния довольно сложен $x = \Gamma^{-1} W_B^{-1} (Y - L U)$.

4.5. РЕДУЦИРОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ

Редуцированные канонические формы возникают в случае неуправляемых или ненаблюдаемых систем, когда порядок передаточной функции меньше размерности вектора состояния.

Матрица управляемости или наблюдаемости, соответственно, содержит вырожденные столбцы, которые можно безболезненно удалить. При построении канонической формы следует пользоваться укороченной прямоугольной матрицей T , заменяя инверсии на псевдообращение

$$\underline{\mathbf{A}} = T^+ \mathbf{A} T, \quad \underline{\mathbf{B}} = T^+ \mathbf{B}, \quad \underline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} T, \quad \underline{\mathbf{D}} = \mathbf{D}.$$

Никаких накладок с нахождением вспомогательных форм и отысканием вектора состояния не возникнет. Эта идея пока неоправданно редко используется.

Рассматриваемый метод редукции позволяет получать приближенные описания системы любых порядков, начиная с первого, когда

$$T = B, \quad T^+ = B^T / B^T B \quad \text{или} \quad T^+ = C, \quad T = C^T / C C^T.$$

Заметим, что звено второго порядка таким способом сводится к апериодическому звену с постоянной времени, обратно пропорциональной постоянной времени исходного звена.

4.6. МНОГОСВЯЗНЫЕ СИСТЕМЫ

Блочная каноническая форма наблюдаемости имеет вид

$$\dot{x} = \underline{A} x + \underline{B} u; \quad y = \underline{C} x + \underline{D} u,$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{l1} & A_{l2} & \cdots & A_{ll} \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_l \end{pmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

59

Она является продуктом эквивалентных преобразований системы с матрицей, построенной из фрагментов матриц наблюдаемости для каждого из выходов. Диагональные блоки блочной фробениусовой матрицы \underline{A} наследуют структуру, изученную ранее у односвязных систем. Внедиагональные блоки отличаются от фробениусовых отсутствием угловой единичной матрицы. Они содержат только нижние отличные от нулей строки. Матрицу \underline{C} образуют орты, отражающие очередность следования строк C в матрице, построенной из столбцов $W_c = [C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T]$.

Вектор состояния каждой подсистемы находится подобно вектору состояния первой подсистемы

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \vdots \\ y_1^{(k-1)} \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^m \begin{pmatrix} d_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{1i} & d_{1i} & & 0 \\ b_{2i} & b_{1i} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k-1,i} & b_{k-2,i} & \cdots & d_{1i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_i \\ \dot{u}_i \\ \ddot{u}_i \\ \vdots \\ u_i^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Блоки матриц \underline{L} , \underline{L} наследуют теплицеву структуру от матриц связи сигналов и параметров односвязной системы:

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} \underline{L}_{11} & \underline{L}_{12} & \cdots & \underline{L}_{1l} \\ \underline{L}_{21} & \underline{L}_{22} & \cdots & \underline{L}_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{L}_{l1} & \underline{L}_{l2} & \cdots & \underline{L}_{ll} \end{pmatrix}, \quad \underline{L} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1l} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{l1} & L_{l2} & \cdots & L_{ll} \end{pmatrix}.$$

Прямоугольные внедиагональные клетки блочных матриц приходится наращивать нулями или усекать сверху.

Основные проблемы кухни канонических форм многосвязных систем начинаются с попытки установления связи параметров их матриц с коэффициентами передаточных функций и нахождения вектора состояния через измерения входных и выходных сигналов и их производных в соответствии с делением модели системы на подсистемы.

Связь параметров и сигналов по-прежнему укладывается в формулы

$$a = -\underline{\alpha}, \quad \underline{B} = \underline{L}^{-1}\underline{\beta}, \quad d = \underline{D}, \quad x = Y - L U.$$

где $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ – матрицы коэффициентов передаточных функций; a – расширенный вектор параметров блочной матрицы \underline{A} ; Y , $U \in R^n$ – векторы выборок измерений входных и выходных сигналов и их производных.

Значительное упрощение матрицы системы возможно при использовании базисов ее инвариантных подпространств. Последовательность векторов ξ , $A\xi$, $A^2\xi$, ..., $A^{k-1}\xi$ образует базис циклического инвариантного подпространства R^k тогда, когда $A^k\xi$ линейно зависит от предыдущих векторов. В координатах расщепленного пространства $R^k + R^g + \dots + R^q = R^n$ матрица канонической формы приобретает блочную диагональную структуру \underline{A} , называемую естественной нормальной формой матрицы A . Если каждый вектор последовательности зависит от всех векторов своей цепочки и векторов предыдущих цепочек, то соответствующие инвариантные подпространства вложены друг в друга $R^k \subset R^g \subset \dots \subset R^q = R^n$. Каноническая форма матрицы \underline{A} приобретает нижний квазитреугольный вид. Все же, вряд ли разумно всегда жертвовать ресурсами управляемости и наблюдаемости в угоду простоте внешнего вида модели.

Метод редукции, рассмотренный в предыдущем разделе, указывает простой путь нахождения передаточных функций многосвязной системы от любого входа к любому выходу на основе частных канонических форм для односвязных подсистем

Более громоздкий подход связан с построением блочной фробениусовой формы. Основная сложность теории канонических форм многосвязных систем связана с нарушением регулярности блоков приводящих структур вследствие возможной асимметрии их размеров. Внедиагональные клетки блочной теплицевой матрицы \underline{L} , необходимой при построении вспомогательных структур, вместо треугольных становятся трапециевидными. Материал становится труднообозримым настолько, что в ряде работ это естественное для односвязных систем направление вообще не рассматривается. Вместо него в расчет принимаются иные соображения, ведущие к преимуществам, охотно используемым при синтезе регуляторов.

ГЛАВА 5 СИНТЕЗ СИСТЕМ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

5.1. СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Модальный синтез – проблема относительно молодая. По своему происхождению она является прямой наследницей другой, ставшей уже классической, алгебраической проблемы собственных значений. Такие задачи живут долго, веками. Так, например, вычислительные особенности определения спектра матриц интенсивно изучались во второй половине двадцатого века, значительные успехи в этой области связаны с именами Дж. Френсиса и В.Н. Кублановской [19]. Модальный синтез эксплуатирует, как видно, одну из хорошо разработанных областей знания.

При всем том сам он развит слабо. По крайней мере, его трудно назвать исследованным полно. Диссонанс между модальным синтезом и анализом особенно заметен тогда, когда мы попытаемся отыскать в компьютерных пакетах средства для проведения в жизнь того и другого. Анализ спектра во многих программах представлен рядовой функцией. Синтез до такого сервиса еще не дорос. А всего и разницы то, что в первом случае мы находим собственные значения, а во втором – их назначаем. Казалось бы, близкие по смыслу проблемы, а пути у них разные.

Соприкосновение с задачей модального синтеза наблюдается в трудно обозримом, на настоящий день, количестве научных работ. Несложно заметить, однако, что подавляющее большинство трудов развивают концепцию в той ее части, в которой она лишена своего естественного основания. Иными словами, наводит на размышление то обстоятельство, что авторы избегают трактовать проблему выбора спектра. Вместо этого внимание сосредотачивается на относительно второстепенных механизмах определения матрицы коэффициентов модального регулятора при «заданных» собственных значениях, неясно каких.

Порою спектр выбирается из весьма абстрактных геометрических построений на комплексной плоскости, таких, например, как задание собственных значений на дуге окружности с равными расстояниями между собой. Для многосвязных систем выбор спектра выливается в мало приятную проблему «роя» собственных значений, когда их количество является большим, и совсем неочевидно, что со столь многочисленными «характеристическими» точками нужно делать. Очень неудачным представляется выбор доминирующих собственных значений по признаку одной лишь близости их к мнимой оси и т.д., и т.п. Ясно, что в положении спектра скрыты глубинные свойства системы, произвольное распределение его означает пренебрежение динамикой управляемого объекта.

Выбор спектра является фундаментальным вопросом темы, вопросом до сих пор мало изученным и, несомненно, более важным, чем те детали различных способов его реализации, которые шлифуются с тщательностью, свидетельствующей скорее об ограниченном видении проблемы, чем об их действительном значении. Нет, например, гарантий того, что обоснованный выбор собственных значений не потребует такого изменения алгоритма модального синтеза, при котором найденные детали вычислительных методов вообще найдут спрос, а не отпадут – за ненужностью.

Трудно предположить, что узловая «проблема в проблеме» не понималась специалистами. Модальное управление всегда притягивало к себе умы сильных аналитиков, чьим влиянием, собственно, задача достигла современного отнюдь не низкого уровня ее развития. Скорее верно другое, чисто аналитический метод исследования, к сожалению, не приводит к прозрачному результату, помогающему обоснованно выбрать желаемый спектр. Состояние модального синтеза напоминает, отчасти, бывшее состояние шахмат, когда знание правил перемещения фигур по клеткам не способствовало осмысленному владению ими.

Точно также, знание ста способов реализации желаемого спектра мало помогает его выбору. На этом фоне намерение найти сто первый «верный» вариант вряд ли покажется кому-либо любопытным. Хотя филидоровское решение отнюдь не находится у нас в кармане, ничто не наводит так на раздумье, как зрелище тупика в завершениях у иных менее рискованных изысков. Этот вывод заставляет всерьез задуматься о правильном направлении исследований в теории управления модами.

Основной трудностью модального синтеза является не недостаток, а избыток параметров, влияя на которые можно получать системы с различными свойствами. Отсюда вытекает, в частности, уже упомянутая проблема роя, когда задача угнетает одним лишь избытием возможностей. С этой точки зрения замена лобового назначения «желаемого» спектра указанием *тенденции* его изменения будет серьезным продвижением вперед, сводящим выбор многих собственных значений к выбору одного или нескольких показателей, описывающих *сжатие спектра*.

Традиционный подход к модальному синтезу напоминает слепок шахматной игры, в которой зафиксированы начальная и конечная, как правило, патовая (по итогам синтеза) позиции, с пропуском всех остальных стадий. В работе вынашивается мысль о том, что нельзя получить итог, не разыграв партии, а розыгрыш снимает тяжесть проблемы выбора спектра. Для этого придется вводить оценки позиции – меры модального доминирования. Путь к ним пролегает через специфические уравнения модального синтеза и матричный аппарат мер модального доминирования.

5.2. МАТРИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ СИЛЬВЕСТРА

Синтез систем автоматического управления нередко сводится к решению какого-либо стандартного матричного уравнения. Наиболее известны линейное матричное уравнение Ляпунова и нелинейное матричное уравнение Риккати (оптимальный синтез по квадратичному критерию качества). Стандартные уравнения выделять выгодно, они привлекают внимание специалистов по вычислительной математике, обеспечивающих их квалифицированное решение. Вычленим матричное уравнение, персонализирующее проблему модального синтеза.

Пусть линейная динамическая система имеет вид

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx,$$

где A – матрица системы (квадратная, n -го порядка), B – матрица входа размера $n \times m$, C – матрица выхода размера $l \times n$, x , u , y – векторы состояния, управления и выхода соответственно.

В задаче модального синтеза при помощи линейных обратных связей по состоянию $u = -Kx$ требуется синтезировать матрицу замкнутой системы с *желаемым* спектром $Q = A - BK$, который надо уметь задавать.

Получаем матричное уравнение

$$A - Q = BK.$$

Представим матрицы разомкнутой и замкнутой систем разложениями в базисах их собственных векторов

$$A = VDV^{-1}, \quad Q = SJS^{-1},$$

где D , J – диагональные, в частности, а в общем – жордановы, матрицы собственных значений; V , S – матрицы собственных векторов.

С учетом разложения Q , после умножения матричного уравнения справа на S и группировки членов, имеем

$$AS - SJ = BKS.$$

Это уравнение нелинейно относительно неизвестных S и K . Вследствие умножения на S , оно приобрело лишние корни: ему будут удовлетворять не только тривиальные (нулевые) решения S и K , но также вырожденные матрицы. Поэтому его следует дополнить условием $\det S \neq 0$.

Параметризуем правую часть уравнения с помощью неопределенного матричного множителя M , исключая нелинейную составляющую так, что $KS = M$, тогда

$$AS - SJ = BM.$$

Получаем стандартное матричное уравнение Сильвестра, линейное относительно S .

Решив его, несложно далее вычислить матрицу обратных связей линейного регулятора

$$K = MS^{-1}.$$

В результате параметризации множество возможных решений задачи модального управления записано теперь в явной форме относительно искомой матрицы K . Оно определяется видом матричного множителя M , влияющего на правую часть уравнения Сильвестра $AS - SJ = P$, $P = BM$. Операцию придания неопределенной матрице M некоторого конкретного значения назовем *замыканием* уравнения Сильвестра.

Акт замыкания уравнения центральный и очень важный для придания правильного направления синтезу многосвязных систем. Через него лежит путь к обоснованному решению проблемы выбора спектра и проблемы размещения собственных векторов замкнутой системы.

Теория сообщает явный вид решения уравнения Сильвестра, совпадающего с решением $S(\infty)$ дифференциального уравнения

$$\dot{S} = AS - SJ, \quad S(0) = P, \quad \text{тогда} \quad S(\infty) = \int_0^{\infty} e^{At} P e^{-Jt} dt,$$

при условии, что спектры матриц A и Q различны между собой.

Частным случаем уравнения Сильвестра является уравнение Ляпунова, получаемое при замене J на $-A^T$, т. е. $AS + SA^T = P$.

При синтезе систем, оптимальных по квадратичному критерию качества, встречается матричное алгебраическое уравнение Риккати

$$AS + SA^T - S^T R S = P,$$

которое, как видно, сводится к уравнению Ляпунова при аннулировании квадратичной составляющей.

В задачах модального синтеза изменение всего спектра, как правило, нецелесообразно, поэтому указанное выше аналитическое решение уравнения Сильвестра далеко от практических нужд и носит осведомительный характер. Особый случай, оговариваемый теорией, в модальном синтезе является основным и наиболее актуальным вариантом.

Для матрицы Q с простым спектром имеем

$$J = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad S = (S_1, S_2, \dots, S_n).$$

В данном случае уравнение Сильвестра допускает декомпозицию на ряд более простых подсистем

$$(A - \lambda_i E) S_i = B M_i,$$

где M_i – вектор столбцы $M = (M_1, M_2, \dots, M_n)$, $i = 1..n$.

Сразу обращает на себя внимание следующее.

Анализ и синтез модальных систем отличаются между собой видом правой части, в задачах анализа она нулевая.

Очевидно, это и есть самое простое замыкание уравнения Сильвестра, гарантирующее сохранение спектра.

В вырожденных задачах модального синтеза часть собственных значений не изменяются, отсюда следует факторизация матричного множителя на произвольно назначаемую и нулевую части, пусть

$$M = (M_1, \dots, M_k, 0, \dots, 0),$$

только первые k собственных значений матриц разомкнутой и замкнутой систем различны между собой.

Следовательно, операция замыкания уравнения Сильвестра связана с относительно небольшим количеством произвольно назначаемых коэффициентов. Остальные находим из условием совместности. При совпадении λ_i с одним из собственных значений матрицы A их выбор весьма стеснен, но есть рациональная форма решения, регламентирующая оставлять собственные векторы такими, какие они есть у матрицы разомкнутой системы. Различие, которое вносит модальный подход как возможная альтернатива оптимальному подходу при квадратичном критерии качества, обуславливается более простым видом линейного уравнения Сильвестра в сравнении с уравнением Риккати, которое, к тому же, невозможно подвергнуть указанной декомпозиции на составляющие.

Итоговые уравнения модального синтеза отличаются от уравнений анализа незначительно, имеем

$$(A - \lambda_i E) S_i = B M_i; \quad i = 1..k; \quad (A - \lambda_j E) S_j = 0; \quad j = k+1..n.$$

Отметим, что у многосвязных систем кроме проблемы размещения спектра возникает проблема размещения собственных векторов, поскольку правая часть уравнений допускает некоторую вариацию.

Матричный множитель M изобретен нами как удобное методическое средство, упрощающее некоторые выкладки и, в частности, удобное для оптимизации структуры собственного пространства. Однако можно обойтись и без него. Пусть $L = (E - BB^+)$, альтернативный вид уравнений модального синтеза выглядит единообразно

$$L (A - \lambda_i E) S_i = 0, \quad i=1..n.$$

Умножение на вырожденную матрицу L отражает расширение областей, в которых можно искать собственные векторы матрицы Q по сравнению с тесными границами инвариантных подпространств матрицы A . Чем больше входов имеет многосвязная система, тем более вольно могут избираться ее собственные векторы. Теоретически возможен синтез, оставляющий на месте спектр и изменяющий только собственные векторы. Эту оригинальную идею следует иметь в виду, перечисляя возможные варианты замыкания уравнения Сильвестра.

Традиционный путь решения задач модального синтеза опирается на канонические формы динамических систем, позволяющие прямо назначать не спектр, а коэффициенты характеристического уравнения матрицы замкнутой системы. Для многосвязных систем проблема поиска канонической формы управляемости выливается в мало приятную процедуру выбора состава и объемов фробениусовых клеток. Обусловленность эквивалентных преобразований, как правило, оставляет желать лучшего. Кроме того, синтез регуляторов сопряжен с аннулированием коэффициентов внедиагональных блоков. Такого сорта решения навязаны соображениями вычислительной простоты, они не учитывают динамику объекта.

Представленные выше уравнения описывают альтернативный подход, объективно лишенный указанных недостатков. Его преимущества может подчеркнуть обоснованный выбор коэффициентов матричного множителя M . Это важный рычаг управления решением, которым следует осмозрительно пользоваться. И тогда алгоритмы модального синтеза становятся непосредственным продолжением алгоритмов анализа.

5.3. ЗАМЫКАНИЕ УРАВНЕНИЯ СИЛЬВЕСТРА

Желанию синтезировать обоснованный спектр матрицы замкнутой системы аккомпанирует желание не менее обоснованным образом распорядиться с варьируемыми собственными векторами. Обозначим резольвенту матрицы разомкнутой системы как $R(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1}$, тогда $S_i = R(\lambda_i) B M_i$.

Свободу выбора множителя M можно употребить для придания собственным векторам матрицы $Q = SJS^{-1}$, где $J = D + \delta D$, «динамически совместных» позиций вблизи собственных векторов матрицы $A = VDV^{-1}$.

Вариант 1. Прямой путь к стяжке собственных векторов лежит через рассмотрение уравнений $S(\lambda_i, M_i) = V_i$. Минимум норме разности векторов левой и правой части доставляет нормальное псевдорешение уравнения

$$R(\lambda_i) B M_i = V_i.$$

Пусть над «трудоустройством» одних собственных векторов работают другие собственные векторы. Возможны облегченные варианты.

Вариант 2. Запишем матричное уравнение Сильвестра в форме разрешенной относительно проекций $\underline{S} = V^{-1}S$ собственных векторов Q на оси собственного базиса A

$$D\underline{S} - \underline{S}J = \underline{B}M, \text{ где } \underline{B} = V^{-1}B.$$

Правая часть уравнений является каркасом \underline{S} , «раскачиваемым» смещениями собственных значений $J = D + \delta D$.

Идее сближения собственных векторов отвечает притяжение каркаса к единичной матрице. Отсюда получаем уравнение $\underline{B}M = E$ и выходим на его нормальное псевдорешение

$$M = \underline{B}^+,$$

как на средство, индифферентное к частностям конкретных изменений δD .

Вариант 3. В каркасе $\underline{B}M$ выбором M максимально усилим диагональные элементы, получим решение

$$M = \underline{B}^*,$$

близкое, по сути, к предыдущему варианту, но более простое (опорное).

Разумеется, это не единственные предложения. Разнообразие вариантов отвечает свойствам вырожденных задач. С перемещением по схеме расчета сверху вниз формулы упрощаются.

Рассмотрим важный частный случай, касающийся синтеза систем с одним входом. Поскольку собственные векторы определены с точностью, как минимум, до одной произвольной постоянной, выбор величин компонент в матрице строке M можно упростить и подчинить единственно условию алгебраической совместности уравнения Сильвестра, приняв $M_i=1$, $i=1..k$. Уравнения модального синтеза приобретают особенно лаконичный и близкий к формальной постановке алгебраической проблемы собственных значений характер

$$(A - \lambda_i E) S_i = B,$$

где $i=1..k$; для неизменяемой же части спектра $(A - \lambda_j E) S_j = 0$, $j=k+1..n$.

Обращает на себя внимание также то, что собственные векторы являются значениями векторной резольвенты

$$S(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1}B,$$

которая, в свою очередь, с точностью до знака есть передаточная функция разомкнутой системы от входа к вектору состояния.

Все возможные варианты синтеза замкнутой системы содержит передаточная функция разомкнутой системы, являющаяся годографом собственных векторов при вариации спектра.

Констатация причудливых совпадений заходит много дальше. С учетом $M = (1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)$, из выражения

$$K = M S^{-1} = S_1^{-1} + S_2^{-1} + \dots + S_k^{-1},$$

легко видеть, что искомая матрица обратных связей модального регулятора является суммой левых собственных векторов (т.е. строк S^{-1}) матрицы Q , соответствующих изменяемым собственным значениям.

Вдалекой от не прагматических вещей технике найденное конструкторами эффективное решение фюзеляжа самолета, обвода корпуса автомобиля, соотношения высоты и ширины здания и т.д. радует глаз эстетическими пропорциями. Переход от задачи анализа к задаче синтеза всего лишь заменой нуля правой части уравнений матрицей входа B удовлетворяет самым высоким требованиям математической эстетики. Метод обречен, в этом смысле, на успех.

На случай систем второго порядка вершина вектора $S(\lambda)$ прочерчивает на плоскости кривую. Любопытны свойства этого годографа, не стоит путать его с корневым годографом, изучаемым в задачах параметрического синтеза регуляторов. Из определения легко видеть, что

$$\lambda \rightarrow \xi \rightarrow \pm \infty, S(\lambda) \rightarrow -B / \xi; \lambda \rightarrow 0, S(\lambda) \rightarrow x_0 = A^{-1}B \text{ (равновесие);}$$

$$\lambda \rightarrow \lambda_i^A, S(\lambda) \rightarrow V_i.$$

При изменении собственного значения λ в диапазоне $\pm\infty$ годограф собственного вектора начинается на векторе входа B и заканчивается на нем, последовательно обходя все собственные векторы A . В непосредственной окрестности последних радиус годографа возрастает, вдоль их направлений наблюдаются сингулярности – разрывы векторной резольвенты. При нулевом значении λ годограф проходит через положение равновесия, в котором находится динамическая система после подачи на ее вход единичного ступенчатого воздействия.

Поведение годографа дает почву для выводов в отношении свойств модального регулятора.

Во-первых, ясной становится бесперспективность политики смещения собственных значений в ограниченную зону или на далекую периферию, поскольку в обоих случаях матрица собственных векторов S будет заполнена почти коллинеарными друг другу столбцами. Регулятор же зависит от инверсной к ней матрицы, поэтому указанная политика ведет к плохо обусловленным задачам и росту коэффициентов обратных связей. По крайней мере, один из собственных векторов можно найти экспериментально как x_0 , не располагая математическим описанием объекта.

Во-вторых, у многосвязных систем настраиваемый матричный множитель M позволяет генерировать для каждого изменяемого собственного значения свой «вход», выбирая его из линейной оболочки вектор столбцов матрицы B . Среди вариантов модального синтеза есть те, которые ориентированы на самые мощные (максимальные по нормам столбцов матрицы B) входы, это позволяет обходиться малыми величинами элементов матрицы регулятора K . На метрику задачи можно повлиять так, чтобы основное внимание уделялось направлениям, а не нормам векторов входа. Тогда решение будет инвариантно к масштабированию управлений.

Полный обзор свойств вариантов замыкания уравнения Сильвестра, включая гарантии его разрешимости, может составить предмет отдельной дисциплины в пределах темы модального синтеза.

5.4. МЕРЫ МОДАЛЬНОГО ДОМИНИРОВАНИЯ

Понятие меры доминирования берет начало в калмановской декомпозиции системы на части вполне управляемые и вполне наблюдаемые. Продолжая идею дальше, логически можно выделить части более или менее управляемые, более или менее наблюдаемые и так далее, чему способствует модальная дифференциация системы на подсистемы. Подобно аморфному определению вероятности, функция меры не требует жесткого обоснования, привязки, хоть это и возможно, к количественным эффектам. Важно, чтобы ее экстремальные значения отражали потерю управляемости (наблюдаемости) и, наоборот, отчетливое проявление системных свойств.

Суммарное влияние входов или выходов на модальные движения описывает *диагональ* матрицы *W*-взвешенных *квадратов мер* модального доминирования по входу (или по выходу, в дуальной задаче)

$$\mu = M^*M = \underline{B} W \underline{B}^*.$$

Варианты замыканий $M = \underline{B}^*$ и $M = \underline{B}^+$ порождают весовые матрицы

$$W = E \text{ и } W = (\underline{B}^* \underline{B})^{-1}.$$

В обоих случаях меры изменяются в некоторых заранее известных границах (определяющих крайние случаи); предполагается, что строки V^{-1} , содержащие левые собственные векторы A , нормированы.

В первом случае меры ограничивает сверху норма матрицы B . Во втором – меры модального доминирования заведомо неотрицательны, но не превосходят единицы, а их сумма равна рангу матрицы входа B .

В теории динамических систем большое значение придается инвариантам, каковыми являются меры, не зависящие (при аккуратном их определении) от масштабирования входных и выходных сигналов. Их значения зависят, впрочем, от выбора базиса пространства состояний, этой фикции, не влияющей на вход-выходные соотношения. Так и должно быть, ибо свойства наблюдающих устройств и регуляторов связаны с особенностями пространства-посредника. Хорошая управляемость в одном базисе имеет свойство «переливаться» в хорошую наблюдаемость в другом. Это свидетельствует о том, что мотивированное назначение спектра должно исходить из показателей как управляемости, так и наблюдаемости.

Критерии управляемости и наблюдаемости основаны на системных матрицах. Аналогичное значение придадим матричным множителям, построенным на замыканиях уравнения Сильвестра.

Поставщиком мер может служить не только аналитическая геометрия, но и алгебра. Стоит присмотреться к вычетам передаточной функции, т.е. к коэффициентам усиления ветвей, отвечающим жордановой декомпозиции системы на параллельные подсистемы

$$Q(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \sum_i K_i Q_i(p), \quad K_i = \frac{B(\lambda_i^A)}{A(\lambda_i^A)} = \frac{\prod (\lambda_i^A - \lambda_j^0)}{\prod_{i \neq j} (\lambda_i^A - \lambda_j^A)},$$

где λ_i^A – полюса, λ_j^0 – нули динамической системы.

Как видно, вычеты K_i обладают ценным качеством. Они прямо пропорциональны произведению расстояний полюса от нулей передаточной функции и обратно пропорциональны произведению расстояний полюса от остальных полюсов. Эти отношения двух «роз ветров» учитывают взаимные положения полюсов и нулей на плоскости. К недостаткам вычетов как мер относится то, что при сближении пары полюсов они резко возрастают, что не отражает действительной роли модальных составляющих, поскольку знаки коэффициентов усиления соответствующих ветвей становятся противоположными по знаку. Полюсы антагонисты с успехом «гасят» друг друга, как две крупные державы, растрачивающие немалые силы в войне. В таких ситуациях выигрывает некто третий, слабейший.

Избранный геометрический подход выглядит более привлекательным. Нормирование левых и правых собственных векторов разрушает двойственность построенных из них базисов. Элементы нормированных матриц входа и выхода $\underline{B} = V^{-1}B$, $\underline{C} = CV$ отличаются от коэффициентов входа и выхода параллельных ветвей канонической формы как раз нормами левых и правых собственных векторов. Попарные произведения этих норм называются коэффициентами перекоса. Коэффициенты перекоса отражают, в свою очередь, искажение собственного базиса, поэтому сближение пары полюсов не столь катастрофично сказывается на мультипликативных мерах, учитывающих управляемость и наблюдаемость.

Собственные значения матрицы замкнутой системы принято наносить на комплексную плоскость. Для повышения информативности этой картины можно добавить дополнительную третью ось, подвешивая точки спектра над плоскостью на высоте, пропорциональной мультипликативным мерам их модального доминирования. Кроме того, можно исповедовать подход, принятый в астрономии. Звездные атласы дают хорошее представление о координатах звезды и ее величине. Учитывая проблему роя собственных значений, у этого предложения есть шансы на успех.

Понятие меры модального доминирования можно ввести, опираясь на свойства решений уравнения Сильвестра. В таком случае оно кажется более ясным по существу, но громоздким по форме, например:

Определение. Мерой модальной управляемости (наблюдаемости) называется величина, обратная по отношению к минимальной норме матрицы линейного регулятора $u = -Kx$ (наблюдающего устройства) при переносе одного отдельно взятого собственного значения на окружность единичного радиуса в окрестности варьируемой точки спектра разомкнутой системы.

Доказательство эквивалентности различных формулировок мер оставим на потом, пока отметим гармоничное развитие темы: меры управляемости и наблюдаемости дуальных систем попарно совпадают.

Согласуя большую (критерии управляемости-наблюдаемости) и малую (меры) темы теории систем закономерно интересоваться консистентностью мер. Под консистентностью понимается возможность вынесения правильного суждения о свойствах объекта в целом на основании дифференцированных показателей. Перефразируя: вопрос сводится к выяснению того, может ли извлеченная диагональ матрицы μ служить системной матрицей управляемости или наблюдаемости?

Для объектов с матрицей A простой структуры поставленная задача решается однозначно, ибо введенные меры консистентны.

На случай кратных собственных значений требуется более гибкий подход, поскольку соответствующие собственные и, в общем, жордановы векторы свободно избираются в пределах инвариантных подпространств. Это создает трудности интерпретации их скалярных произведений с векторами входа и выхода. Тем не менее, консистентности мер можно добиться простой минимизацией их варьируемых значений.

Помимо прочего, матрица $\mu = \underline{V} W \underline{V}^*$ служит каркасом для грамиана управляемости (наблюдаемости, в дуальной задаче). Грамианы используются в известных формулировках альтернативных системных критериев. Если представить себе грамиан как орех, то матрица квадратов мер есть ни что иное, как его ядро. Консистентность мер прямоком следует из этого примечательного обстоятельства.

Итак, мера призвана подчеркнуть степень близости к границе потери системного свойства, отчего управлять модальным движением или наблюдать его более легко или, наоборот, более трудно. Оценка «трудозатрат» в том или ином количественном выражении конкретизирует ее величину. Неизбежная размытость меры следует из множественности целей модального синтеза: решение различных задач по-разному трудно. Одинаково отражаются предельные случаи потери управляемости или наблюдаемости, консолидирующие разные подходы к определению мер.

5.5. АВТОМАТИЗАЦИЯ ВЫБОРА СПЕКТРА

Комплексные собственные значения матрицы системы распадаются на пары комплексно сопряженных величин $\lambda = \alpha + j\beta$ и $\lambda^* = \alpha - j\beta$. Согласно формуле Эйлера, элементарное движение (мода) описывается как

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + j \sin \beta t).$$

Система устойчива, если все ее собственные значения лежат в левой полуплоскости, см. рис. 5.1.

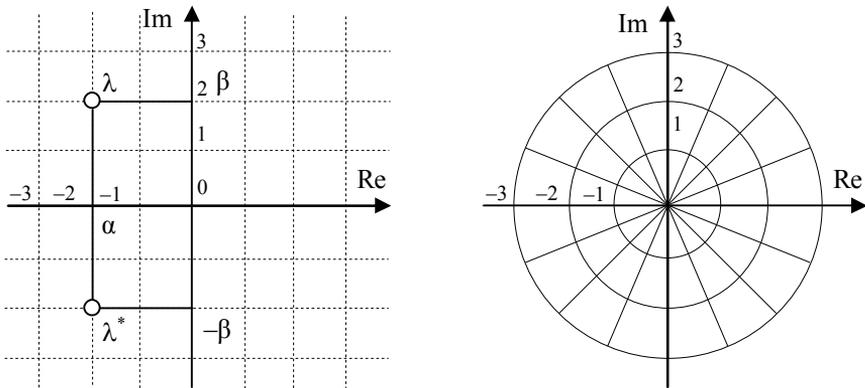


Рис. 5.1. Виды модальной плоскости

Среди динамических систем выделяют маятник, в режиме малых колебаний его дифференциальное уравнение имеет вид $T^2 \ddot{x} + 2 T\xi \dot{x} + x = 0$, где T – постоянная времени, ξ – коэффициент демпфирования колебаний. После вычисления корней характеристического уравнения выясняется, что

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1/T^2; \quad \beta = \pm \alpha \sqrt{1 + \xi^2}.$$

На модальной плоскости «изотаймы», т.е. линии равных постоянных времени T , образуют концентрические окружности, а «изодемпфы» – линии равных коэффициентов демпфирования – радиальные лучи. Изодемпфы с $\xi > 0.7$ «ометают» секторы повышенной колебательности системы.

Особенности модальной плоскости, связь тех или иных ее областей с характеристиками переходных процессов, послужили первыми ориентирами для алгоритмов назначения спектра. Поскольку реализуемость решения во внимание не ставилась, задача модального синтеза в узкой ее постановке свелась к поиску матрицы обратных связей безынерционного регулятора. Что касается конкретных рекомендаций, то два часто встречаемых в научной литературе подхода представлены на рис. 5.2.

Согласно первому направлению мысли, желаемый спектр размещают внутри трапеции, учитывающей ограничения на степень устойчивости η (минимальное расстояние до мнимой оси), быстроту протекания процесса μ (максимальное расстояние до мнимой оси) и колебательность $\text{tg } \varphi$ (максимальное относительное значение β).

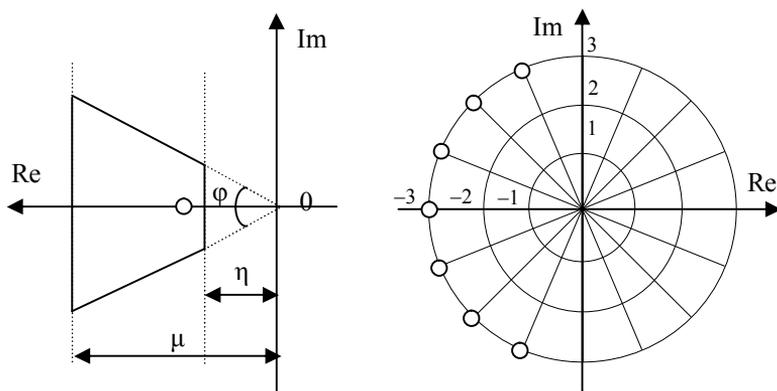


Рис. 5.2. Методы размещения спектра

Второй распространенный подход исходит из принципа симметрии. Он регламентирует, например, равномерное размещение желаемых собственных значений вдоль дуги окружности на равных угловых расстояниях друг от друга.

Некоторое обоснование такое решение находит в положительных качествах фильтра Баттерворта, наделенного симметричным спектром. Однако реальные динамические объекты тем и отличаются от конструируемых из податливых элементов фильтров, что их свойства зависят от нелегко изменяемых компонент. Если идти на поводу у обоих подходов, то мы заставим ротор электростанции и шестерню сервопривода двигаться одинаково. Есть ли хоть капля здравого смысла в такой унификации?

Модальный синтез систем не наделен, в общем, надежными ориентирами для выбора спектра матрицы замкнутой системы. Принципиальная, хотя и несколько ограниченная свобода изменения собственных значений делает нелепой любую попытку утвердить единственно верный вариант назначения спектра также, как в шахматах нет единственно верных ходов за белых или за черных, выигрывающих партию. Правильнее будет не очерчивать жесткие контуры назначения спектра.

Нашу рекомендацию назовем принципом равных пропорций. Вот его содержание.

Принцип равных пропорций. При последовательной коррекции спектра величины изменений собственных значений следует выбирать прямо пропорциональными мерам их модального доминирования (модальным массам). Чем выше мера, тем более глубокая вариация возможна для точки спектра.

В шахматах, кстати, есть все особенности интересующей нас проблемы выбора решения на множестве вариантов.

Во-первых, знание фигур не определяет умение ими играть, также, как знание способов синтеза матрицы обратных связей не определяет содержание концепции модального синтеза. Во-вторых, каждое положение фигур на шахматной доске характеризуется разным их весом в игре, изменение позиции приводит к перераспределению значимости фигур, можно даже сходить неудачно, также, как изменение спектра приводит к значительному перераспределению значений мер модальной управляемости и наблюдаемости. Так что золотое правило шахматной игры: «не знаешь зачем – не ходи» имеет к проблеме подвижки спектра непосредственное отношение.

Спектр простых собственных значений справедливо сравним с развернутым пешечным строем. Роль шахматных фигур в модальной проблеме играют жордановы блоки разной величины. Перемещение точек спектра «наобум» соответствует, очевидно, такому изменению шахматной позиции, в которой мы рискуем оказаться под шахом, отдать ладью за коня и прочее и прочее. Над составлением шахматных программ пришлось поработать вдумчивым аналитикам. Эффект превзошел самые смелые ожидания. Современная шахматная программа бросает вызов чемпиону мира.

Нечто аналогичное предстоит сделать и с модальным синтезом. При этом потребуются формальные оценки «позиций» полюсов, которые дают меры модального доминирования. При изменении спектра оценки меняются, синтез выливается в многоходовую процедуру.

Поясим перспективную концепцию выбора желаемых собственных значений наглядным примером, взятым из механики.

Представим себе пружинную конструкцию, в которой передача воздействия от точки приложения силы к точке снятия реакции происходит через растяжение и сжатие пружин. Распределение передаваемого усилия по пружинным мостикам происходит неравномерно, кроме того, сами пружины обладают разной упругостью. Когда упругих элементов много, также как много прилагаемых к конструкции сил и точек съема, главная наша работа перестает увязываться с каждой пружиной в отдельности.

Вхождение в степени их растяжения или сжатия становится нелегким занятием. Некими обратными связями от выходов к входам, точкам приложения сил, следует стянуть конструкцию так, чтобы она попросту стала жесткой (исходя из резервов крепости ремня, конечно).

Распределяя спектр на комплексной плоскости произвольным образом, мы, пользуясь этой верной по существу дела аналогией, предписываем каждой пружине то, сколь жесткой ей должно быть. Абсурдность подобного предложения видна при выходе на реалии этого дела. На деле же может оказаться так, что стянуть удаленные от точек приложения сил и точек съема периферийные пружины невозможно. Более того, этого и не нужно делать, ибо другая часть упругих элементов будут передавать практически все усилие от тяг, беря на себя основную нагрузку.

Модальный синтез обременен показателями, с которыми он справиться не может. Для многосвязных систем это особенно очевидно. Также, как и собственными частотами, не следует увлекаться заданным временем протекания переходных процессов, заданным перерегулированием и т. п, ибо совсем неясно практическое значение импульсных или ступенчатых усилий, которыми реальный процесс не развивается. Полезнее выбрать некий интегральный показатель, характеризующий степень сжатия спектра, и заниматься только им.

Для того, чтобы построить автоматизированную процедуру сжатия синтеза, важно получить линейную зависимость нормы матрицы обратных связей от параметра, управляющего перемещением собственных значений. При этом они не обязательно должны двигаться равномерно по своим годографам на комплексной плоскости. Контролируя указанную норму, можно планировать процесс синтеза. Иными словами, в процессе последовательного сдвига собственных значений на комплексной плоскости всегда можно назначить предел для величины сноса каждого из них, исходя из требуемых гарантий: в зависимости от исчерпанных предыдущими действиями ресурсов («остатками» нормы), несложно переназначать предел для каждой такой операции. Оказывается, такое планирование возможно.

Продвигаясь вплотную к автоматизированным алгоритмам назначения собственных значений, назовем *элементарным* изменением спектра сдвиг только одного собственного значения с сохранением прочих собственных значений и собственных векторов A .

Докажем следующую теорему модального синтеза.

Теорема 1. При элементарном изменении спектра минимальная норма матрицы K обратных связей модального регулятора прямо пропорциональна радиусу окружности, на которую переходит варьируемое собственное значение, и обратно пропорционально мере модального доминирования (мере управляемости).

Доказательство. Выпишем уравнение Сильвестра на случай изменения только одного собственного значения, т.е. при $k=1$. Мы имеем следующие формулы

$$(A - \lambda_1 E) S_1 = B M_1, \quad M = (M_1 \ 0 \ \dots \ 0), \quad K = M S_1^{-1},$$

где $S = [S_1 \ V_2 \ \dots \ V_n]$, V_i – собственные векторы матрицы A .

Из них видно, что матрица обратных связей зависит только от первой строки S^{-1} , содержащей левые собственные векторы $Q=A-BK$. Для обозначения строк инверсных матриц привлечем индексы, это не создаст путаницы, поскольку знак инверсии сохраним.

Так как $S^{-1}S=E$, первая строка S_1^{-1} ортогональна собственным векторам $V_2 \dots V_n$. Следовательно, она коллинеарна V_1^{-1} , т.е. $S_1^{-1}=pV_1^{-1}$, причем $S_1^{-1}S_1=1$, так что коэффициент пропорциональности $p=1/V_1^{-1}S_1$. Теперь мы можем без хлопот записать формулу решения $K=M_1S_1^{-1}=M_1V_1^{-1}/V_1^{-1}S_1$, вектор $S_1=(A-\lambda_1E)^{-1}BM_1$.

Подставим разложение $A=VDV^{-1}$ в выражение для S_1 . Вынося V и V^{-1} за скобки, получим очередную порцию сокрушительных упрощений, оставляющих на месте $A-\lambda_1E$ разность пары собственных значений

$$K = (\lambda_1^A - \lambda_1) M_1 V_1^{-1} / V_1^{-1} B M_1.$$

Нас интересует минимальное по норме решение. Искомый минимум достигается на максимуме значения делителя $V_1^{-1} B M_1$. От нормы M_1 норма K не зависит, этот вектор есть в знаменателе. Остается варьировать его ориентацию. Максимум произведения компонент делителя $V_1^{-1} B$ и M_1 достигается на решении $M_1=(V_1^{-1} B)^*$.

Тогда $K=B^T K_{11}$, $K_{11}=(\lambda_1^A - \lambda_1)(V_1^{-1})^* V_1^{-1} / \mu_{11}$, $\mu_{11}=M_1^* M_1$. Остались факторы, перечисленные в тексте теоремы. Доказательство ее окончено.

Сосредоточим внимание на опускаемом ранее из виду приближенном решении уравнения Сильвестра.

Теорема 2 (Малая Теорема модального синтеза). В режиме малых перемещений матрицу регулятора можно аппроксимировать суммой матриц регуляторов, реализующих элементарное изменение спектра, т. е.

$$K \cong K_1 + K_2 + \dots + K_n, K_i = B^T K_{ii}, K_{ii} = (\lambda_i^A - \lambda_i)(V_i^{-1})^* V_i^{-1} / \mu_{ii}, \mu = M^* M.$$

Доказательство. Запишем замкнутое матричное уравнение Сильвестра в форме $D\underline{S} - \underline{S}J = \mu$, разрешенной относительно проекций $\underline{S} = V^{-1}S$ собственных векторов Q на оси собственного базиса A . Отсюда имеем

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_{11}}{\lambda_1^A - \lambda_1} & \dots & \frac{\mu_{1n}}{\lambda_1^A - \lambda_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mu_{n1}}{\lambda_n^A - \lambda_1} & \dots & \frac{\mu_{nn}}{\lambda_n^A - \lambda_n} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \frac{\mu_{11}}{\lambda_1^A - \lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\mu_{nn}}{\lambda_n^A - \lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что при сколь угодно малом изменении спектра, мотивированном к тому же мерами, внедиагональными элементами \underline{S} , в конце концов, можно пренебречь. Но тогда диагональной будет и инверсная матрица, входящая в расчет регулятора $K = MS^{-1} = M\underline{S}^{-1}V^{-1}$. Решение распадается на ряд задач, с формулами которых мы уже имели дело, занимаясь точечной подвижкой собственных значений. Доказательство окончено.

При элементарном изменении спектра справедлива следующая оценка нормы матрицы обратных связей

$$\min \|K\| = \frac{1}{\mu_{\otimes}}, |\lambda_1^A - \lambda_1| = 1.$$

где $\mu_{\otimes} = \sqrt{\mu_{11}}$ – мера модальной управляемости точки λ_1^A . Эта оценка применима также в отношении слагаемых, управляющих малым групповым переносом спектра.

Техника перемещения одного собственного значения – азбука модального синтеза в том смысле, что владение элементами этого аппарата освещает путь построения аппроксимационных формул для сдвига нескольких «лямбд».

На рис. 5.3 показан спектр матрицы азимутального канала поворота пространственно-механической конструкции (ПМК) радиоантенны. Не только студент, но и специалист, пожалуй, не выберет здесь «желаемый спектр», а ведь это только один из рядовых объектов автоматизации, причем, сравнительно небольшой размерности. Что же делать с роем собственных значений более сложных систем? Казалось бы, чтобы обеспечить запас устойчивости, надо подтянуть крайние правые собственные значения, расположенные в виде лепестков, но именно они описывают основные тона колебания чаши ПМК.

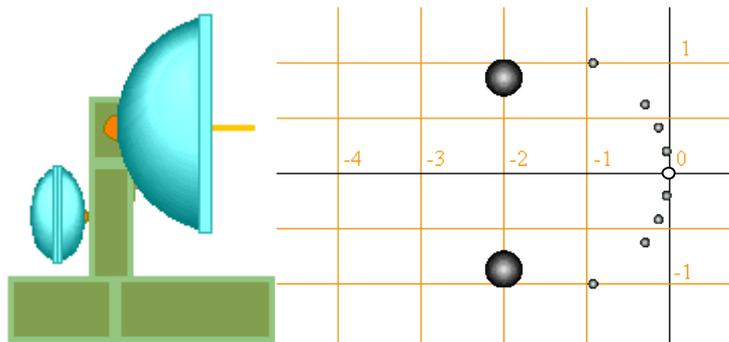


Рис. 5.3. Антенна и ее спектр

Демпфировать высокочастотные колебания антенны мощным сервоприводом – все равно, что стрелять из пушки по воробьям. Эффект будет примерно тот же – напрасные траты ресурсов регулятора, ведущие систему к аварии. Между тем, на рисунке, как в звездном атласе, размером точек отражены значения мер модальной управляемости собственных значений, а светимостью – значения мер модальной наблюдаемости. Наиболее управляемыми оказываются полюса сервопривода (слева), чаша антенны видна как интегратор, см. полюс в начале системы координат.

Такого сорта анализ заметно облегчает положение инженера, занятого выбором спектра. Размер роя собственных значений не позволяет заниматься каждой модой в отдельности. Желательно вмешательство «модального ветра», обеспечивающего постепенный снос полюсов, пропорциональный их «парусности» – модальному доминированию. Варьируя «силу ветра», получаем в руки контроль над ситуацией. Эти соображения несложно реализовать в программе автоматизированного выбора собственных значений, использующей формулу теоремы 2.

Алгоритмизируемая тенденция. Для непрерывных динамических систем тенденцией, положительно влияющей на улучшение свойств замкнутого объекта, по сравнению с разомкнутым, является перевод собственных значений «влево и вниз», на верхней полуплоскости, с синхронным изменением комплексно сопряженных собственных значений «влево и вверх» на нижней полуплоскости, отделяемой вещественной осью, тогда как для дискретных систем такой тенденцией может служить радиальное перемещение собственных значений к центру. Можно назначать единый или дифференцированный по подсистемам центр сжатия.

Движение точек спектра приводит к переоценке мер, модальная плоскость «живет», см. рис. 5.4.

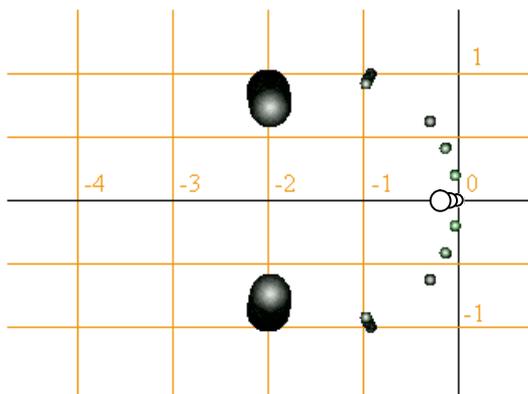


Рис. 5.4. Годографы собственных значений

Подведем некоторый итог. Алгебраический критерий управляемости, в соответствии с замыслом Калмана, является показателем реализуемости *любого* спектра. Для иных оценок он слишком груб. Отсюда возникает мысль о необходимости замены пороговых критериев управляемости и наблюдаемости более гибкими мерами системных свойств. Принцип двойственности позволяет с легкостью переносить способы нахождения мер управляемости на анализ наблюдаемости. Очевидно, что хорошо управляемые, но слабо наблюдаемые собственные значения, тоже нет смысла перемещать. Парные произведения модальных мер наблюдаемости и управляемости дают более справедливую мультипликативную оценку мер модального доминирования. Эти меры позволяют планировать и реализовывать эксперимент по изменению спектра.

ЧАСТЬ III ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматриваемые ниже системные исследования требуют несколько более пространных комментариев, чем предыдущие материалы. На I Международном конгрессе ИФАК по автоматическому управлению (Москва, 1960, см. [42]) Калман отмечал, что «несмотря на постановку и эффективное решение многих новых проблем, понимание многих фундаментальных аспектов регулирования остается неглубоким». Это понимание он связывал с разработкой так называемой «чистой» теории управления, в которой ввел новые понятия «управляемость» и «наблюдаемость», а также изложил принцип двойственности, на основании которого видно, что винеровская задача фильтрации является частным случаем теории оптимизации детерминированных систем управления.

Уместность анализа системной идентифицируемости (наблюдаемости параметров) логически вытекает из устоев этой теории, так что недостатка предложений в указанной области вроде бы и не было. К сожалению, перекос надстраиваемой с разных сторон когда-то общей теории оказался настолько большим, что понятия и критерии идентифицируемости, взятые из разных источников, приводят к диаметрально противоположным по смыслу результатам. Одна и та же система с легкостью объявляется идентифицируемой и, наоборот, не идентифицируемой, что, согласитесь, несколько неловко. Так, например, согласно Аоки [31], наблюдаемость системы не является необходимой предпосылкой ее идентифицируемости, тогда как известная теорема об 1-идентифицируемости Ли утверждает нечто прямо противоположное [52].

Курьезность ситуации усиливается тем, что первый автор ссылается на второго в качестве предшественника. Эпитетом «чистая» Калман, как следует из его основополагающего труда, хотел подчеркнуть детерминистическое начало своей концепции, освобожденное от наслоений стохастических и прочих конструкций. Ему хотелось бы сделать теорию систем классически ясной и понятной (что составляло предмет особых забот), и он тщательно подбирал математический фундамент. По Аоки же «по самой сути вещей условия идентифицируемости есть условия, обеспечивающие сходимость стохастических аппроксимаций». Системное свойство разом переключало в разряд критериев сходимости рекуррентных алгоритмов, что идет в разрез с уже имеющимися традициями. Помимо рекуррентных существуют и прямые методы, для которых сам термин «сходимость» не несет в себе смысла. В общем, определение туманно и не встраивается органично в теорию, задуманную освещать свойства систем.

Рассмотрим небольшой пример, на котором обнаруживаются принципиальные разногласия (он принадлежит Т. Фукао и сообщен Аоки в частной беседе). Перед нами объект второго порядка

$$x_i = Ax_i, \quad y_i = Cx_i, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0),$$

представляющий собой совокупность двух несвязанных подсистем первого порядка. Одна из них ненаблюдаема, поэтому ее параметр находится за пределами досягаемости, что сразу обнаруживается по критерию, приведенному еще Р. Ли, ибо $\text{Rank} [x_0 \ Ax_0] < 2$ при любом x_0 .

Но разве это настоящее препятствие для алгоритмов стохастической аппроксимации? Конечно же нет: «даже при отсутствии помех такая система ненаблюдаема, так как не удовлетворяет условию, накладываемому на ранг расширенной матрицы (наблюдаемости). Однако эта система идентифицируема», ибо коэффициент $a = y_i / y_{i-1}$ [31]. Любопытно только, откуда мы узнаем, что исследуемая система имеет кратные собственные значения? Ход мысли непостижим, однако в [53] пример, сообщенный «в частной беседе», назван «строгим математическим обоснованием наблюдаемости и идентифицируемости для детерминированных и стохастических систем». Как видно, ляпы имеют свойство размножаться.

Интерпретация условий идентифицируемости Р. Ли на случай непрерывных систем оказалось неожиданно сложной для автора университетского учебника [29], без особой нужды утяжелившего системный критерий, сформированный в духе Калмана, матричной экспонентой. Вообще, понятие и критериям идентифицируемости не везет в научной литературе, отношение к ним складывается самое плохое, небрежное. Не спасает положение опубликованный в восьмидесятых годах справочник по теории автоматического управления [30]. Предложенный здесь на стр. 59 критерий заведомо не выполняется, так как множество «совместно полностью наблюдаемых и параметрически идентифицируемых систем», согласно ему, пусто. Еще бы, идентификации подверглись параметры объекта, системное описание которого не приведено к канонической форме.

Необходимость побеседовать об условиях идентифицируемости назрела, поскольку на их счет, как видно, нет общего мнения, а есть и ошибки, и отступления от жанра, предложенного, собственно, Калманом. Поэтому критерии получают «некалманоподобные». Пусть они существуют и выражают независимые точки зрения, но надо же и порядок соблюсти в доме, построенном на общее благо и к общему удовлетворению.

ГЛАВА 6

ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

6.1. ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

Модель линейной однородной системы имеет вид

$$\dot{x} = A x,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $x_0 = x(0)$.

Определение. Линейная однородная система называется полностью идентифицируемой по вектору состояния, если при заданном векторе начальных условий x_0 матрица параметров A может быть однозначно восстановлена за конечный отрезок времени идентификации по одной временной последовательности $x = x(t)$.

Иначе, пара (A, x_0) полностью идентифицируема или идентифицируема вполне, когда множество пар (\underline{A}, x_0) , объединенных общностью интегральной кривой $x = x(t)$, $x_0 = x(0)$, вырождается в точку $\underline{A} = A$. В противном случае указанная пара неидентифицируема.

Критерий параметрической идентифицируемости напоминает критерии управляемости и наблюдаемости. Докажем это в рамках следующей теоремы об идентифицируемости.

Теорема 1. Необходимое и достаточное условие полной идентифицируемости пары (A, x_0) состоит в следующем

$$\text{Rank} [x_0, Ax_0, A^2x_0, \dots, A^{n-1}x_0] = n.$$

Матрицу в квадратных скобках будем называть матрицей идентифицируемости однородной системы и обозначать W_0 .

Доказательство. Опирается на разложение матричной экспоненты в конечную сумму слагаемых по степеням матрицы системы

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i(t) A^i,$$

где p – степень минимального аннулирующего полинома матрицы A и $\alpha_i(t)$ – коэффициенты интерполяционного полинома Лагранжа-Сильвестра для экспоненциальной функции, определенной на спектре A .

Пары (\underline{A}, x_0) , объединенные общностью интегральной кривой

$$x(t) = e^{At} x_0 = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i(t) A^i x_0$$

порождаются уравнением $(\underline{A} - A) x(t) = 0$, следующим из равенства произвольных, вычисленных в силу исходной и сравниваемой однородных систем, начальное состояние фиксировано.

Функции $\alpha_k(t)$ линейно независимыми между собой на любом интервале времени идентификации, отсюда следует

$$(\underline{A} - A) [x_0, Ax_0, A^2x_0, \dots, A^{p-1}x_0] = 0.$$

Матрица A является корнем своего минимального аннулирующего полинома ранга p . Любая ее степень, выше p , выражается через предыдущие, поэтому ранг составной матрицы в квадратных скобках совпадает с рангом матрицы идентифицируемости W_0 . Система уравнений однозначно разрешима в смысле $\underline{A} = A$ тогда и только тогда, когда W_0 невырождена. Доказательство окончено.

Следствие 1.1. Множество однородных моделей, порождаемых общностью интегральной кривой, описывается уравнением

$$\underline{A}W_0 = AW_0.$$

Любая модель \underline{A} отличного от точки $\underline{A} = A$ множества, соответственно, неидентифицируема.

Следствие 1.2. Проекция произвольной точки C (матрицы притяжения) на множество, ограниченное выбором начального условия x_0 , имеет вид

$$\underline{A} = C + (A - C) W_0 W_0^+$$

где \underline{A} – матрица, наиболее близкая к C по фробениусовой норме разности $\|\underline{A} - C\|$, W_0^+ – псевдообратная матрица. При $C = A$ имеем $\underline{A} = A$.

Следствие помогает перемещаться по множеству неидентифицируемых систем, получая поведенческих двойников исходной системы на основе матрицы идентифицируемости. Среди них существует единственная система с минимальной по норме матрицей $\underline{A} = A W_0 W_0^+$.

Следствие 1.3. Системы, у которых степень минимального аннулирующего полинома p матрицы A меньше степени ее характеристического полинома, т. е. $p \leq n$, неидентифицируемы при любом векторе начального состояния x_0 .

К неидентифицируемым относится, в частности, система с единичной матрицей $A = E$. Множество однородных систем, разделяющих любую ее интегральную кривую, отслеживает выбор начального условия $\underline{A} x_0 = x_0$, не стягиваясь в точку. Для вектора единичного радиуса получаем

$$\underline{A} = C + (x_0 - C x_0) x_0^T.$$

Пример 1. Рассмотрим однородную систему с единичной матрицей и вектором начальных условий единичного радиуса

$$\dot{x} = A x, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ее поведенческий двойник, минимально отстоящий от устойчивой системы с $C = -E$, имеет матрицу вида

$$\underline{A} = C + (x_0 - C x_0) x_0^T = 2 x_0 x_0^T - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Динамический процесс системы с вычисленной матрицей \underline{A} устойчив при повороте вектора начальных условий на 90° . Ее фазовый портрет совпадает с портретом системы $A = E$ вдоль направления x_0 , а вдоль ортогонального направления – с портретом системы $C = -E$. Проекция разделяет черты исходной и проецируемой систем независимо от выбора опорного вектора начального условия, ее фазовый портрет типа седло дрейфует вслед за x_0 , сохраняя преобладание обоим источникам.

Следствие 1.4. Фазовый поток проекции одной однородной системы на множество неидентифицируемых систем, индуцированное парой (A, x_0) , совпадает с фазовыми потоками индуктора вдоль вектора x_0 и проектора вдоль прочих направлений, отделенных от x_0 промежуточной фазой.

Совмещение устойчивых и неустойчивых систем порождает седловые точки, такие фазовые портреты встречаются в задачах оптимального управления. С точки зрения теории идентификации оптимальное управление достигается в неидентифицируемом для полной системы «объект плюс регулятор» режиме.

6.2. МОДАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ

Рассмотрим разложение вектора x_0 пары (A, x_0) в базисе собственных векторов матрицы однородной системы

$$A = VDV^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad V = (V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n),$$

где D – диагональная матрица собственных чисел, V – столбцовая матрица собственных векторов, пусть

$$x_0 = V_1 \xi_1 + V_2 \xi_2 + \dots + V_n \xi_n = V \xi, \quad \xi \in C^n.$$

Нетрудно показать, что

$$W_0 = V \operatorname{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) W_\lambda, \quad W_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Невырожденная матрица V не влияет на ранг W_0 , поэтому модальный критерий идентифицируемости сводится к виду

$$\operatorname{Rank}(\operatorname{diag}(\xi) W_\lambda) = n.$$

Определитель матрицы Вандермонда W_λ равен нулю тогда и только тогда, когда среди собственных значений есть кратные. Отсюда получаем простое решение проблемы идентифицируемости.

Пара (A, x_0) вполне идентифицируема тогда, когда вектор начального состояния возбуждает все собственные движения однородной системы, для некратных собственных значений $\operatorname{Rank} W_0 = \operatorname{Rank}(\operatorname{diag}(\xi))$. У систем с кратными собственными значениями $\operatorname{Rank} W_0 \leq \operatorname{Rank} W_\lambda < n$, соответствующие собственные векторы определены с точностью нескольких произвольных постоянных и свободно избираются в пределах двумерных и более подпространств, в том числе, ортогонально x_0 . Такие системы заведомо неидентифицируемы. Этот вывод иллюстрирует следствие 1.3 теоремы 1.

Модальный аналог следствия 1.1, помогающий находить множество однородных моделей неидентифицируемых систем, состоит в следующем. Собственные числа и собственные векторы однозначно определяют матрицу. Если убрать из уравнений модального разложения A ряд собственных векторов (и собственных чисел), не связанных с проекциями x_0 , то оставшаяся часть уравнений, подобно условию $\underline{A}W_0 = AW_0$, определит выбор \underline{A}

$$\underline{A}V_1 = \lambda_1 V_1, \underline{A}V_2 = \lambda_2 V_2, \dots, \underline{A}V_k = \lambda_k V_k, k < n.$$

Для анализа матриц A сложной структуры модальное описание исследуемой проблемы становится громоздким. Смысл формулировки условий ее разрешимости сохраняется, во главе угла остается возбуждение всех модальных движений, однако проекции на собственные и жордановы векторы, в общем, находятся неоднозначно. В таком случае лучший иллюстративный материал дает теория циклических инвариантных подпространств, помогающая проще обозначить границы области «неидентифицируемости».

Пример 2. Вернемся к однородной системе с единичной матрицей и произвольным вектором начальных условий

$$\dot{x} = Ax, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

В данном случае собственные значения кратные $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Соответствующие им собственные векторы избираются произвольно, в том числе, параллельно и ортогонально вектору x_0 . Доопределим $V_1 = x_0$, отсюда условие для нахождения множества неидентифицируемых систем $\underline{A}V_1 = \lambda_1 V_1$ сводится к виду $\underline{A}x_0 = x_0$. Это условие выводилось ранее из других соображений. Здесь оно иллюстрирует модальный подход, позволяющий указать вид общей для систем с матрицей \underline{A} интегральной кривой $x(t) = e^t x_0$.

Фазовый портрет системы с единичной матрицей A симметричен. Он образован радиальными лучами, исходящими из центра фазовой плоскости. Каждый луч, казалось бы, несет информацию об обоих собственных значениях, однако в силу кратности их влияние невозможно разделить между собой. Каков бы ни был вектор начального условия, в силу симметрии фазового потока с равным успехом можно считать, что луч образован одной причиной, возбуждено только одно собственное движение, такая система неидентифицируема. В общем случае, по тем же причинам однородная система заведомо неидентифицируема, если ее матрица имеет хотя бы две жордановы клетки с равными собственными значениями.

6.3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ

Практическая сторона дела в вопросе об идентифицируемости состоит в возможности проверить критерий еще до того, как нам стали известны параметры однородной системы.

Теорема 2. Ранг матрицы идентифицируемости W_0 однородной системы совпадает с рангом матрицы, построенной на выборке динамического процесса $W_\tau = [x(t_0), x(t_0+\tau), \dots, x(t_0+(n-1)\tau)]$; критерий идентифицируемости можно записать в двух эквивалентных формулировках

$$\text{Rank } W_0 = n \text{ или } \text{Rank } W_\tau = n.$$

Доказательство. Отсчеты, образующие столбцы матрицы W_τ , попарно связаны между собой матричной экспонентой $\Phi = e^{A\tau}$, т. е.

$$W_\tau = [x(t_0), \Phi x(t_0), \Phi^2 x(t_0), \dots] = [x_0, \Phi x_0, \Phi^2 x_0, \dots, \Phi^{(n-1)} x_0].$$

В теории матриц последовательностям $\xi, A\xi, A^2\xi, \dots, A^{n-1}\xi$ уделено большое внимание. Матрицы, порождающие такой базис, называются циклическими. Известно, что циклические инвариантные подпространства матричной экспоненты Φ совпадают с циклическими инвариантными подпространствами матрицы A . Это означает, что в анализе ранга матрицы, построенной на циклической последовательности $\xi, A\xi, A^2\xi, \dots, A^{n-1}\xi$, матрицы A и Φ взаимозаменяемы при любом $\xi \in \mathbb{R}^n$, в том числе при $\xi = x_0$. Доказательство теоремы окончено.

Следствие 2.1. Вычислительные методы идентификации оперируют матрицей метода наименьших квадратов $P = W_\tau W_\tau^T$, построенной для выборки протяженности равной или большей n . При отсутствии шумов измерений ранг этой матрицы также служит критерием идентифицируемости:

$$\text{Rank } P = n.$$

Более глубоким следствием той же теории является то, что интегральная кривая однородной системы не покидает циклическое инвариантное подпространство L , образованное вектором x_0 . В то же время, она не входит во вложенные циклические инвариантные подпространства, покинуть которые будет не в состоянии. Ранг матрицы идентифицируемости можно установить по выборке динамического процесса с произвольным шагом, т. е. $\text{Rank } W_0 = \text{Rank } [x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_{n-1})] = \dim L$.

6.4. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ

Теорема об идентифицируемости сформулирована применительно к однородной системе, параметры которой полностью неизвестны. Вместе с тем, знание части строк не облегчает задачу восстановления остальных элементов матрицы, поскольку уравнение $(\underline{A}-A)W_0=0$ распадается на n независимых подсистем $(\underline{a}_i - a_i)W_0=0, i=1..n$. Условие идентифицируемости пары (A, x_0) адекватно условию идентифицируемости пары (a_i, x_0) , содержащей любую из строк A . Например, правомерно анализировать условие идентифицируемости однородной системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

при помощи общего критерия. Несколько более сильным утверждением является положение о применимости общего критерия к задаче, в которой матрица системы задана с точностью до n параметров $A=A(a), a \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 3. Полностью идентифицируемая однородная система невырожденным преобразованием координат $z = W_0^{-1}x$ приводится к каноническому виду идентифицируемости

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 1 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство теоремы следует логике известного построения фробениусовой формы матрицы (или, иначе называя, сопровождающей матрицы для характеристического полинома A) подобным преобразованием $T^{-1}AT$ с произвольной невырожденной матрицей $T=[\xi, A\xi, A^2\xi, \dots, A^{n-1}\xi]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Для полностью идентифицируемой системы матрица преобразования заведомо существует, в частности, при $\xi = x_0$, получаем $T = W_0$, причем вектор $x_0 = W_0 z_0$. Доказательство окончено.

Следствие 1.3 из теоремы 1 указывает на то, что каноническая форма существует не всегда. Примером «вещи в себе» с единичной матрицей $A=E$ является система из примера 1. Матрица $T=[\xi, E\xi, \dots, E^{n-1}\xi]$ вырождена при любом выборе $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Следствие 3.1. Вектор неизвестных параметров $A=A(a)$, $a \in \mathbb{R}^n$, составляющий крайний правый столбец матрицы канонической формы, равен производной n -го порядка в новом базисе $a = z_0^{(n)}$.

Легко проверить, что орты канонического базиса однородной системы образуют вектор начального состояния и $n-1$ его производные

$$T = W_0 = [x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)}].$$

Это означает, что в новом базисе последовательность производных вектора состояния в начальной точке совпадают со столбцами единичной матрицы, производная n -го порядка совпадает с параметрами

$$\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 1 & \dots & 0 & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^{(n)}(0) \\ z_2^{(n)}(0) \\ \vdots \\ z_n^{(n)}(0) \end{pmatrix}.$$

Задачу определения инвариантов формы $A=A(a)$ непосредственно по виду динамического процесса раскрывает следующая теорема.

Теорема 4. Полностью идентифицируемая однородная система невырожденным преобразованием координат $z = W_\tau^{-1}x$ приводится к каноническому виду

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau} \ln \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 1 & \dots & 0 & a_{2n} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $W_\tau = [x(t_0), x(t_0+\tau), \dots, x(t_0+(n-1)\tau)]$.

Доказательство теоремы 4 родственно доказательству теоремы 3, адаптированному к дискретной системе $x_{k+1} = \Phi x_k$. Обратный переход от матричной экспоненты дает логарифм. Подробно останавливаться на этом не будем, в данном случае обращает внимание на себя следствие, указывающее на способ идентификации систем.

Следствие 4.1. Вектор неизвестных параметров $A=A(a)$, $a \in \mathbb{R}^n$, составляющий правый столбец матрицы канонической формы, равен вектору состояния в новом базисе на n -ом шаге $a = z(t_0+n\tau)$.

6.5. ОБЛАСТЬ НЕИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ

Критерий идентифицируемости локализован относительно вектора начального состояния x_0 . Развернутое представление об условиях идентифицируемости однородных систем дает изучение областей «неидентифицируемости».

Определение. Областью неидентифицируемости \mathbb{L} назовем ту область пространства состояний, принадлежность к которой вектора начального состояния свидетельствует о неидентифицируемости пары (A, x_0) .

Утверждение. Область неидентифицируемости \mathbb{L} агрегирует в себе нуль и совокупность всех нетривиальных циклических инвариантных подпространств матрицы A .

Напомним, что подпространство L линейного пространства R^n называется инвариантным относительно матрицы A , если для каждого вектора x из L его образ Ax также принадлежит L . Структура инвариантных подпространств хорошо исследована в матричной алгебре, в частности, у матриц с простым спектром инвариантные подпространства образуются линейными оболочками собственных векторов, на которые имеет проекции вектор x_0 . Сами собственные векторы являются примерами одномерных инвариантных подпространств. Нулевое подпространство и все пространство называются тривиальными инвариантными подпространствами.

Векторы $\xi, A\xi, A^2\xi, \dots, A^{k-1}\xi$ образуют базис циклического инвариантного подпространства $L \subset R^n$, где k – степень минимального аннулирующего полинома вектора $\xi \in R^n$, т. е. максимальная длина цепочки линейно независимых векторов, индуцированной ξ . Степень p минимального аннулирующего полинома матрицы A ограничивает размерности возможных циклических инвариантных подпространств. Отсюда непосредственно следует, что $Rank W_0 = k \leq p \leq n$.

В силу особенностей разложения матричной экспоненты интегральная кривая однородной системы не выходит за пределы L циклического инвариантного подпространства вектора x_0 . В то же время, она не входит во вложенные циклические инвариантные подпространства, покинуть которые нельзя по той же причине. Ранее отмечалось то, что ранг матрицы идентифицируемости можно установить по выборке динамического процесса, т. е. $Rank W_0 = Rank [x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_{n-1})] = dim L \leq dim \mathbb{L}$.

Тем самым, вопрос о построении области неидентифицируемости \mathbb{L} , поглощающей совокупность начальных состояний и, как видно, процессов, по которым матрица A не может быть идентифицирована, сводится к построению всех возможных нетривиальных циклических инвариантных подпространств $L \subset \mathbb{L} \subseteq R^n$.

6.6. СТРУКТУРНО НЕИДЕНТИФИЦИРУЕМЫЕ ОБЪЕКТЫ

Определение. Система, область неидентифицируемости которой охватывает все пространство состояний $L = R^n$ называется структурно неидентифицируемой.

Следствие 1.3 из теоремы 1 свидетельствует о том, что линейная динамическая система структурно неидентифицируема в том и только в том случае, когда степень минимального аннулирующего полинома p матрицы A меньше степени ее характеристического полинома n .

В этом случае из двух тривиальных циклических инвариантных подпространств уцелевает только одно – нулевое. Все пространство оказывается поделенным между несчетным количеством нетривиальных циклических инвариантных подпространств, размерности равной или меньшей, чем p . Их совокупность, область неидентифицируемости L , как лоскутное одеяло покрывает R^n .

Какой бы вектор начального состояния мы ни брали, он всегда оказывается принадлежащим частному циклическому инвариантному подпространству, и интегральная кривая, раскручиваясь в пределах ограниченной области, дает $Rank [x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_{n-1})] < n$.

Фазовый поток структурно неидентифицируемой системы распадается на бесконечное количество «струй», каждую невозможно покинуть, а значит, нельзя судить о потоке в целом. Изменить положение переносом начальных условий нельзя, поскольку поток однороден.

Скрытность структурно неидентифицируемых систем не является все же фатальной. Для их идентификации необходим не один, а несколько запусков динамического процесса из независимых точек. После того, как интегральные кривые захватят собой все пространство, система становится идентифицируемой. Дополнительное количество независимых запусков динамического процесса, гарантирующее идентифицируемость объекта, оценивается разностью $n-p$.

Один из признаков циклической матрицы A , у которой $p=n$, состоит в различии ее собственных значений. Отсюда можно утверждать, что большинство однородных систем «вещью в себе» не являются, они идентифицируемы подходящим назначением вектора x_0 . Наконец, любую систему можно идентифицировать по n запускам с линейно независимыми между собой векторами начальных условий.

Если изменять начальные условия процесса по той или иной причине нельзя, приходится отделять идентифицируемую часть однородной системы. Механизм отделения основан на преобразованиях, употребляемых при построении канонических форм.

6.7. ОТДЕЛЕНИЕ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОЙ ЧАСТИ

Отделение идентифицируемой части объекта родственно построению канонической формы идентифицируемости по нескольким запускам процесса с начальными условиями x_0, x_1, x_2, \dots , не следует смешивать эти обозначения с былой нумерацией компонент вектора состояния.

Блочная каноническая форма строится на основе комбинированной матрицы идентифицируемости однородной системы

$$T = [x_0, Ax_0, A^2x_0, \dots, A^{k-1}x_0, x_1, Ax_1, A^2x_1, \dots, x_2, Ax_2, A^2x_2, \dots].$$

полученной сочленением фрагментов усеченных системных матриц. Ясно, что каковы бы ни были свойства объекта, всегда можно построить невырожденную матрицу T .

Произвольная однородная система невырожденным преобразованием координат $z = T^{-1}x$ приводится к блочному каноническому виду

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_k \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1k} & * & \dots & * \\ 1 & \dots & 0 & a_{2k} & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{kk} & * & \dots & * \\ \hline 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Механизм построения канонических форм достаточно гибок для того, чтобы не применять дополнительные запуски.

Левый верхний блок канонической формы можно получить непосредственно по прямоугольной матрице $T = [x_0, Ax_0, A^2x_0, \dots, A^{k-1}x_0]$ полного ранга k , применяя вместо инверсии операцию псевдообращения T^+AT . Адекватная замена переменных $x = Tz$ проецирует движение усеченной системы в исходный базис. Таким образом строятся канонические формы структурно неидентифицируемых систем.

Аналогичные преобразования, выполненные с усеченной матрицей идентифицируемости дискретной системы $W_t = \text{Rank} [x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_{n-1})]$ при равноотстоящем шаге по времени, приводят к сходному делению. Внешний вид канонической формы в таком случае сохраняет особенности, отмеченные ранее у вполне идентифицируемой системы, включая возможность идентификации параметров по процессу.

6.8. ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

Мы вплотную подошли к вопросу идентифицируемости по состоянию линейных динамических систем общего вида.

Пусть модель линейной неоднородной системы имеет вид

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $x_0 = x(0)$; $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор управления.

В теории дифференциальных уравнений существует взаимосвязь между решениями неоднородной и соответствующей ей однородной систем уравнений, а именно: общее решение первой состоит из общего решения второй и какого-либо частного решения неоднородной системы. Вопрос об идентифицируемости систем общего вида допускает аналогичную трактовку вплоть до привлечения матрицы идентифицируемости однородной системы в составной критерий.

Вместе с тем, само понятие идентифицируемости неоднородной системы сложнее предыдущего. Как показано, интегральная кривая однородной системы в любом своем фрагменте несет заключительную информацию об объекте, включая условия идентифицируемости. В качестве критерия в равной мере можно привлекать системную матрицу или матрицу выборочных значений процесса. У неоднородной системы информативность интегральной кривой зависит от активности входного воздействия.

Следует учитывать, что ближайшие аналоги рассматриваемого системного свойства, понятия управляемости и наблюдаемости, описывают потенциальные свойства системы, а не особенности строения конкретных регуляторов или наблюдателей. С этой точки зрения полная идентифицируемость, являясь атрибутом системы, а не сигнала, не должна зависеть от способа формирования тестового воздействия. Будучи потенциальным свойством, она гарантирует возможность оценивания параметров при должной активности на входе.

Активные сигналы, реализующие потенциальное свойство идентифицируемости, назовем возбуждающими. К ним относятся классические импульсное и ступенчатое воздействия. По характеру влияния на интегральную кривую, импульс в виде дельта функции на входе адекватен дополнительному запуску процесса, поскольку обеспечивает перенос вектора состояния на расстояние, определяемое вектор столбцом матрицы входа. Это известное в теории управления свойство используется при моделировании импульсных весовых функций заменой импульса на задание необходимого вектора начального состояния.

Блочная матрица идентифицируемости однородной системы по нескольким запускам процесса включает в себя системные матрицы идентифицируемости по каждому запуску отдельно. В данном случае роль таких матриц будет играть, очевидно, матрица управляемости. Тем самым мы подходим к простому обобщению известных ранее свойств, наследующему традицию выделения влияния однородной части системы в общем решении задачи. Для пользы дела приведем сначала базовое определение идентифицируемости неоднородной системы, а затем дадим окончательную формулировку критерия.

Определение. Линейная неоднородная система называется полностью идентифицируемой по вектору состояния, если при заданном векторе начальных условий x_0 существует входной сигнал, при котором матрицы ее параметров A и B могут быть однозначно восстановлены за конечный отрезок времени идентификации по одной временной последовательности $x = x(t)$. Иначе, пара $((A, B), x_0)$ полностью идентифицируема или идентифицируема вполне, когда множество пар $((\underline{A}, \underline{B}), x_0)$, объединенных общностью интегральной кривой $x = x(t)$, $x_0 = x(0)$, вырождается в точку $\underline{A} = A$, $\underline{B} = B$. В противном случае указанная пара неидентифицируема.

Теорема 3. Необходимое и достаточное условие полной идентифицируемости пары $((A, B), x_0)$ состоит в следующем

$$\text{Rank} [W_0 \ W_B] = n,$$

где W_0 – матрица идентифицируемости соответствующей однородной системы, W_B – матрица управляемости $[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$.

Доказательство этой теоремы опирается на доказательство соответствующей теоремы для однородной системы и на приведенные ранее особенности действия разрывных тестовых сигналов, подаваемых на различные входы системы в различные моменты времени, разделенные между собой конечными отрезками времени идентификации. Разрывные импульсные воздействия позволяют оценить матрицу входа, а принцип суперпозиции гарантирует отделимость действия каждого из воздействий на систему, сводя тем самым, тестовый сигнал к серии испытаний однородной системы запусками из различных начальных условий. Доказательство окончено.

Общая теория систем включает критерий управляемости как необходимое условие минимальности модели. Неминимальная модель содержит неуправляемые части, которые могут быть идентифицированы ввиду влияния вектора начального состояния. Таким образом, системное свойство полной идентифицируемости вполне самостоятельное понятие.

Рассмотрим вопрос идентифицируемости линейных динамических систем в еще более общей его постановке.

После того, как удалось показать, что системные свойства и критерии идентифицируемости и управляемости объединяются при решении вопроса идентифицируемости неоднородных систем, велик соблазн задействовать системное свойство наблюдаемости для объектов вида

$$\dot{x} = A x + B u; \quad y = C x,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, пусть $x_0 = x(0)$; $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор входа; $y \in \mathbb{R}^l$ – вектор выхода. Шансы на это дает следующая трактовка проблемы идентифицируемости систем по выходу.

Определение. Линейная неоднородная система называется полностью идентифицируемой по вектору выхода, если при заданном векторе начальных условий x_0 существует входной сигнал, при котором матрицы ее параметров A, B, C могут быть однозначно восстановлены за конечный отрезок времени идентификации по одной временной последовательности $y = y(t)$ с точностью до инвариантов канонической формы наблюдаемости.

Иначе, пара $((A, B, C), x_0)$ полностью идентифицируема или идентифицируема вполне, когда множество пар $((A, B, C), x_0)$, объединенных общностью интегральной кривой $y = y(t)$ при $x_0 = x(0)$, вырождается в точку в базисе инвариантов канонического представления наблюдаемости. В противном случае указанная пара неидентифицируема по выходу.

В этом определении приходится учитывать избыточность расширенного математического описания систем, по параметрам. Известно, что эквивалентными преобразованиями, а, проще говоря, масштабированием вектора состояния можно менять содержимое матриц A, B, C , так что ставить вопрос об идентифицируемости их параметров не имеет смысла. Другое дело, когда структуры матриц A, B, C фиксированы и число входящих в них коэффициентов, инвариантов эквивалентного преобразования систем, сведено до минимума.

Теорема 4. Необходимое и достаточное условие полной идентифицируемости пары $((A, B, C), x_0)$ состоит в следующем

$$\text{Rank} [W_0 \ W_B] = n, \quad \text{Rank} W_C = n,$$

где W_0, W_B – системные матрицы идентифицируемости и управляемости, W_C – системная матрица наблюдаемости $[C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T]$.

Доказательство теоремы не проблематично. Параметры матрицы A системы можно оценивать в рамках обычной в таких случаях блочной фробениусовой формы, соответствующей единичным ортам, составляющим содержание фиксированной матрицы выхода, т. е.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_k \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & | & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \dots & \vdots \\ & 0 & 0 & \dots & 1 & | & 0 & \dots & 0 \\ a_{k1} & a_{2k} & \dots & a_{kk} & | & * & \dots & * \\ * & \dots & \dots & * & | & * & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots & | & \vdots & \dots & \vdots \\ * & \dots & \dots & * & | & * & \dots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Существование подобного канонического представления гарантируется свойством наблюдаемости. Разрывные входные импульсные сигналы теоретически снимают проблему оценивания вектора состояния, поскольку они равны нулю на основном протяжении времени идентификации. Вектор состояния канонической формы наблюдаемости однородной системы составляют выходные сигналы и их производные в количествах, определяемых размерами фробениусовых клеток. Таким образом, проблема идентифицируемости системы по выходу сводится к проблеме идентифицируемости системы по состоянию, критерий разрешимости последней задачи уже известен. Доказательство окончено.

Анализ потенциальных свойств систем важен постольку, поскольку раскрывает причины возможного расхождения гарантированно «сходящихся» алгоритмов идентификации, к которым относится известный рекуррентный метод наименьших квадратов. Нужно осознать, что причина некорректного поведения алгоритма может скрываться не в его внутренней ущербности, а в условиях применения квалифицированного инструмента, что называется, не по прямому назначению. Гарантии вычислительных методов не распространяются на сингулярные задачи.

Рассмотренные выше теоремы и критерии дают отчетливую перспективу вопроса оценивания параметров. Ни в коем случае не следует воспринимать условия реализации этих теорем как непосредственное руководство к действию. В особенности это касается импульсных тестирующих воздействий, привлекаемых исключительно в целях упрощения доказательств. Наличие сугубо теоретического решения вопроса об идентифицируемости систем не снимает трудностей практического воплощения алгоритмов параметрического оценивания в жизнь.

6.9. ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Критерии управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем сформулированы как для стационарных, так и для нестационарных систем. Естественно поэтому продолжить тему идентифицируемости переходом к классу нестационарных систем, для которого об объекте известно только то, что его параметры, являясь произвольными функциями времени, входят в состав системы линейных нестационарных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, пусть $x_0 = x(t_0)$; $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор входа; $A(t)$, $B(t)$ – матрицы нестационарных параметров; $t \geq t_0$ – время, будем считать, что $t_0=0$.

Эта задача помогает раскрыть любопытное обстоятельство, придающее исследованию системных свойств стационарных систем самостоятельный характер. Раскроем его на следующем примере.

Рассмотрим сначала класс линейных нестационарных однородных динамических систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x_0 = x(0).$$

Возникает вопрос, возможно ли однозначное восстановление параметров $A(t)$ системы при наличии полной информации о динамическом процессе $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$. В данном случае $\Phi(t, t_0)$ – фундаментальная матрица системы. Ответ, в общем, отрицательный. Сформулировать причины параметрической неидентифицируемости нестационарных систем можно следующим образом.

Теорема 5. Любая система с матрицей $\hat{A}(t)$, отличной от матрицы исходной системы, порождает адекватный ей динамический процесс при данном начальном условии, если они отличаются между собой аддитивной составляющей

$$\hat{A}(t) = A(t) + K(t)(E - x(t)x(t)^+),$$

где $K(t)$ – произвольная матрица; $x(t)$ – вектор решения, найденного в силу исходной системы; $x(t)^+$ – псевдообратный по отношению к нему вектор, т.е. $x(t)^+ = x(t)^T / x(t)^T x(t)$ (и при $x(t)=0$ имеем $x(t)^+ = 0$).

Доказательство производится прямой подстановкой модифицированной при помощи аддитивной составляющей матрицы непосредственно в уравнение исходной системы, откуда видно, что уравнение это превращается в тождество, т. к. $\dot{x}(t) - x(t)x(t)^+x(t) = 0$.

Параметрическая идентификация нестационарных систем невозможна. Вместе с тем, к ним часто применяются методы, ориентированные на решение задачи идентификации так, как если бы изменяющиеся во времени параметры были постоянны [51].

Квазиидентифицируемость. Рассмотрим класс нестационарных однородных систем, которому ставится в соответствие класс стационарных систем аналогичного вида

$$\dot{x} = A x, \quad x_0 = x(0).$$

Определение. Линейная нестационарная система называется квазиидентифицируемой (следуя Калману – вполне идентифицируемой) в момент времени t_0 на заданном отрезке времени идентификации протяженности T тогда, когда ей в соответствие может быть поставлена только одна стационарная система, близкая к исходной в смысле минимума квадрата нормы разности векторов их фазовых скоростей, т. е.

$$\int_0^T (A(t)x - Ax)^T (A(t)x - Ax) dt \rightarrow \min$$

Рассматривая линейные нестационарные системы, Р. Калман ввел для оценки свойств управляемости и наблюдаемости грамианы

$$G_B = \int_0^T (\Phi(t, t_0) B B^T \Phi(t, t_0)^T) dt; \quad G_C = \int_0^T (\Phi(t, t_0)^T C^T C \Phi(t, t_0)) dt.$$

В один ряд с ними можно поставить грамиан свободного движения

$$G_0 = \int_0^T (\Phi(t, t_0) x_0 x_0^T \Phi(t, t_0)^T) dt.$$

Его роль в теории систем точно такая же, как и у двух предыдущих грамианов. Линейная нестационарная динамическая система квазиидентифицируема тогда и только тогда, когда матрица G_0 (грамиан идентифицируемости) положительно определена.

Пример 3. В литературе по адаптивным системам встречаются кривые дрейфа коэффициентов модели объекта, сопровождаемые кривыми изменения их оценок рекуррентными алгоритмами параметрической идентификации. Рассмотрим нестационарную систему с матрицей

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 \cos(t) & 10 \sin(t) \\ -10 & 0 & 10 \sin(t) & -10 \cos(t) \\ -10 \cos(t) & -10 \sin(t) & 0 & 10 \\ -10 \sin(t) & 10 \cos(t) & -10 & 0 \end{pmatrix},$$

порождающую, в частности, динамический процесс

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -0.4 & 0.4 & 2.5 & 2.5 \\ 0.4 & 0.4 & -2.5 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(15t) \\ \cos(15t) \\ \sin(14t) \\ \cos(14t) \end{pmatrix}.$$

Нестационарная система и ее аналитическое решение взяты из справочника Камке [22]. Нетрудно проверить, что грамиан идентифицируемости данной системы имеет полный ранг на любом отрезке времени идентификации. Более того, отрезку времени идентификации любой протяженности соответствует одна и та же стационарная система, которая аналитически точно аппроксимирует решение с матрицей A , отличающейся от матрицы A_0 с «замороженными» коэффициентами (взятыми на начальном участке идентификации):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -11 & 0 & 10 \\ 11 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 10 \\ -10 & 0 & -10 & 0 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & -10 \\ -10 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & -10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя аппроксимирует интегральную кривую нестационарной системы с быстро прогрессирующей погрешностью. Этим подчеркивается, что незначительность изменения параметров по сравнению с быстрым изменением переменных состояния вовсе не приводит, как это принято считать, к сходимости распространенных процедур параметрического оценивания к «истинным» оценкам параметров. В общем случае имеет место идентифицируемость совсем другого указанного выше типа.

ГЛАВА 7 АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ

7.1. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Обширный класс алгоритмов параметрической идентификации опирается на предположение о линейной связи искоемых оценок параметров с исходными данными. Линейность самой модели объекта не имеет значения, пример дает уравнение $ax^2 = 1$. При известном x найти параметр несложно, поскольку уравнение связи линейно относительно a . Линейные уравнения связи порождают частотные, дискретные и прочие методы описания систем, не следует искусственно сужать область применения обсуждаемых ниже алгоритмов частными моделями, носящими иллюстративный характер.

Технику составления уравнений идентификации обычно демонстрируют на той системе, что проще прочих, например, пусть

$$y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + b_1 u_{k-1} + b_2 u_{k-2} \dots$$

Выделим идентифицируемые параметры в вектор $\theta = (b_1, a_1, \dots)^T$, тогда уравнение связи переписывается так

$$Z_k^T \theta = y_k,$$

где $Z_k = (u_{k-1}, y_{k-1}, \dots)^T$ – регрессор, содержащий выборку данных.

Накапливая выборки измерений, получим матричное уравнение параметрического оценивания

$$Z \theta = Y, \quad Y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_k)^T, \quad Z = [Z_1 \ Z_2 \ \dots \ Z_k]^T.$$

При составлении регрессора следует учитывать, что не все параметры модели одинаково ценны. Например, коэффициенты a_1, b_1 имеют смысл считать более важными, чем параметры при дальних членах регрессии, коэффициент b_1 несколько более важным, чем a_1 , поскольку он описывает связь выхода с входом неавтономной системы. Если «отстричь» b_k , то уж решительно никак нельзя объяснить действие управления.

В вычислительной математике есть методы перестановки элементов, но многие процедуры идентификации не обладают этим полезным качеством. Правильное ранжирование облегчает построение рекурсивных алгоритмов, когда размерность объекта заранее неизвестна и ее предполагается определять, наращивая размер вектора параметров и оценивая невязку. Невязкой называется разность $\xi_k = Z_k \theta - y_k$.

Действие шумов приводит к весьма противоречивым последствиям. С одной стороны, если модель объекта верна, то система уравнений идентификации должна давать одну или даже множество оценок параметров. С другой стороны, в силу невязок она становится несовместной, решить ее в строгом математическом смысле нельзя. Как ни странно, дистанция между недоопределенной и переопределенной задачами бывает невелика, об этом свидетельствует пример двух систем уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \xi \end{pmatrix},$$

которые отличаются между собой сколь угодно малой невязкой ξ . Как видно, первая система имеет неограниченное количество решений, тогда как вторая не имеет решения вообще. Противоположности нередко сходятся, поэтому имеет смысл поставить вопрос наследования несуществующего решения у близкой системы. В линейной алгебре эта парадоксальная проблема осознана давно, есть хорошо разработанный подход.

Напомним, что еще Гаусс предложил «решать» нерешаемую, в строгом смысле этого слова, задачу изменением ее постановки со стиранием границы между системами недоопределенными и переопределенными. Трансформация требования поиска решения системы линейных алгебраических уравнений к минимизации квадрата нормы разности ее левой и правой частей $\|Z\theta - Y\|^2 = (Z\theta - Y)^T(Z\theta - Y)$ достигает поставленной цели. Эта идея носит название метод наименьших квадратов (МНК).

Градиент оптимизируемой квадратичной функции аналитически записывается в виде

$$\text{grad} \|Z\theta - Y\|^2 = 2Z^T(Z\theta - Y)$$

Базовые уравнения МНК следуют из равенства нулю градиента. В итоге задача сводится к всегда имеющей решение системе, называемой системой нормальных уравнений (СНУ), вида

$$P\theta = R, \quad P = Z^T Z, \quad R = Z^T Y.$$

В отличие от исходной системы, система нормальных уравнений совместна всегда: она может иметь одно, или множество решений. Квадратная матрица P – симметричная. Ее размер соответствует количеству искомым параметрам независимо от объема выборки данных.

7.2. РЕКУРРЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ

Прямой метод наименьших квадратов. Наиболее простой вид рекурсии образуется пересчетом матриц системы нормальных уравнений, имеющих, согласно приведенным выше формулам, вид

$$P = Z^T Z = \sum_{i=1}^k Z_i Z_i^T, \quad R = Z^T Y = \sum_{i=1}^k Z_i y_i.$$

Они описывают сжатие данных с потерей части несущественной, с точки зрения МНК, информации, содержащейся в невязках измерений. Вынесем объем выборки данных в качестве индекса матриц, тогда справедливо следующее рекуррентное соотношение

$$P_k = P_{k-1} + Z_k Z_k^T, \quad R_k = R_{k-1} + Z_k y_k.$$

На каждом шаге рекуррентной идентификации, вслед измерениям матрицы корректируются, затем отыскивается решение $\theta_k = P_k^{-1} R_k$.

При составлении такого рода алгоритмов создается впечатление их неограниченной памяти. Но, как и в жизни, запомнить все нельзя, начинаются неприятности переполнения. Матрица P_k образована суммой положительно определенных матриц, это означает, что норма ее шаг за шагом растет. Норма обратной к ней матрицы, соответственно, убывает, создавая в перспективе проблемы вычислительного характера.

Для того, чтобы ограничить память процесса идентификации, применяют экспоненциальное взвешивание

$$P_k = w P_{k-1} + (1-w) Z_k Z_k^T, \quad R_k = w R_{k-1} + (1-w) Z_k y_k,$$

где коэффициент $0 < w < 1$.

В матричном виде такой обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК) выглядит более эстетично

$$P \theta = R, \quad P = Z^T W Z, \quad R = Z^T W Y.$$

При помощи весовых коэффициентов образуется плавающее окно «внимания» метода. Нелегко решить, впрочем, когда это внимание надо сосредоточивать на той или иной части выборки. Иными словами, весовые коэффициенты – это инструмент, действенность которого зависит только от того, в чьих руках он окажется.

Рекуррентный метод наименьших квадратов (РМНК). Он основан на следующей лемме об инвертировании суммы матрицы с некоторым произведением $(P+ABC)^{-1} = P^{-1} - P^{-1}A(CP^{-1}A+B^{-1})CP^{-1}$.

Согласно этой лемме матрицу системы нормальных уравнений можно инвертировать только один раз или задать обратной матрице некоторое начальное значение

$$P_0^{-1} = \xi^{-1} \text{diag} (1 \ 1 \ \dots \ 1),$$

где ξ – достаточно малое число (обычно 0.001). Каждое следующее измерение наращивает матрицу аддитивной составляющей $Z_k^T Z_k$, отсюда легко выводится алгоритм

$$P_k^{-1} = P_{k-1}^{-1} - \gamma_k p_k^T, \quad \theta_k = \theta_{k-1} + \gamma_k (y_{k-1} - Z_k^T \theta_{k-1}),$$

где $p_k = P_{k-1}^{-1} Z_k$, $\gamma_k = p_k / (1 + Z_k^T p_k)$.

РМНК обоснован для узкого класса невырожденных задач, в этом его основной недостаток. Достоинством метода является его универсальность. В вычислительной структуре РМНК нет цепочек, приводящих к останову (делению на ноль). Поэтому результаты применения рекуррентного и прямого алгоритмов отличаются между собой. Матрица P_0 невырождена, этого запаса прочности теоретически хватает алгоритму на все итерации. Практически же ограниченная разрядная сетка машины служит источником помех, приводящих к сканированию оценки по множеству возможных моделей, если задача к тому располагает. Поведение выхода РМНК можно смело уподобить тогда катанию шарика по сковородке. Вектор γ_k играет роль коэффициента усиления невязок измерений.

Градиентный метод. В качестве вектора, указывающего направление изменения оценки решения можно использовать антиградиент квадратичной функции МНК, что порождает рекурсии вида

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \gamma_k \text{grad} \| Z \theta_{k-1} - Y \|^2 / 2 = \theta_{k-1} + \gamma_k (R_k - P_k \theta_{k-1}),$$

где Z , Y – матрицы, содержащие последовательно увеличиваемую выборку результатов измерений.

В этом подходе скалярный коэффициент γ_k контролирует действие невязок. На вырожденных участках идентификации его следует уменьшать. Добиться баланса между эффективностью итераций и ослаблением влияния на них шумов измерений нелегко.

Метод Качмажа. Существует радикальный способ избавиться от проблем, связанных с вырожденностью системы уравнений параметрической идентификации – вообще ее не решать. Можно рассматривать каждое уравнение в отдельности, не сводя их вместе в систему. Эта идея рассматривалась Качмажем еще в 1937 году ([30], стр. 507).

В этом алгоритме используется путь последовательного проецирования каждого найденного решения на множество возможных решений следующего уравнения

$$\theta_k = \theta_{k-1} + Z_k (y_k - Z_k^T \theta_{k-1}) / Z_k^T Z_k.$$

Путь плох, собственно, тем, что решает систему уравнений только в том случае, когда проецирование производится последовательно во взаимно ортогональных направлениях. На случай плохо обусловленных задач цепочка проецирований замирает, не доходя до решения. У этого замирания есть одно положительное качество. Метод не спешит делать оценку лучше, но зато он и не ухудшает ее: подход гарантирует монотонное приближение к точке «истинного» решения при отсутствии возмущений.

Процесс итераций можно еще более стабилизировать укорачиванием шага алгоритма, вводя коэффициент $\eta < 1$ как множитель при втором слагаемом. Такого рода идея использована в алгоритме «полоска» метода рекуррентных целевых неравенств В.А. Якубовича (смысл названия состоит в том, что проецирование осуществляется в область вокруг множества возможных решений, в «полоску»), здесь

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \gamma_k (y_k - Z_k^T \theta_{k-1}), \quad \gamma_k = \eta Z_k / Z_k^T Z_k.$$

Метод Качмажа приводит к расхождению итерационного процесса под действием особо неблагоприятных шумов измерений. Вместе с тем, чтобы гарантировать монотонную сходимую оценок к истинным значениям, достаточно обозначить самым малым шагом направление движения [30]. Тише едешь – дальше будешь. Эта известная поговорка вполне подходит к параметрическому оцениванию. Обзор рекуррентных методов позволяет понять, что среди них есть более или менее консервативные, выбор стиля итерационного «автомобиля» зависит от условий его применения, но вряд ли компромиссный подход лежит в области чистых стратегий. Рекурсии легко утрачивают исходное приближение, что является крупным их недостатком. На поле практики следует ожидать появления «кентавров». Некоторые из них будут исследованы ниже.

7.3. РЕКУРСИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ

Эффективность процедур идентификации весьма зависит от соответствия модели объекту. Довольно бесполезно пытаться вогнать описание объекта высокого порядка в тесные рамки модели низкой размерности, и, наоборот, избыточность модели также способна доставить неприятности. Рекуррентные алгоритмы не способны адаптироваться к тому, чего у них нет. Они работают с вектором оценок параметров фиксированной «длины». Задача выискивать нужную размерность возложена на рекурсивные алгоритмы, итерации которых связаны не с учетом нового отсчета данных, а с увеличением количества оцениваемых параметров.

Как водится, к делу привлечена очередная лемма об обращении матрицы. На этот раз речь идет о методе окаймления, который связывает обратные матрицы для блоков, полученных один из другого добавлением каймы из строки и столбца. Для симметричных матриц выглядит он так

$$P = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + \frac{pp^T}{d} & -\frac{p}{d} \\ -\frac{p^T}{d} & \frac{1}{d} \end{pmatrix}, \quad p = A^{-1}b, \quad d = c - b^T p.$$

Допустим, что индекс вектора оценок параметров θ_k согласован с размерностью. Тогда алгоритм идентификации сведется к следующему

$$\theta_k = P_k^{-1} R_k = \begin{pmatrix} A^{-1} + \frac{pp^T}{d} & -\frac{p}{d} \\ -\frac{p^T}{d} & \frac{1}{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{k-1} \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{k-1} - pq \\ q \end{pmatrix}, \quad q = (r - p^T R_{k-1})/d.$$

На классе ортогональных матриц $p=0$, легко видеть, к каким упрощениям это приводит. Жаль только, что проблема не исчезает, а переносится на этап ортогонализации. Алгоритм окаймления экспоненциально накапливает ошибки вычислений, для плохо обусловленных задач нелегко придумать более убийственную для итогового результата процедуру. Он способен споткнуться на пустом месте: достаточно обнулить первый элемент P на диагонали. Метод смотрится как почтенный реликт наивного времени поиска простых аналитических закономерностей, оставившего обширную литературу и ряд имен первопроходцев.

7.4. ВЫРОЖДЕННЫЕ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Будем развивать далее метод, предложенный в [59, 61], в котором отчасти сочетаются черты рекуррентного и рекурсивного подходов. Для этого вернемся к исходной постановке задачи, когда система уравнений идентификации записана в общей ее форме

$$Z \theta = Y.$$

Договоримся считать, что матрица измерений Z большая, прямоугольная и может быть крайне плохо обусловленной или вырожденной.

В середине столетия Пенроуз удачно расширил формальное определение обратной матрицы $A^{-1}A = E$ понятием матрицы псевдообратной A^+ , удовлетворяющей четырем условиям

$$A A^+ A = A, A^+ A A^+ = A^+, (A A^+)^T = A A^+, (A^+ A)^T = A^+ A.$$

Первые два из них можно интерпретировать «выживает сильнейший», вторые два свидетельствуют о симметрии взаимных произведений A и A^+ . Обычная матрица A^{-1} также удовлетворяет этим соотношениям. Матрица A^+ единственная, для каждой A есть своя псевдообратная, для нулевой матрицы A ее псевдоинверсия $A^+ = 0$. Фробениусова норма разности

$$\| A^+ A - E \| \text{ или } \| A A^+ - E \|\$$

отлична от нуля, но она минимальна среди претендентов на роль псевдообратной матрицы.

Нормальное псевдорешение системы линейных уравнений также, как и обычное решение, единственно и записывается в виде

$$\theta = Z^+ Y.$$

Геометрическая интерпретация нормального псевдорешения состоит в том, что оно является ортогональной проекцией нулевой точки $\theta_0 = 0$ на множество решений вырожденной системы или обобщенных решений, минимизирующих норму разности левой и правой частей несовместной системы $\| Z \theta - Y \|\$. Нормальное псевдорешение θ единственно, как проекция нуля оно обладает минимальной нормой на указанном множестве. Иными словами, нормальное псевдорешение наделено примерно теми же свойствами, что и псевдообратная матрица.

Математическое выражение, указывающее путь вычисления проекции любой точки θ_0 , а не только нулевой, имеет вид

$$\theta = \theta_0 + Z^+ (Y - Z\theta_0).$$

Это общее псевдорешение зависит от ряда произвольных постоянных. Изменяя точку θ_0 , мы получаем все новые и новые решения задачи ортогональным проектированием. Нет такого места на множестве возможных решений, до которой мы не дотянулись бы проекцией из точки, принадлежащей всему пространству. Для несовместных систем поиск по-прежнему ведется на множестве оценок, минимизирующих норму разности левой и правой частей исходного уравнения.

Разновидность общего псевдорешения уравнения идентификации описывает проектирование точки в пространстве с метрикой, порожденной эллиптической нормой $\| W^{-1}(\theta - \theta_0) \|$, когда

$$\theta = \theta_0 + Z_w^+ (Y - Z\theta_0),$$

где $Z_w^+ = W(ZW)^+$ называется W -взвешенной псевдообратной матрицей. Она обобщает понятие Пенроуза на случай линейных операторов, определенных в пространстве с произвольной метрикой.

Работать напрямую с матрицей измерений нет нужды, кроме тех случаев, когда следует трепетно относиться к обусловленности уравнений. Формулы работоспособны с матрицами системы нормальных уравнений $P\theta=R$, сведем свойства псевдорешений в таблицу.

$\theta = P^{-1}R, \det(P) \neq 0$	$\ P \theta - R \ = 0$
$\theta = P^+ R$	$\min \ P \theta - R \ $
$\theta = \theta_0 + P^+ (R - P\theta_0)$	$\min \ \theta \ $
$\theta = \theta_0 + P_w^+ (R - P\theta_0), P_w^+ = W(PW)^+$	$\min \ P \theta - R \ $
$\theta = \theta_0 + \underline{P}_w^+ (R - P\theta_0), \underline{P}_w^+ = W(\underline{W}P\underline{W})^+ \underline{W}$	$\min \ \theta - \theta_0 \ $
	$\min \ W^{-1} (\theta - \theta_0) \ $
	$\min \ \underline{W} (P \theta - R) \ $
	$\min \ W^{-1} (\theta - \theta_0) \ $

Точки зрения на принцип назначения весовых коэффициентов могут быть различными. Наиболее простой выбор дает соображение равных пропорций, когда элементы диагональной матрицы W совпадают со значениями элементов θ_0 , тогда

$$\|W^{-1}(\theta - \theta_0)\| = \sqrt{\left(\frac{\theta_1 - \theta_{01}}{\theta_{01}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\theta_n - \theta_{0n}}{\theta_{0n}}\right)^2}.$$

Пропорционально взвешенная оценка параметров ищется по формуле

$$\theta = \theta_0 + \text{diag}(\theta_0) (Z \text{diag}(\theta_0))^+ (Y - Z\theta_0).$$

Этот подход напоминает налоговую систему, чем меньше коэффициент вектора притяжения, тем с большим вниманием он рассматривается. Отметим некоторые его преимущества.

Очевидно, что он отличается от распространенной теперь уже практики использования всюду, где только можно, нормального псевдорешения, которому отвечает нулевой вектор притяжения. Синтеза полезной информации в таких процедурах не происходит. В отличие также от обобщенного метода наименьших квадратов (ОМНК), здесь весовые коэффициенты уравнивают не невязки измерений, а непосредственно отклонения коэффициентов искомой оценки θ от коэффициентов вектора притяжения θ_0 . Метод наименьших квадратов без весовых коэффициентов слишком «мешковат», для того, чтобы самостоятельно исправлять странности, вытекающие из различия между тем, что требуется по существу от идентификации и механической подгонкой оценки под ответ.

Дисбаланс весовых коэффициентов позволяет выделить наиболее подверженные дрейфу нестационарные параметры. Столь гибкий аппарат управления оцениванием неоправданно мало используется.

Следует иметь в виду, что за качество оценок придется платить полной монетой. Эффективность вычислительных методов заключается в «причесывании» выделяющихся элементов, тогда как веса препятствуют масштабированию. При неосторожном обращении метод счета легко превращается в то самое мифическое решето, которым в России носят в избу воду. Вырожденные задачи требуют особой щепетильности, и при различных подходах к очевидно простым, казалось бы, уравнениям параметрического оценивания возникает большое количество проблем, с изучением которых связано дальнейшее исследование.

7.5. ПОШАГОВЫЕ ПРОЦЕДУРЫ

Большинство процедур параметрического оценивания основаны на непрерывном накоплении данных. Эта деталь становится их уязвимым звеном, если накапливаемая выборка неинформативна. Отсюда начинается путь к плохо обусловленным задачам, решение которых зависит от аккуратного обхождения с разрядной сеткой вычислителя. Платой за риск является ускорение процесса идентификации. Иногда эта плата видится как чрезмерная. Если незачем рисковать, то не надо и усложнять себе жизнь, связываясь с громоздкими вычислительными подходами.

Последний тезис можно материализовать на практике, опираясь на формулы обобщенного псевдорешения для небольшой выборки данных. Вырожденности опасаться не приходится, это родная стихия для такого класса методов. Рекуррентная процедура получается заменой вектора притяжения θ_0 предыдущей оценкой параметров, отсюда

$$\theta_k = \theta_{k-1} + Z^+ (Y - Z\theta_{k-1}).$$

Среди пошаговых методов особо отметим одноточечную и двухточечную схемы. В одношаговом варианте матрица измерений представлена одной строкой $Z=Z_k^T$, $Y=y_k$. После подстановки $Z^+ = Z_k / Z_k^T Z_k$, выходим на рассмотренный ранее алгоритм Качмажа.

Для того, чтобы проложить дорогу к двухшаговой схеме, представим матрицу измерений разложением на треугольный L и ортонормальный Q (по строкам) сомножители, так что

$$Z = \begin{pmatrix} Z_k^T \\ Z_{k-1}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|Z_k\| & 0 \\ \alpha \|Z_k\| & \|Z_{k-1} - \alpha Z_k\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_k^T / \|Z_k\| \\ Z_{k-1}^T - \alpha Z_k^T / \|Z_{k-1} - \alpha Z_k\| \end{pmatrix},$$

где $\alpha = Z_k^T Z_{k-1}$. Поскольку $Z^+ = (LQ)^+ = Q^T L^{-1}$, имеем версию

$$\theta_k = \theta_{k-1} + Q^T L^{-1} (Y - Z\theta_{k-1}).$$

Алгоритм ортогонализации плохо разворачивает почти коллинеарные строки Z, что не такая уж редкость среди близко отстоящих отсчетов выборки данных. Это лишний раз подчеркивает, что без эвристических приемов, таких, как искусственное прореживание, накопительные процедуры работают неудовлетворительно.

Рассмотренные алгоритмы демонстрируют здоровое консервативное начало со всеми его прелестями и недостатками. Познать их можно ближе на примере оценивания параметров дискретного объекта

$$x_k = a x_{k-1} + b u_{k-1}, \quad x_0 = 0,$$

по реакции на единичное ступенчатое воздействие $u_k = 1$. Пусть $a = b = 0.5$. График переходной функции представлен на рис. 7.1.

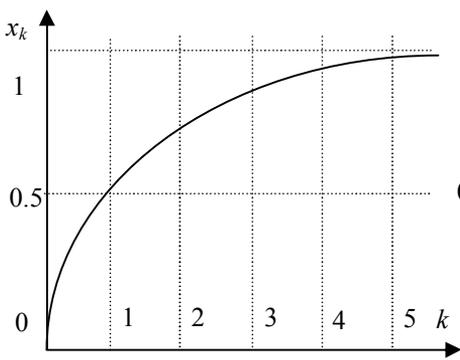


Рис. 7.1

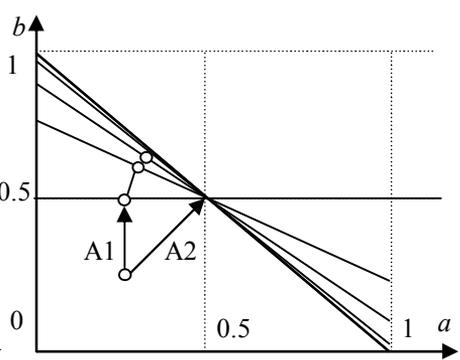


Рис. 7.2

Пусть

$$Z_k = \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix}, \quad y_k = x_k, \quad \theta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \theta_0 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}.$$

Итерации одношагового и двухшагового алгоритмов идентификации нанесены на плоскость (a, b) , в которой линейным уравнениям связи $Z_k \theta = y_k$ отвечают прямые, пересекающиеся в точке искомого решения, см. рис. 7.2. Одношаговый алгоритм (A1) уточняет оценку параметров постепенно, проекция за проекцией. Сходимость ему не светит, однако монотонное, хотя и медленное, стремление оценки параметров к точке истинного решения он обеспечивает. Притяжение этой точки зависит от тактики управления. Двухшаговый алгоритм (A2) более целеустремлен, в приведенном примере решение достигается за один такт. Для задач высокой размерности выгоды от усложнения цепочки расчета не столь высоки. Можно, конечно, реализовать некоторый смешанный вариант, но еще более перспективно обратиться к методам, изложенным в следующих разделах.

7.6. ПОИСК ОБЩЕГО ПСЕВДОРЕШЕНИЯ

Еще до того, как в ход пойдут весовые коэффициенты, следует познакомиться с более простыми алгоритмы поиска общего псевдорешения системы уравнений идентификации, когда ничто не мешает работать с ее матрицей. Обсудим два метода, один – несерьезный, другой – составленный по канонам вычислительной математики. В первом варианте надежды связаны с методом окаймления, использованным ранее для инверсии невырожденной симметричной матрицы. Его универсальным продолжением является метод Гревилля, который будет рассмотрен ниже. Во втором варианте применено сингулярное разложение матрицы, годное почти на все случаи жизни и именно потому вызывающее справедливые сомнения в его повсеместной целесообразности.

Напомним формулы метода окаймления

$$P = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + \frac{pp^T}{d} & -\frac{p}{d} \\ -\frac{p^T}{d} & \frac{1}{d} \end{pmatrix}, \quad p = A^{-1}b, \quad d = c - b^T p.$$

Метод Гревилля работает с каймой в виде столбца (или строки) и обобщает предыдущий алгоритм на случай любых матриц

$$P = \begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix}, \quad P^+ = \begin{pmatrix} A^+ - a^T p \\ a^T \end{pmatrix}, \quad p = A^+ b, \quad d = b - Ap, \quad a = d^T / d^T d,$$

старт с $d=b$, если $d=0$, то $a=0$. По ходу счета, если $d=0$, то $a=p^T A^+ / (1+p^T p)$.

Смысл переменных обоих алгоритмов позволяет планировать обработку данных. В самом деле, малый делитель d означает близость к вырожденности матрицы P , этот признак позволяет сортировать столбцы (и строки, если нужно) с целью повысить эффективность процедуры. В методе Гревилля вектор Ap является ортогональной проекцией b на гиперплоскость, образованную ранее обработанными столбцами, входящими в A . Отношение норм векторов d и b дает нам в руки синус угла раствора столбца P по отношению к указанной гиперплоскости, он не превышает единицы. Следовательно, всегда можно назначить не относительный, а абсолютный порог грубости псевдоинверсии.

Метод Гревилля самодостаточен, с его помощью можно реализовать любую формулу параметрического оценивания. Велик соблазн совместить его с производительным, но менее универсальным методом двухстороннего окаймления, применяемым там, где он остается работоспособным.

В таком случае рекурсивный алгоритм поиска общего псевдорешения системы уравнений идентификации

$$\theta = \theta_0 + P^+ (R - P \theta_0)$$

сводится к виду

$$\theta_k = \begin{pmatrix} \theta_{k-1} - pq \\ q \end{pmatrix}, \quad \theta_0 = \begin{pmatrix} \theta_{0k-1} \\ q_0 \end{pmatrix}, \quad \text{размерность } k=1..n,$$

до тех пор, пока ранг наращиваемой левым верхним углом A матрицы P растет, имеем $p=A^{-1}b$, $d=c-b^T p$, $q=(r-p^T R_{k-1})/d$, в противном случае нижние строки матрицы P , отвечающие плохо обусловленной части уравнений, игнорируются, а столбцы домножаются алгоритмом Гревилля $p=A^+ b$, $q=(q_0 + p^T(\theta_{k-1} - \theta_{0k-1})) / (1+p^T p)$.

Обозначим текущую сумму квадратов невязок $\Delta_k = \|Y - Z\theta_{(k)}\|^2$, рекурсивно вычисляемый вектор $\theta_{(k)}$ дополнен до полной размерности нулями, она убывает до тех пор, пока вычисляемый ранг P нарастает

$$\Delta_k = \Delta_{k-1} - q/d, \quad \Delta_0 = \|Y\|^2.$$

В вычислительной математике сложились шаблоны – процедуры диагонализации и триангуляризации матриц. Именно универсальность является их слабой стороной. Учитывая специфику вырожденных задач, триангуляризация и сходные процессы должны зависеть от правой части решаемых уравнений. Обратим внимание на то, что падение оптимизируемого критерия на шаге рекурсивного алгоритма существенно зависит от *отношения* q/d . Этот факт заставляет по-новому взглянуть на распространенные алгоритмы выбраковки почти зависимых строк и столбцов P на основе всего лишь малой величины d . Путь безопасных вычислений и путь получения оценки с хорошими аппроксимирующими качествами едва ли не диаметрально противоположны. Именно малые по абсолютной величине делители d могут приводить к значительному снижению невязки. В данном случае алгоритм оказался поставщиком важной информации, помогающей выбрать опорный элемент.

При поиске более сильных в вычислительном отношении продолжений, рассмотрим формулы, построенные при помощи сингулярного разложения матрицы $Z=UDV^T$ системы уравнений идентификации.

В вырожденных задачах

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z^+ = V \begin{pmatrix} \sigma_k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T,$$

где $\sigma_k = \text{diag}(\sigma_1 \sigma_2 \dots)$ – матрица ненулевых сингулярных чисел Z , выстроенных в порядке убывания; $U^T U = E, V V^T = E$. Разделим окаймляющие матрицы на блоки $U = [U_k \ U_n]$, $V = [V_k \ V_n]$ в соответствии с делением D .

Если размер прямоугольной матрицы Z внушает сомнение, вместо нее можно использовать симметричное представление $P = Z^T Z = U D U^T$ системы нормальных уравнений метода наименьших квадратов $P \theta = R$.

Формулу обобщенного псевдорешения можно записать в двух, казалось бы, эквивалентных вариантах

$$\theta = \theta_0 + Z^+ (Y - Z \theta_0) \quad \text{или} \quad \theta = Z^+ Y + (E - Z^+ Z) \theta_0.$$

В практике вычислительной математики двух равноценных путей не бывает, ее мощь, собственно, и состоит в выискивании рационального направления приложения усилий процессора. Если ранг матрицы Z невысок, первый путь связан с меньшим объемом вычислений. Второй путь годится для решения невырожденных и слабо вырожденных систем. Отсюда получают две ветви алгоритма оценки параметров.

Размерность σ_k меньше $n/2$	Размерность σ_k больше $n/2$
Общее псевдорешение $Z \theta = Y$	
$\theta = \theta_0 + V_k (\sigma_k^{-1} U_k^T Y - V_k^T \theta_0)$	$\theta = V \begin{pmatrix} \sigma_k^{-1} U_k^T Y \\ V_n^T \theta_0 \end{pmatrix}$
Общее псевдорешение $P \theta = R$	
$\theta = \theta_0 + U_k (\sigma_k^{-1} U_k^T R - U_k^T \theta_0)$	$\theta = U \begin{pmatrix} \sigma_k^{-1} U_k^T R \\ U_n^T \theta_0 \end{pmatrix}$

7.7. ПОИСК ВЗВЕШЕННОГО ПСЕВДОРЕШЕНИЯ

Задача поиска взвешенного псевдорешения несет в себе ярко выраженные черты классической проблемы, которой следует заниматься хотя бы потому, что она является общей проблемой линейной алгебры.

Плохо обусловленные задачи – не новость в специальной литературе, но каковы бы ни были методы регуляризации, всегда имеется предел плохой обусловленности, при котором в численном решении уравнений нельзя получить ни одного верного знака. Именно этот уникальный случай, рассматриваемый, нередко, как досадное недоразумение, которого стараются избежать, привлекает теперь наше внимание.

Вместо «решения» нерешаемых уравнений их следует разделить на информативную первую и малоинформативную вторую части

$$P\theta = R, P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix},$$

тогда взвешенное псевдорешение вычисляется по формуле

$$\theta = \theta_0 + W(P_1W)^+(R_1 - P_1\theta_0).$$

Акцентируем здесь внимание на то, что система уравнений и вектор притяжения образуют два сугубо равноправных источника информации. Чтобы высвободить дорогу последнему, надо осторожно обращаться с шаблонами численных методов, иначе весь эффект уйдет сквозь разрядную сетку процессора.

Попытка найти псевдорешение в лоб, по формуле, приводит к необходимости псевдообращать произведение P_1W , что плохо по двум причинам.

Во-первых, умножение на W нарушает симметрию матрицы $P=ZZ^T$ и неоправданно сужает выбор численных средств.

Во-вторых, умножение P_1 на матрицу весов способно ухудшить и без того плохую обусловленность задачи: за качество взвешенных оценок приходится платить серьезным увеличением нагрузки на вычислитель.

При хорошей организации вычислений матрица весов используется только там, где она действительно нужна, не отражаясь на расчете, если система уравнений хорошо обусловлена. В противном случае также не следует спешить с умножением P_1 на W . Лучше обратить невырожденный блок матрицы P_1 не после, а до умножения его на дисбалансирующий фрагмент весовой матрицы.

Предпосылки к построению численного алгоритма. На первом этапе цель вычислений может состоять в формировании наращиваемого левым углом невырожденного квадратного блока A симметричной матрицы P , сопровождаемом перестановкой строк P , R (и столбцов P , иначе она потеряет симметрию). Перестановка исключает из рассмотрения плохо обусловленные уравнения, группируемые своими коэффициентами в нижней части матриц, так что

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ \text{-----} \\ C \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}.$$

Нарращиваемый блок нужно представить в виде произведения двух множителей $A=LL^T$, где L – нижнетреугольная матрица. Если преобразование доведено до конца, в том смысле, что блок A охватывает собой всю матрицу P , то алгоритм заканчивается стандартно решением двух систем с треугольными матрицами

$$L X = R, \quad L^T \theta = X,$$

что соответствует формуле $\theta = P^{-1}R$.

Интрига вычислительного метода продолжает развиваться дальше, если размер хорошо обусловленного, подчеркнем, блока A уступит размерности задачи. Наступает черед псевдообращения произведения P_1W , где согласно принятым обозначениям $P_1 = (A | B)$, матрицу весов также сепарируем на блоки $W = \text{diag}(W_1, W_2)$, так что

$$P_1W = (LL^T | B) W = L (L^T W_1 | L^{-1}B W_2).$$

произведение $L^T W_1$ – невырожденная верхнетреугольная матрица.

Предположим, что мы отыскали ортогональную матрицу H , например, методом Хаусхолдера, такую, что умножение на нее аннулирует остаточный блок $L^{-1}B W_2$, т. е. $(P_1W H) H^{-1} = L (G | 0) H^{-1}$, причем G – теперь уже невырожденная нижнетреугольная матрица. Тогда псевдообращение произведения $P_1W = (P_1W H) H^{-1}$ сведется к обычной инверсии и перестановкам невырожденных компонент L , G , H^{-1} , $(P_1W)^+ = H (G^{-1} | 0)^T L^{-1}$. Искомое решение предстанет в виде

$$\theta = \theta_0 + P_w^+ (R_1 - P_1\theta_0) = \theta_0 + WH \begin{pmatrix} G^{-1}L^{-1}(R_1 - P_1\theta_0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Проблемы триангуляризации. Приведенная выше схема – не более, чем скелетный остов вычислений, который надо еще оживить конкретными действиями. Первой фазой сделан акт триангуляризации $A=LL^T$.

Метод Холецкого, нацеленный на такого рода нужды, порождает не один, а семейство алгоритмов, объединенных общей идеей, так что алгоритм предстоит не столько выбрать, сколько под конкретную потребность создать. В нашем случае итогом вычислений должна стать, в более строгом толковании целей, не треугольная, а трапециевидная матрица разложения P , несущая в себе помимо L информацию о $L^{-1}B$, где L^{-1} в явном виде не вычисляется. Для пущей экономии в таких случаях матрицу P наращивают дополнительно вектором, подлежащим умножению на L^{-1} . Обычно это R , но здесь еще и $P \theta_0$ или разность $R - P \theta_0$.

Распространенная модификация метода Холецкого формирует нижне-треугольную матрицу L на месте P , столбец за столбцом, см. рис. 7.3.

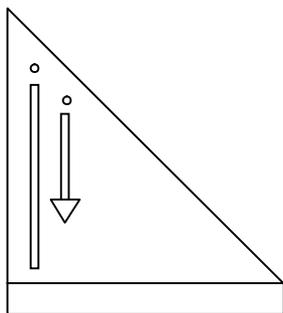


Рис. 7.3

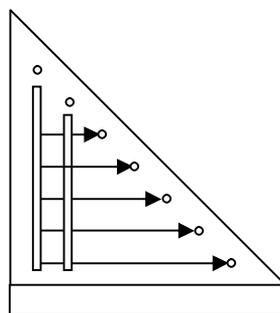


Рис. 7.4

Такой близорукий подход не позволяет планировать перестановки, столь важные при решении вырожденных задач. Далее будет рассмотрен иной вариант, который занят итерационным уточнением всей диагонали L . Тогда на каждом шаге рекурсии мы сможем, очевидно, опереться на любую строку и столбец P . Но и это еще не предел изворотливости, к которой нас настоятельно подталкивает сложность проблемы. Столь же итерационно, забегая вперед, можно рассчитывать добавочный вектор в P , помещаемый обычно в нижнюю строку. Секрет прост, его элементы, образующие $L^{-1}R$, дают прогноз падения невязки МНК.

Горизонтальные стрелки рис. 7.4, обозначающие заявленные прогно-стические действия вдоль диагонали, следует отразить вертикально вниз на дополнительную строку и тогда картина вычислений будет полна.

Очертив панораму вычислений, приступим к конкретной реализации. Каноническая схема алгоритма Холецкого, нацеленного на обработку убывающих по высоте столбцов, имеет вид

$$L_{kk} = \sqrt{P_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{kj}^2}, L_{ik} = (P_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{ij}L_{kj}) / L_{kk},$$

где $k=2..n$, старт $k=1$ с $L_{11} = \sqrt{P_{11}}$ и $L_{i1} = P_{i1} / L_{11}$, $i=k+1..n+1$.

Рис. 7.5 поясняет содержимое трех блоков трапецевидной структуры, которая имеет высоту матрицы P, расширенной строкой R^T.

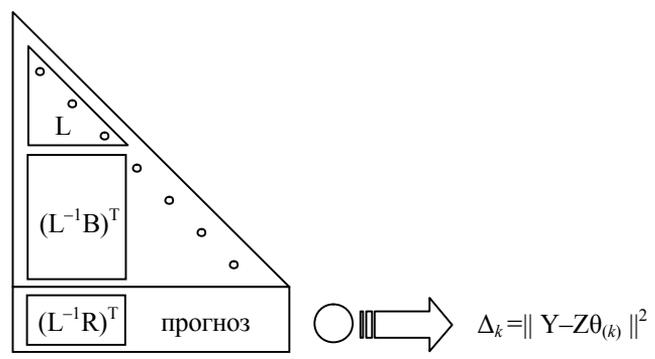


Рис. 7.5

Нарастающая вниз лента столбцов позволяет итерационно вычислять квадраты положительных диагональных элементов, пусть на первом шаге $L_{ii}^2 = P_{ii}$ (совпадают с диагональю) и далее $L_{ii}^2 = P_{ii} - L_{ik-1}^2$ для всех $i=k..n$. Забегающий вперед расчет синхронизован с коррекцией строки R^T так, что элементы $R_i = (P_i - R_{k-1} L_{ik-1}) / L_{ii}$. Вычисленные впрок, они дают прогноз падения невязки МНК, помогающий выбрать и переставить в позицию k ведущие строки P и элемент R.

Для продолжения итераций нужно сбрасывать делители при всех несостоявшихся конкурентах элементов L_{kk} и R_k , т. е. $R_j = R_j L_{jj}$ для $j=k+1..n$. Этой репродуктивной фазы можно избежать, более аккуратно обращаясь с памятью вычислителя. Начальное значение максимума квадрата невязки $\Delta_k = ||Y - Z\theta_{(k)}||^2$ несложно посчитать как $\Delta_0 = ||Y||^2$, его можно вынести как дополнительный элемент расширенной диагонали P и уменьшать на выбранную величину $\Delta_k = \Delta_{k-1} - R_k^2$.

Заключительная фаза. Если процесс триангуляризации благополучно завершился вычислением разложением $P=LL^T$, по месту хранения участвующего в итерациях вектора R оказывается произведение $L^{-1}R$, так что совсем несложно будет решить систему $L^T \theta = L^{-1}R$ и получить ответ невырожденной задачи. Другое дело, если по той или иной причине триангуляризация останавливается, выдавая обширную информацию в блоках трапециевидной матрицы $T=(L^T | L^{-1}B)$. Иногда это выгодно делать, чтобы повысить значимость вектора притяжения. Смысл последующих численных операций состоит в том, чтобы, обрезав ортогональными преобразованиями с матрицей H взвешенную при помощи W трапецию $TW=(L^T W_1 | L^{-1}BW_2)$, превратить ее в нижний треугольник G в $TWH=(G | 0)$.

Матрица ортогональных преобразований Хаусхолдера, аннулирующая правый блок, имеет вид

$$H = \left(E - 2 \frac{U_1 U_1^T}{U_1^T U_1}\right) \left(E - 2 \frac{U_2 U_2^T}{U_2^T U_2}\right) \dots \left(E - 2 \frac{U_k U_k^T}{U_k^T U_k}\right),$$

где U_i – опорные векторы преобразований Хаусхолдера, алгоритм составления которых подробно описан в [17, с. 58].

Оперативный простор дополнительной триангуляризации не ограничен указанными преобразованиями, в особо щекотливых ситуациях можно привлекать преобразования Гивенса и другие модифицированные алгоритмы, играющие в вычислительной математике роль ножниц, остригающих все размещенное не так, как надо. Расчет завершается большой сборкой

$$\theta = \theta_0 + P_w^+ (R_1 - P_1 \theta_0) = \theta_0 + WH \begin{pmatrix} G^{-1} L^{-1} (R_1 - P_1 \theta_0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $(P_1 W)^+ = (L T W)^+ = (T W)^+ L^{-1}$, итоги можно подвести иначе, по формуле

$$\theta = \theta_0 + P_w^+ (R_1 - P_1 \theta_0) = \theta_0 + W (T W)^+ \begin{pmatrix} L^{-1} (R_1 - P_1 \theta_0) \\ 0 \end{pmatrix},$$

привлекая для псевдоинверсии взвешенной трапециевидной матрицы более простой в алгоритмическом отношении метод Гревилля, а именно, ту его ветвь, которая обрабатывает заведомо зависимые столбцы прямоугольного «туловища», поскольку инверсия «угла» не составляет проблем.

Рассматриваемый подход вместе с контролируемым при помощи весового коэффициента прямым методом накопления данных

$$P_k = wP_{k-1} + (1-w) Z_k Z_k^T, \quad R_k = wR_{k-1} + (1-w) Z_k y_k,$$

сочетает в себе некоторые лучшие черты рекурсивных и рекуррентных и методов. В отличие от прямых рекурсивных методов, размер модели здесь не зависит от условий идентифицируемости. Очевидная слабость рекуррентных алгоритмов (которой вовсе лишена псевдоинверсия), состоит в том, что начальная оценка перестает использоваться ими не потому, что она утратила всяческую ценность, а потому лишь, что они так устроены.

Как бы ни качали шторма вырожденности процесс оценки параметров, у него всегда остается впереди маяк в виде вектора притяжения.

Вопрос об его назначении и изменении остался открытым. Одно из глобальных решений этой нелегкой проблемы состоит в том, чтобы вообще не менять то, что взято из стороннего источника (дано из физики явления) и служит хорошей основой для слияния информации. Следующее направление мысли связано с желанием изредка менять вектор притяжения консервативной процедурой, гарантирующей его монотонное приближение к истинным параметрам. Эта предпосылка спорна, но допустима. В таком случае находят сбыв одношаговые алгоритмы, предложенные выше.

Выводы. Анализ начальной фазы алгоритма нахождения взвешенного псевдорешения дает богатую почву для заключений. Именно здесь начинают проступать контуры противоречий, сопровождающих выбор ведущей строки и столбца вычислительного метода. С одной стороны, мы заинтересованы в том, чтобы как следует уменьшить невязку измерений. С другой стороны, величина ее падения обратно пропорциональна величинам диагональных элементов L . Связавшись со слишком малыми делителями, мы рискуем потерять результат ввиду ограниченности инструмента.

Процессор вычислительной машины не следует перегружать операциями с несоразмерными числами. За стремительное уменьшение квадратичного критерия мы расплачиваемся риском потерять точность вычислений. На этом перепутье, к сожалению, нет единственно верной стратегии, здесь возникает вопрос назначения ведущей строки, который сам по себе может составить предмет отдельного исследования. Итерация дает прогноз на один шаг вперед, а локально хороший путь может оказаться ущербным с точки зрения совокупного эффекта. Сходные проблемы в смежной области интегрирования дифференциальных уравнений привели к возникновению численных методов типа алгоритмов Рунге-Кутты.

ЧАСТЬ IV КОМБИНИРОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Задачи маневрирования отличаются от традиционных задач теории управления разнообразием режимов движения. Стандартные регуляторы работают, обычно, на нижнем уровне комбинированных систем в составе исполнительных сервоприводов. Поясним содержание траекторной задачи на простом доходчивом примере.

Пусть дорога серпантином вьется в горной местности. Легко представить себе описание ее в виде линии уровня некоторой функции $f(x,y)=const$. При изучении динамики консервативных систем в ее роли выступает полная энергия системы. Для того, чтобы выписать дифференциальные уравнения движения, необязательно придерживаться энергетической трактовки этой функции, имеем

$$\frac{d}{dt} f = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0 ,$$

нулевой баланс получим, приравнявая, с точностью до знаков и произвольного коэффициента k , сомножители слагаемых

$$\frac{dx}{dt} = k \frac{\partial f}{\partial y} , \quad \frac{dy}{dt} = -k \frac{\partial f}{\partial x} .$$

Перед нами система уравнений, родственная системе сопряженных уравнений Гамильтона. Она описывает движение по избранной траектории, имеющей необходимые топологические особенности.

Теория автоматического управления была нацелена, собственно, на иные, чаще всего, интегральные показатели. Что касается вождения автомобиля по шоссе, то нас вряд ли устроит высокое качество пребывания на разрешенной полосе *в среднем*. Точно также нас не очень интересует даже устойчивость системы, поскольку в некоторых режимах выйти из опасной зоны можно только по неустойчивой экстремали. Наконец, если подать на вход следящей системы координаты далекой цели, то органы управления выйдут на упоры, и тогда о качестве динамического процесса говорить не придется. Для того, чтобы осуществить нужный маневр, по уравнениям траектории строится программатор, постепенно выводящий объект к намеченной позиции. Сервоприводы нивелируют динамику объекта, нередко позволяя использовать крайне упрощенное его описание.

Согласно методу Якоби, программу движения можно задавать также как скольжение вдоль градиента некоторой гладкой поверхности, проще всего – градиента квадратичной формы $f(x) = 0.5 x^T F x$. В таком случае дифференциальное уравнение выглядят несколько иначе

$$\dot{x} = F x.$$

Для того, чтобы движение было устойчивым, матрица F должна быть отрицательно определена. Средством регулирования скорости движения служат ее собственные значения. На форму траектории в фазовом пространстве влияет как расположение собственных векторов, так и отношения величин собственных значений по отношению друг к другу. При кратных собственных значениях получаем прямолинейные траектории.

Движение вдоль *линии уровня* той же самой квадратичной формы получаем посредством вычисления направления, ортогонального градиенту. Поворот вектора на прямой угол осуществляет кососимметричная матрица, на случай систем второго порядка имеем

$$\dot{x} = K F x, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}.$$

Несложно увидеть связь этой программы движения с полученной ранее программой в форме уравнений Гамильтона.

Не всякое программное движение выполнимо, поэтому чрезмерная жесткость программ является нежелательным фактором. Достаточно, например, поместить объект вне программной траектории, и контуру управления придется обрабатывать ошибку слежения. Темп движения задающей точки программы и форма траектории могут оказаться несовместными с динамикой объекта. В таком случае программатор настраивают. Аналитические методы настройки эффективны тогда, когда под рукой есть математическая модель объекта. В противном случае в ход идут эвристические приемы, немало их создано. Довольно эффектно выглядит адаптация задания под динамические особенности объекта снижением скорости программатора в составе метода коррекции аргумента [35].

Рассмотрим, как работают общие принципы теоретической механики (формализмы Гамильтона, Якоби, Понтрягина, Ляпунова) применительно к учебным задачам маневрирования. Приведенные ниже примеры взяты из практики компьютерного моделирования систем управления, их можно использовать для организации лабораторного практикума.

ГЛАВА 8 ЗАДАЧИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МАНЕВРИРОВАНИЯ

8.1. УПРАВЛЕНИЕ ТРАНСПОРТНЫМ РОБОТОМ

Обсудим задачу программирования движения на примере управления транспортным шестиногим роботом. Предположим, что робот перемещается по горизонтальной плоскости (x, y) и его динамика по поступательному x и боковому y направлениям движения одинакова. Количество подошв шагающего аппарата наводит на соображение преобладания сил трения над силами инерции, такого рода объекты принято описывать интеграторами. Штурман, прокладывая путь корабля, пользуется не лучшей моделью. Сервоприводы нижнего уровня в виде обратных связей стабилизируют робот на траектории, см. рис. 8.1.

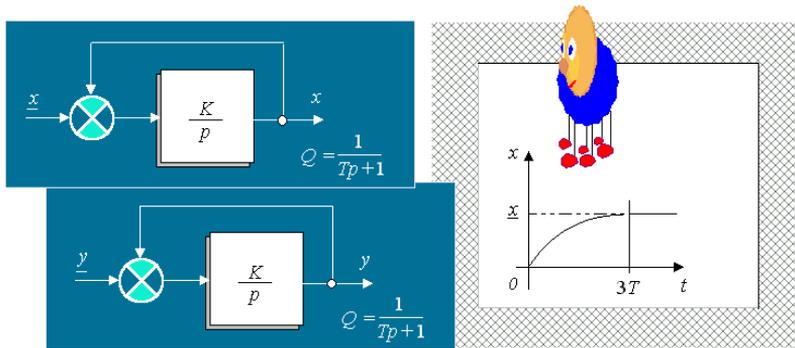


Рис. 8.1

Передаточные функции симметричных контуров управления поступательным и боковым перемещениями имеют вид

$$Q(p) = \frac{1}{Tp+1},$$

где T – постоянная времени.

Это означает, что с помощью сервоприводов робот может быть выведен заданием в любую точку пространства не ранее, чем за $3T$.

Шестиногие машины появились в лесотехнической промышленности, там, где особенно важно оказывать щадящее давление на грунт и обладать повышенной проходимостью.

Полностью схема управления приведена на рис. 8.2. Программатор вырабатывает желаемую траекторию движения, подаваемую на следящие системы, образованные контурами обратных связей. Простейшим видом задания является линейная траектория. Уравнение прямой, проходящей через точки $(a, 0)$ и $(0, b)$, выглядит так

$$f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Переменными x и y мы обозначили желаемую траекторию, реальные координаты робота пометим как \underline{x} и \underline{y} .

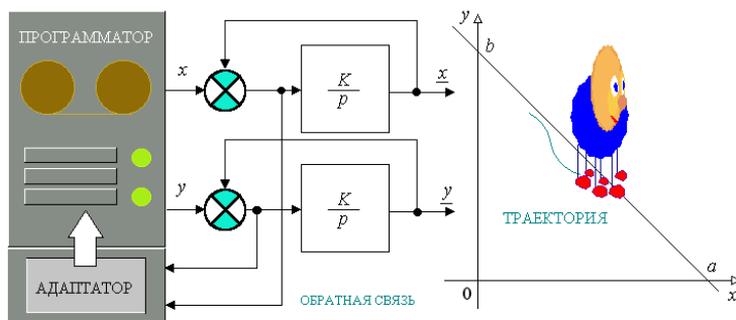


Рис. 8.2

Таким образом, динамика шагающей машины по обоим каналам описывается дифференциальными уравнениями

$$T \dot{\underline{x}} = -\underline{x} + x, \quad T \dot{\underline{y}} = -\underline{y} + y,$$

роль задатчика траектории играют выходы программатора, реализующего расчет программных координат по модели

$$\dot{x} = k \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{k}{b}, \quad \dot{y} = -k \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{k}{a}.$$

Задатчик настраивается при помощи *аргумента* k , который влияет на скорость программной точки.

Отсюда получим полную математическую модель системы, объединяющую выписанные выше уравнения, в виде

$$\dot{Z} = A Z + B k,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -T^{-1} & 0 & T^{-1} & 0 \\ 0 & -T^{-1} & 0 & T^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b^{-1} \\ -a^{-1} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}.$$

При фиксированном значении аргумента $k=k_0$, дифференциальное уравнение описывает неадаптивное управление объектом, стробоскопический график движения изображен на рис. 8.3.

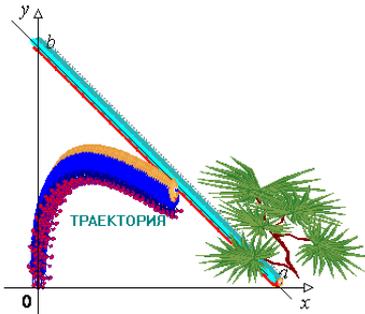


Рис. 8.3

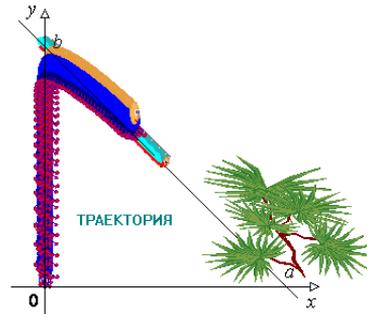


Рис. 8.4

Перемещение программной точки передается на рисунке «мухой», пока что программатор равномерно вычерчивает прямую, независимо от отставания робота. Снижая скорость полета «мухи» (по мере отставания пешехода), получим алгоритм адаптации

$$k = k_0 - k_1 \sqrt{(x - \underline{x})^2 + (y - \underline{y})^2},$$

отрицательные значения аргумента k аннулируются.

Старые методы адаптации грубы, но действенны. Изменение тактики ходьбы робота показано на рис. 8.4. Как видно, машина уже не срезает угол в погоне за целевой точкой.

Упражнения (для лабораторного практикума).

Задача 1. Пусть постоянная времени сервоприводов робота $T=5$ сек. При этом уместно рассматривать маневры, совершаемые в радиусе 100 м. Номинальное значение аргумента $k_0=5000$ обеспечивает необходимую скорость программы. Промоделировать процессы в неадаптивной системе при различных стартовых положениях робота относительно задаваемой траектории. Для интегрирования уравнений использовать метод Эйлера, в котором производная заменяется отношением конечных приращений координат и времени Δ , так что $Z_i = Z_{i-1} + (A Z_{i-1} + B k) \Delta$.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи адаптивный регулятор притормаживает задающую точку действием нелинейной обратной связи с разными значениями коэффициента k_1 , от 0 вплоть до 100. Отрицательные значения настраиваемого аргумента k аннулируются (что означает ожидание, характерное для начальной фазы движения).

Промоделировать процессы в адаптивной системе, построить на одном графике траектории программатора и робота.

Задача 3. Эллиптическая траектория описывается уравнением

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

и проходит через те же, что и ранее, точки $(a, 0)$ и $(0, b)$ на осях. Система уравнений программатора имеет, соответственно, вид

$$\dot{x} = \frac{k}{b^2} y ; \quad \dot{y} = -\frac{k}{a^2} x.$$

Составить матрицы A и B полной модели, построить траектории робота при неадаптивном и адаптивном управлениях.

Задача 4. Составить и реализовать программу движения по «локону» Аньези, эта траектория описывается уравнением

$$f(x, y) = \frac{a^3}{a^2 + x^2} - y = 1.$$

для нее характерно то, что моделируемые дифференциальные уравнения нелинейны. Полную модель движения нельзя свести к простому виду, что не мешает применить метод численного интегрирования.

8.2. ПОСАДКА ШАТЛА НА ЭКРАНОПЛАН

В ряде случаев единую систему образуют части, принадлежащие разным физическим объектам. Тогда говорят о взаимно-координированном движении. Примером служит посадка аэрокосмического самолета (шатла) на подвижный носитель – экраноплан. Динамику посадки можно разложить на вертикальную и горизонтальную составляющие. В вертикальной продольной плоскости маневр совершает, собственно, только аэрокосмический самолет, ведомый по глиссаде (так называется кривая снижения). В горизонтальной плоскости контролируется расстояние и скорость между обоими объектами. После выхода аэрокосмического самолета на горизонт посадки, он догоняет экраноплан, который имеет возможность притормаживать, если это понадобится, см. рис. 8.5.



Рис. 8.5

Движение аэрокосмического комплекса в продольно-вертикальной плоскости принято раскладывать, в свою очередь, на короткопериодическое (колебательное, с сильным затуханием) и длиннопериодическое (фугоидное). Изменение положения руля высоты сказывается прежде всего на короткопериодическом движении корпуса вокруг центра масс. На траекторию влияет уже не руль, он слишком мал для этого, а изменивший свое положение корпус. Поэтому фугоидное движение развивается вслед вращательному и происходит в несколько раз медленнее. Эти общие положения забывают, как только переходят к редуцированным передаточным функциям самолета, ценная полетными интерпретациями физика уходит, остается только скупое математическое описание динамики.

В грубом приближении канал высоты h аэрокосмического самолета описывается передаточной функцией второго порядка

$$Q(p) = 1/(T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1),$$

где T – постоянная времени, ξ – коэффициент демпфирования колебаний.

Предположим, что в плоскости горизонта управление положениями экраноплана Le и аэрокосмического самолета La , движущимися по прямой, производится скоростью, поддерживаемой двигателями. Обозначим входные воздействия V_e и V_a . Дистанция $\underline{d} = Le - La$ между экранопланом и шатлом рассматривается как контролируемый выход, рис. 8.6.

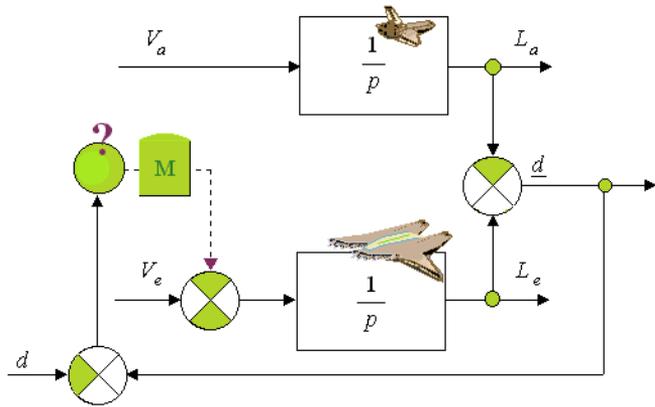


Рис. 8.6

Система взаимно-координированного движения в целом имеет второй порядок, в этом режиме модели сближения экраноплана и самолета просты, их составляют передаточные функции двух интеграторов.

Допустим, что настраиваемый программатор вырабатывает программу сближения $d = d(t)$. Локальные обратные связи, гасящие рассогласование, могут действовать избирательно или координировано. Можно гасить отличие дистанции от заданного значения коррекцией движения любого из объектов в отдельности, или провести раскладку невязки по составляющим. Появляется свобода выбора в приложении механизма обратной связи. Неопределенность отличает системы управления взаимно-координированным движением, и этим надо еще уметь пользоваться.

Для описания программ взаимного сближения используем формализм Якоби, задающий скольжение программных точек по градиентам квадратичных функций вида

$$f_h = -0.5 H h^2, \quad f_d = -0.5 D d^2,$$

дифференциальные программы линейны, т. е.

$$\dot{h} = \text{grad}(f_h) = -H h, \quad \dot{d} = \text{grad}(f_d) = -D d.$$

Выпишем, утя динамику объектов и показанную на рисунке структурную схему системы управления, полные модели каналов высоты и горизонтального сближения при посадке

$$\dot{Y} = AY, \quad \dot{X} = \Phi X + V_0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/T^2 & -2\xi/T & 1/T^2 \\ 0 & 0 & -H \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \underline{h} \\ \dot{\underline{h}} \\ \underline{h} \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ M & -M & M \\ 0 & 0 & -D \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} L_a \\ L_e \\ d \end{pmatrix}.$$

вектор смещения содержит номинальные скорости $V_0 = (V_a \ V_e \ 0)^T$.

Адаптация программ к динамике автоматически пилотируемых объектов осуществляется изменением коэффициентов квадратичных форм, регулирующих плавность их склонов, например, так

$$H = H_0 - H_1 (\underline{h} - h), \quad D = D_0 - H_1 (\underline{d} - d),$$

отрицательные значения параметров H, D аннулируются.

Знаковая политика здесь разнообразнее случая с шагающим роботом, поскольку знак при разностях координат информативен. В данном случае программы задают не столько формы траекторий, сколько темп взаимного сближения. Эта особенность заложена в раздельном рассмотрении горизонтального и вертикального маневров. Компьютерное моделирование показывает, что жесткая адаптация затягивает процесс посадки, а недостаточное приспособление программы под объект опасно тем, что начинает проявляться фугоидное движение шатла (нырок).

Упражнения (для лабораторного практикума).

Задача 1. Пусть постоянная времени канала высоты $T = 0.5$ с, коэффициент демпфирования колебаний $\xi = 0.2$. Коэффициент усиления в цепи обратной связи подсистемы горизонтального сближения $M=1$. Опорная скорость обоих объектов равна 10 м/с. Аэрокосмический самолет находится на начальной высоте 200 м. Экраноплан опережает самолет на 100 м.

Коэффициенты $H_0 = -0.8$, $D_0 = -0.5$, $H_1 = 0.02$, $D_1 = 0.2$. Стробоскопическое изображение компьютерного моделирования процесса посадки при неадаптивном и адаптивном управлениях приведено на рис. 8.7.

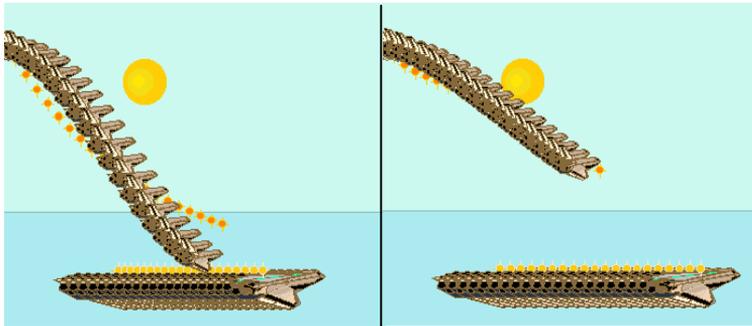


Рис. 8.7. Неадаптивное и адаптивное управление

Маркерами отмечены требуемые программами положения управляемых объектов. В данном случае экраноплан притормаживает свое движение, поджидая аэрокосмический самолет. Для начала, изменить раскладку взаимно-координированного управления, заставив экраноплан лететь с постоянной скоростью, а самолет – догонять его.

Задача 2. Составить программу снижения аэрокосмического самолета, выдерживающую заданную форму глиссады. Для этого самолет и экраноплан должны встретиться в наперед заданной точке пространства. Их программы теперь можно разделить и адаптировать друг к другу по мере выполнения общего полетного задания.

Задача 3. Предположим, что динамика аэрокосмического самолета и экраноплана в горизонтальной плоскости имеет родственные черты с динамикой подвижного робота, рассмотренного ранее.

Промоделировать траектории взаимно-координированного движения в трехмерном пространстве, разведя начальные курсы экраноплана и аэрокосмического самолета.

8.3. ЗАДАЧА ЖОНГЛЕРА С МАЯТНИКАМИ

Рассмотрим приложение метода Понтрягина к синтезу системы стабилизации массивной тележки с двумя перевернутыми маятниками на платформе, рис. 8.8. Эта задача соответствует попытке удержать на ладони в вертикальном положении две наклоненные в разные стороны указки. Фокус, казалось бы, нереальный. Так оно и есть, на самом деле, если указки одинаковы, в противном случае используется разность инерций.

Динамика объекта описывается системой линейных дифференциальных уравнений с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_1g/M & 0 & -m_2g/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+m_1/M)g/L_1 & 0 & m_2g/L_1M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m_1g/L_2M & 0 & (1+m_2/M)g/L_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ -1/L_1M \\ 0 \\ -1/L_2M \end{pmatrix}.$$

Здесь M , m_1 , m_2 – массы тележки и маятников, для примера возьмем их равными 2, 1 и 0.5 кг соответственно; L_1 , L_2 – длины маятников 1, 0.5 м; константой g обозначено ускорение свободного падения 9.81 м/с^2 .

Вектор состояния x включает в себя шесть составляющих: положение и скорость пробега тележки, следом подряд угловое положение и угловую скорость каждого маятника. Синтез регулятора заключается в решении уравнения Риккати. Стробоскопическое изображение движения системы приведено на рисунке. Первый рывок перекладывает маятники по один борт тележки, затем основание выезжает в противоположную сторону, выравнивая их по вертикали, путь назад завершает стабилизацию.

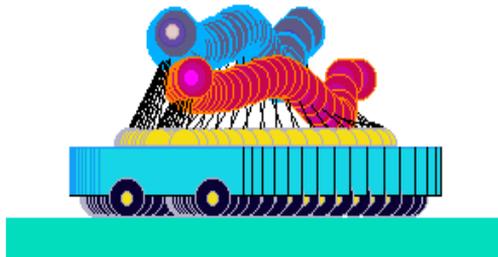


Рис. 8.8

8.3. АНАЛИЗ И СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В примерах синтеза систем программного движения объекты управления описывались линейными моделями, тем не менее, трудно заранее предвидеть плюсы и минусы коррекции настраиваемых программ: контур самонастройки вносит в уравнения нелинейность.

Принципы анализа нелинейных систем изучал около века тому назад А.М. Ляпунов. Он предложил один самых популярных ныне формализмов, с которым стоит познакомиться. В задачах на определение устойчивости движения конкретный вид траектории системы играет второстепенную роль, а значит, и формализмы Гамильтона или Якоби избыточно громоздки. Ляпунов предложил использовать тот же самый математический аппарат несколько иначе. Движение строго вдоль градиента или по линии уровня некоторой функции слишком детально описывает процесс, а значит, эту функцию и не надо строить. Спускаясь в карьер, важно каждый следующий шаг делать вниз. И тогда гарантии спуска на самое его дно обеспечены. Это наблюдение допускает математическую формализацию.

В качестве «карьера» возьмем функцию, имеющую один единственный экстремум и гладкие склоны. Это может быть квадратичная зависимость, но на ее соответствие динамике объекта делается значительное послабление. Рассматривая знак скалярного произведения между вектором фазовой скорости системы и градиентом функции Ляпунова, нетрудно анализировать устойчивость. Если на всем фазовом пространстве угол между указанными векторами остается острым, то знак скалярного произведения не меняется. Вектор фазовой скорости не касается линии уровня и направлен в направлении, ведущем систему к экстремуму. Сходные идеи использованы при доказательстве монотонной сходимости алгоритмов идентификации, но там контролируется не направление, а величина шага.

Для линейных систем указанное скалярное произведение само по себе представляет собой квадратичную форму. Это очень важное замечание, поскольку знак квадратичной формы в любой точке фазового пространства можно предсказать по ее собственным значениям. Ляпунов исследовал особенности, возникающие при анализе устойчивости нелинейных систем при помощи их линейного приближения. Оказалось, что развиваемый им подход годится для широкого круга объектов, включая и нелинейные. Далее нас будет интересовать приложение метода анализа к синтезу систем программного движения с учетом ограничений на управляющие воздействия. Заметим, что метод аналитического конструирования регуляторов наталкивается в этом случае на трудно преодолимые сложности, в частности, здесь можно получить неустойчивые экстремали.

8.4. УЧЕТ ОГРАНИЧЕНИЙ В ВИДЕ НЕРАВЕНСТВ

Обзор формул условной оптимизации предваряет исследование задач программного управления с ограничениями на управление.

1. *Смысл множителей Лагранжа.*

Рассмотрим задачу на условный экстремум функции

$$y = f(x) \rightarrow \text{extr}, \quad g(x) = b,$$

ограничения на значения вектора x заданы системой уравнений, записанных справа.

Составляем функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = f(x) + (g(x) - b)^T \lambda,$$

необходимые условия экстремума имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g^T}{\partial x} \lambda = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x) - b = 0.$$

Выясним влияние правых частей b на величину экстремума

$$\frac{dL}{db} = \frac{\partial x^T}{\partial b} \frac{\partial (f + g^T \lambda)}{\partial x} - \lambda = -\lambda.$$

Приходим к выводу, что множители Лагранжа отражают влияние элементов вектора b на величину условного экстремума. Для положительных элементов λ , например, увеличение соответствующих компонент в b приводит к уменьшению величины экстремума: $dL = -\lambda db$.

2. *Ограничения вида односторонних неравенств.*

Постановка задачи

$$y = f(x) \rightarrow \text{extr}, \quad g(x) \leq b,$$

ограничения на значения вектора x заданы системой неравенств.

Предположим, что в точке условного экстремума часть неравенств переходит в равенства, отсортируем $g(x)$, b и λ так, чтобы вторые компоненты отражали строгие равенства $g = (g_1^T \ g_2^T)^T$, $b = (b_1^T \ b_2^T)^T$, $\lambda = (\lambda_1^T \ \lambda_2^T)^T$.

Как и прежде, функция Лагранжа в точке экстремума должна быть равна $f(x)$, следовательно в ней $(g(x) - b)^T \lambda = 0$. Это означает, что если имеет место неравенство $g_1(x) < b_1$, то $\lambda_1 = 0$.

Для остальных компонент, наоборот, $g_2(x) - b_2 = 0$ и $\lambda_2 = -dL/db_2$. Все это вместе можно записать короче

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g^T}{\partial x} \lambda = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} \leq 0, \text{ но } \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \lambda_i = 0 \text{ для каждого } i.$$

2. Ограничения вида двусторонних неравенств.

Постановка задачи

$$y = f(x) \rightarrow \text{extr}, \quad a \leq g(x) \leq b,$$

ограничения на значения вектора x заданы двусторонними неравенствами.

Функция Лагранжа расширяется

$$L(x, \eta, \mu) = f(x) + (g(x) - a)^T \eta + (g(x) - b)^T \mu.$$

Так как в точке экстремума пребывание и на левой и на правой границе неравенства исключается, соответственные компоненты множителей η и μ никогда не бывают равными нулю одновременно. Вместо двух составляющих можно применить комбинированный множитель $\lambda = \eta + \mu$.

Знаковые условия разнообразятся, но не более того, точка, подозрительная на условный экстремум, удовлетворяет зависимостям

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g^T}{\partial x} \lambda = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \eta} \leq 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \mu} \geq 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \eta_i} \eta_i = \frac{\partial L}{\partial \mu_i} \mu_i = 0.$$

Условия соблюдения знаковой политики можно объединить в одно

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} \frac{\partial L}{\partial \mu} \leq 0.$$

На границах левые или правые множители Лагранжа отличны от нуля и соответствуют частным производным функции L по элементам вектора a или b , внутри разрешимой зоны они нулевые, соответственно, компоненты λ играют роль то левого, то правого отличного от нуля множителя.

8.5. ЛОКАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Пусть объект управления представлен, в общем, системой нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = F(x,t) + B(x,t)u,$$

где x , u – векторы состояния и управления.

Выпишем для него программу желаемого движения

$$\dot{x} = \Phi(x,t).$$

Определение. Программа движения называется динамически совместной по отношению к объекту тогда, когда существует вектор управления, при котором движения объекта в любой точке пространства состояний следуют предписанной программе.

Теорема 1. Условия динамической совместности объекта и программы дает критерий

$$L (\Phi(x,t) - F(x,t)) = 0, \quad L = (E - B(x,t)B(x,t)^+).$$

Доказательство. Приравняем векторы фазовых скоростей объекта и программы, отсюда получаем условие движения по программе

$$F(x,t) + B(x,t)u = \Phi(x,t), \text{ иначе } B(x,t)u = \Phi(x,t) - F(x,t).$$

Минимум квадратичной нормы разности фазовых скоростей дает нормальное псевдорешение

$$u = B(x,t)^+ (\Phi(x,t) - F(x,t)).$$

Подстановка его в исходное уравнение приводит к выписанному выше критерию. Доказательство окончено.

Утверждение банально, но сообщает пару фактов, которым можно удивиться. Во-первых, на классе линейных стационарных систем условие динамической совместности соответствует уравнениям, ограничивающим свободу собственных векторов замкнутой системы. Во-вторых, вектор фазовой скорости программы может трактоваться как градиент некоторой функции Ляпунова, тогда локально-оптимальный регулятор ориентирован на обеспечение основного условия устойчивости.

Пусть объект управления представлен системой линейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где x , u – векторы состояния и управления, на вектор управления наложены ограничения $a \leq g(u) \leq b$.

Ему соответствует программа желаемого движения

$$\dot{x} = Q(x - x_0),$$

где x_0 – состояние желаемого равновесия.

Локально-оптимальное в смысле минимума квадратичной нормы разности скоростей объекта и программы управление внутри допустимой зоны вычисляется по формуле псевдорешения

$$u = B^+ (Q - A)x - B^+ \Phi x_0.$$

Ее можно разнообразить вариантами обобщенного и взвешенного псевдорешений, но это уже легко достраиваемые детали.

Условие динамической совместности объекта и программы, а также условие совместности желаемого конечного состояния, выясненные без учета ограничений на управление, сводятся к уравнениям

$$L(Q - A) = 0, \quad L A x_0 = 0, \quad \text{где } L = (E - BB^+).$$

Они определяют степень отличия уравнений программы от уравнений объекта, а также подпространство, в котором разрешается размещать стабилизируемое конечное состояние.

Пусть программа движения несовместна с динамикой объекта. Тогда, как это следует из метода Ляпунова, нужно добиваться минимума разности векторов фазовых скоростей объекта и дифференциальной программы движения. Причин динамической несовместности может быть несколько, из них в качестве наиболее вероятных назовем дрейф параметров объекта или выход части управлений на ограничения. Выстраивается последовательная концепция синтеза регуляторов непосредственно на основе метода, используемого при анализе устойчивости. Вообще говоря, анализ и синтез систем всегда идут рука об руку. Пример дает модальное управление. Но в модальном синтезе не приходится сталкиваться с насыщением входов. Поэтому он может служить на этапе расчета матрицы замкнутой системы.

Перейдем к наиболее интересной части, в которой учитываются ограничения на управление. Функция Лагранжа на случай двусторонних неравенств составляется так

$$L(u, \eta, \mu) = f(x) + (g(u) - a)^T \eta + (g(u) - b)^T \mu.$$

где

$$f(u) = \|Q(x - x_0) - Ax + Bu\|^2.$$

На границах левые или правые множители Лагранжа отличны от нуля и соответствуют частным производным функции L по элементам вектора a или b , внутри разрешимой зоны они нулевые, соответственно, компоненты $\lambda = \eta + \mu$ играют роль то левого, то правого отличного от нуля множителя. Для каждого «зажатого» управления существует своя зона в пространстве состояний, цель дальнейших построений состоит в том, чтобы границы зон определить.

Необходимое условие минимума функции Лагранжа (после ее дифференцирования и приведения подобных членов) дает уравнение

$$B^T B u - B^T (Q(x - x_0) - Ax) + \lambda = 0.$$

Компонентам вектора управления, не находящимся на ограничениях, соответствуют нулевые компоненты внутри λ . Это позволяет вычислить свободные управления в форме нормального псевдорешения усеченной системы, где составляющие λ не фигурируют. Так как остальные управления находятся на упорах, они известны. Подставив это все в уравнение минимума, добираемся до нетривиальной части множителей Лагранжа. Их знак должен соответствовать знакам границ

$$\lambda_i < 0, \text{ если } g_i(u) = a_i, \quad \lambda_i > 0, \text{ если } g_i(u) = b_i.$$

Поскольку λ_i вычислены как линейные функции вектора состояния, последние неравенства, совокупно с ограничениями на свободные управления, и дают уравнения зон.

Результатом синтеза является система с переменной настройкой. Очевидно, что она не всегда обеспечивает движение объекта по динамически совместной программе в тех случаях, когда органы управления находятся на ограничениях. Однако всегда гарантируется движение объекта наиболее близкое к программе и движение к целевой точке по программе в зоне свободных управлений.

Рассмотрим в качестве примера объект с двумя входами и динамически совместную программу с параметрами, соответственно,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заданы ограничения в виде $|u_1| \leq 2, |u_2| \leq 2$.

Приступим к расчету локально-оптимального закона управления и границ областей пространства состояний, в которых часть или все управления неизменно находятся на упорах.

Открытая область Ω_0 : пусть $|u_1| < 2, |u_2| < 2$, тогда

$$B^T B u - B^T (Q - A) x = 0, \text{ отсюда } u = B^{-1} (Q - A) x = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x.$$

Учитывая ограничения, получаем границы $|x_1| < 1, |x_1 - x_2| < 2$.

Области Ω_{11}, Ω_{12} : пусть $|u_1| < 2, u_2 = \pm 2$.

В матрице входа индексами обозначим столбцы $B = [B_1 \ B_2]$, тогда свободное управление и множитель Лагранжа находим из

$$u_1 = B_1^+ (Q - A) x - B_1^+ B_2 u_2 = -x_1 - x_2 - u_2;$$

$$\lambda_2 = B_2^T (E - B_1 B_1^+) (Q - A) x - B_2^T (E - B_1 B_1^+) B_2 u_2 = x_1 - x_2 - u_2.$$

Учитывая ограничение на управление и правило знаков для множителя Лагранжа, получаем границы, отмеченные ниже на рисунке.

Области Ω_{21}, Ω_{22} : пусть $u_1 = \pm 2, |u_2| < 2$.

Повторяем все, но теперь зажато первое управление.

Области $\Omega_{31}, \Omega_{32}, \Omega_{33}, \Omega_{34}$: пусть $u_1 = \pm 2, u_2 = \pm 2$.

Релейное управление, вектор $\lambda = B^T (Q - A) x - B^T B u$. Из правила знаков извлекаем граничные неравенства. Результат моделирования приведен на рис. 8.9.

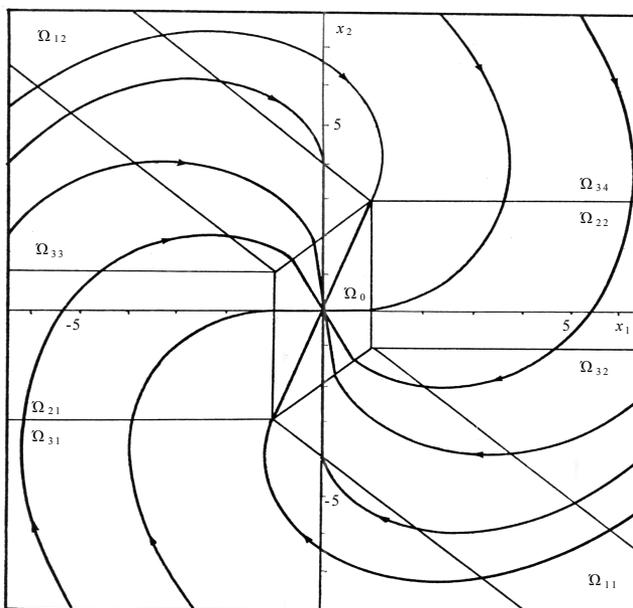
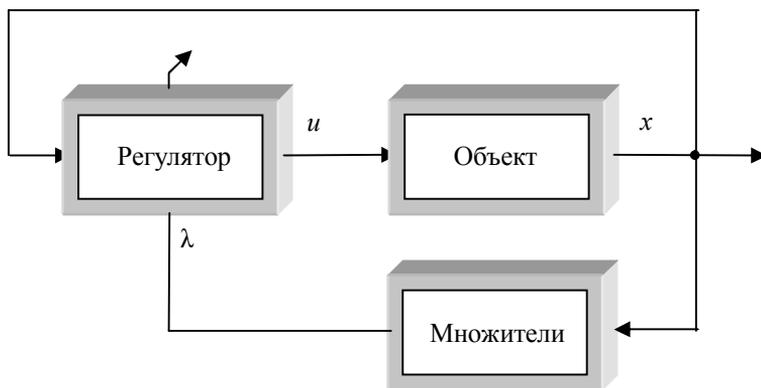


Рис. 8.9. Структура системы и фазовый портрет

Синтез локально-оптимальных систем управления преследует узкие тактические цели, отвечающие конкретным условиям. В этом смысле он проще оптимального синтеза, где минимизируется интегральный критерий качества, отвечающий за общую стратегию.

Теория оптимального управления длительное время развивалась в изоляции от относительно простых идей, навешанных методами теоретической механики. В физике определение сил и моментов, обеспечивающих движение тел по заданной траектории, называют основной или прямой задачей. Ею занимался еще Ньютон, проверяя закон всемирного тяготения. Постепенно, под влиянием теории дифференциальных уравнений, занятой, наоборот, поисками интегральных кривых, основную задачу стали именовать обратной. Оставим спор об окончательном названии затронутой темы на суд времени.

К обратным задачам динамики относится также учет ограничений на вектор состояния. Решение средствами теории оптимального управления не вызывает особого энтузиазма, поскольку при расчете ограничений приходится сталкиваться, опять таки, с искусственными сложностями. Обращаясь к методу Ляпунова, заметим, что вдоль границы, отделяющей нежелательное состояние, следует создать заслон в виде лепестка функции, порождающей дифференциальную программу движения. Градиент квадратичной функции, а вслед за ним и направляемая им система, будут обтекать препятствие, поскольку это соответствует смыслу локально-оптимального управления. Строгих гарантий такая процедура не дает, однако она может оказаться вполне инженерным методом. Его и применяют, на практике, вводя барьерные отталкивающие воздействия.

Метод Ляпунова, при всей его популярности, используют косвенно для оценки результативности некоторых эвристических приемов. Скорее, мы имеем дело все с тем же с анализом, констатирующим факт устойчивости системы после проведения в жизнь той или иной программы синтеза. Лобовое применение метода, характеризующееся прямым привлечением положенной в его основу идеи, пока не столь распространено. Между тем, рассматриваемый формализм позволяет корректно справиться с проблемами, представляющие собой задачи неразрешимой сложности для типичных оптимизационных подходов. Во всяком случае, метод аналитического конструирования регуляторов приспособить под те же цели значительно труднее.

Итак, в этой небольшой по объему главе удалось продемонстрировать в действии формализмы Гамильтона и Якоби, Понтрягина и Ляпунова. Показано, что запаса прочности идей, сложивших теоретическую механику, хватает для решения разнообразных задач управления, и деление единой науки о движении на разделы весьма условное.

ГЛАВА 9 ПРОБЛЕМА АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

9.1. УПРАВЛЕНИЕ И ИЗУЧЕНИЕ

Концепция изучения системы в процессе ее управления естественным образом возникает из особенностей реальных объектов, математические модели которых известны недостоверно или меняются в процессе эксплуатации. В самом деле, почему бы и не уточнить параметры математической модели по рассогласованию ее реакций с реакциями управляемого объекта? Общая структура адаптивной системы, содержащей начальную (жесткую) и настраиваемую модели, приведена на рис. 9.1.

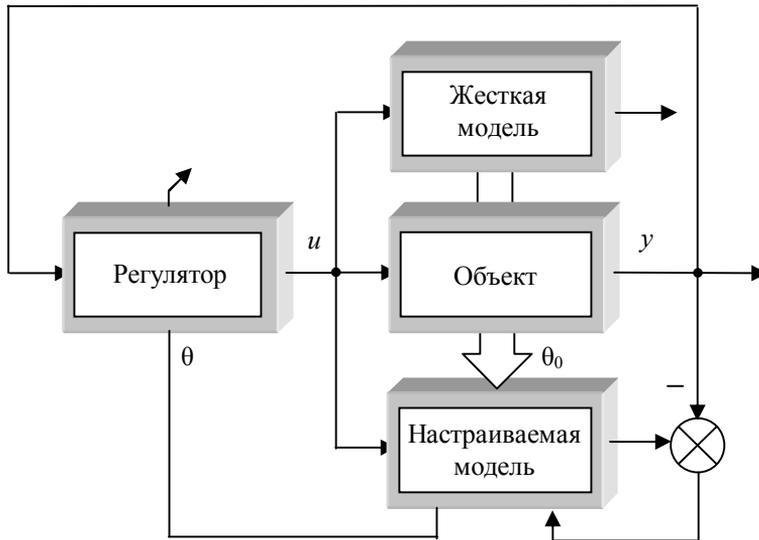


Рис. 9.1

Основной проблемой адаптивного управления является риск расхождения процессов в контуре самонастройки, которого неадаптивные регуляторы лишены вовсе. Для систем регулирования температуры теплиц эта опасность, может быть и не столь велика, поскольку риск сказывается на овощах. Но в адаптивных системах управления самолетом или атомным реактором даже ничтожно малая вероятность такого события перечеркивает все достоинства адаптационного подхода.

Заметим, что идентификация сопряжена с неприятностями вследствие обилия подобных объекту частных моделей, а не ввиду отсутствия таковых. Известно, что в темной комнате все кошки серые. Более полное представление о них дает жизненный опыт. Компьютер таковым не располагает, так что любая неопределенность разрешается им самым непредсказуемым образом. На рис. 9.2 (слева) приведена геометрическая интерпретация решения системы уравнений идентификации, напоминающая точку створа двух слабо разведенных половинок ножниц. Еще иллюстраторами теории относительности осознано, что она может двигаться со сверхсветовой скоростью. При оценивании параметров динамической системы в таких случаях возникает большой коэффициент усиления невязок измерений.

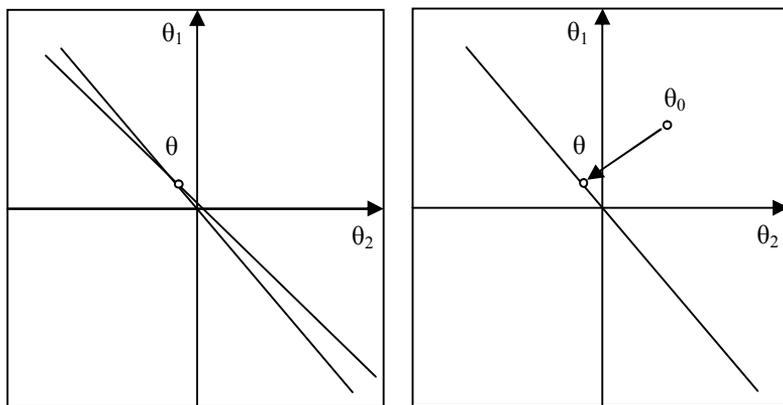


Рис. 9.2. Иллюстрация к изменению цели идентификации

Вместо того, чтобы решать плохо обусловленную систему уравнений, есть смысл изменить цель идентификации. Отбрасывая одно из уравнений, мы почти ничего не теряем, зато обретаем свободу. Важно ею разумно распорядиться. Задача поиска проекции некоторой точки θ_0 на множество возможных решений внутренне менее противоречива и, значит, более приемлема в адаптивном управлении. Жесткая система в парной схеме как бы «смотрится в зеркало», которое отражает ее постольку, поскольку вырождены уравнения параметрического оценивания. Это серьезная альтернатива традиционному подходу, компромисс между неадаптивным и адаптивным (в обычном контексте) принципами управления. Она способна вдохнуть жизнь в целое направление, простаивающее ввиду очевидной опасности, несомой контуром самонастройки.

9.2. АДАПТАЦИЯ И ХАОС

С появлением на свет теории детерминированного хаоса стало легче планировать порт прибытия лобового «адаптационного» подхода.

В зоне неидентифицируемости одному и тому же процессу в системе соответствует множество моделей, отличающихся между собой только параметрами. В хаотическом режиме, наоборот, одной и той же системе, в принципе, соответствует множество отличающихся между собой процессов. Грань между параметрами и процессами в адаптивном управлении размывается динамикой, которую придают оценке рекуррентные алгоритмы идентификации. Они утрачивают смысл (если система заведомо неидентифицируема – параметры найти нельзя), но часто не теряют своей завидной работоспособности. Идентификатор выдает оценки даже тогда, когда почва для их получения становится зыбкой. На вырожденных участках они подвержены дрейфу вследствие малейших шумов измерений.

С подачи Лоренца и Фейгенбаума ныне высоко ценятся источники хаотических колебаний. Уравнения самонастройки нелинейны, это роднит их с логистическим уравнением $x_{k+1} = ax_k - bx_k^2$, напоминающим алгоритмы накопления информации в методе наименьших квадратов и других. В сходстве черт кроется нечто большее внешнего подобия. В этой связи возникает любопытный вопрос о побочной сфере применения рекуррентных алгоритмов. До сих пор с расхождением оценок параметров в контуре адаптивного управления усиленно боролись, видя в этом только негативную сторону. Вместе с тем, если рассматривать адаптивную систему как генератор хаотических колебаний, то исследование вопросов идентифицируемости способно дать дополнительные соображения по крайне интересному вопросу, занимающему сейчас специалистов.

По указанному предмету наблюдается полярность мнений, отсутствие всеми признаваемых понятий и критериев.

Отмеченные выше детали оттеняют сложность проблемы адаптивного управления и мотивы, выдвинувшие исследование алгоритмов решения вырожденных задач идентификации методом проецирования на первое место. Затянувшаяся во времени эпоха рекуррентных алгоритмов не оставила нам богатого наследия в этой части. Известные методы регуляризации нацелены на выжимание последних капель информации, что, учитывая вполне возможный и здесь «эффект бабочки» (бабочка подняла крылышки в Пекине, а дождик пошел в Москве), несет мало шансов на успех. Поэтому в книге, помимо обзора стандартных алгоритмов идентификации, нашло отражение новое направление, подробно рассмотрены вычислительные методы нахождения общего и взвешенного псевдорешений.

9.3. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ

Теория систем не стоит на месте, а развивается через столкновение мнений и выработку новых понятий. Основы, которые в нее были заложены, напоминают строение таблицы Менделеева, содержавшей первоначально немало белых пятен. Но тем именно она и ценна, что до сих пор происходит ее заполнение. Системные свойства управляемости, наблюдаемости и идентифицируемости отражают качества трех калмановских диад, приведенных на рис. 9.3. Каждой паре диад, разумеется, соответствует особая интерпретация принципа двойственности, здесь их насчитывается несколько.

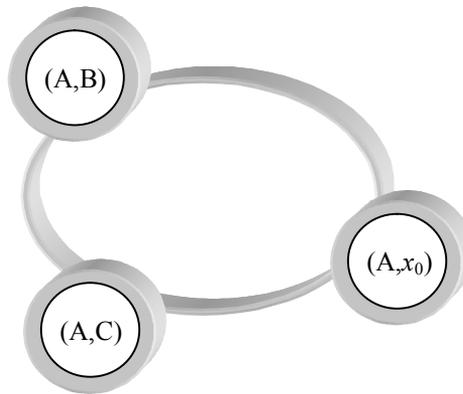


Рис. 9.3. Связь диад принципом двойственности

Рабочая нагрузка у принципа двойственности состоит в том, чтобы сокращать количество доказываемых теорем на основе косвенной связи математических моделей. Продемонстрируем это полезное качество на следующем примере.

Принцип двойственности (в идентификации). Линейная динамическая система $\dot{x} = Ax + Vi$, $x_0 = 0$ полностью управляема тогда и только тогда, когда полностью идентифицируема система $\dot{x} = Ax$, $x_0 = B$.

Доказательство банально и состоит в сравнении системных критериев. Но, более того, параметры первой системы можно найти через параметры и вектор состояния системы однородной, тем самым и общая теорема об идентифицируемости выводится следствием из принципа двойственности. Как видно, идея Калмана успешно работает.

9.4. ПРИНЦИП РАЗДЕЛЕНИЯ

Программа системных исследований, выдвинутая Калманом, заключалась в поиске ответов на вопрос, возможно ли принципиальное решение той или иной задачи автоматического управления.

Перед тем, как строить регулятор, закономерно поинтересоваться, насколько достижимы стратегические цели, которые при этом преследуются. Калман предложил системные понятия и критерии управляемости и наблюдаемости, вошедшие в русло современной теории. В адаптивных системах с идентификатором параметров объекта идентифицируемость не менее важна, чем наблюдаемость и управляемость. Адаптируемость системы можно определить через указанные три свойства, а именно: для того, чтобы динамическая система была полностью адаптируема, нужно, чтобы она была полностью наблюдаема, полностью управляема и полностью идентифицируема. Анализ условий полной идентифицируемости показывает, что полная управляемость и полная наблюдаемость системы являются *предпосылками* ее полной идентифицируемости.

Ввиду возможности решения вырожденных задач идентификации, потенциальные свойства объекта не столь важны, как это может показаться на первый взгляд. Теорию систем подкрепляет еще также принцип разделения, согласно которому оптимальные регулятор и наблюдающее устройство можно синтезировать в отдельности. Устойчивая работа объекта, наблюдающего устройства и регулятора в связке гарантируется некоторыми достаточно простыми соображениями. Не столь тривиально выглядит этот вопрос после появления идентификатора. Он вносит в контур управления нелинейность, так что прежние рецепты перестают быть действенными.

Иногда идентификатор и наблюдающее устройство соединяют по схеме «двух лжецов», когда они обмениваются недостоверной информацией. Учитывая проблемы идентификации, работоспособность схемы взаимной накачки информацией вызывает обоснованные сомнения. Скорее всего, она работать не будет, да и нет нужды прибегать к столь радикальному средству. Внимательный взгляд на особенности построения канонических форм показывает, что идентификацией параметров передаточных функций можно заниматься отдельно, не связывая ее с оценками вектора состояния. Поскольку коэффициенты передаточной функции используются затем для построения канонической формы описания системы в пространстве состояний, процесс этот *однонаправленный*.

Следовательно, несмотря на некоторые препятствия, принцип разделения господствует и здесь. Отсюда вытекает реализуемость адаптивного управления (при осторожном к нему отношении).

9.5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ

Сравнительная легкость решения задачи модального управления на случай односвязных систем (низкого порядка) долгое время служила, с одной стороны, хорошим примером и предпосылкой для поиска аналогичных решений на классе многосвязных систем, с другой стороны, она скрывала трудности темы, обусловленные множеством решений уравнений модального синтеза и неопределенностью в выборе спектра.

В традиционном исполнении модальный синтез опирается на поиск строчной канонической формы управляемости

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (\beta_0 \ \beta_1 \ \cdots \ \beta_{n-1}), \quad D = d.$$

В таком случае открывается возможность прямо влиять на коэффициенты характеристического полинома матрицы.

Считается, что задача модального синтеза давно и хорошо решена, однако при этом произошла негласная замена вопроса «*что* делать?» вопросом «*как* делать?». Широта применения теории Калмана отразилась, в свое время, в известной теореме о возможности *произвольного* размещения спектра линейными обратными связями по состоянию для вполне управляемых систем. С легкой руки маэстро подход, развиваемый для изучения предельных возможностей систем, превратился в метод модального синтеза, освещаемый большинством учебников.

Для преобразования динамической системы к канонической форме используется матрица управляемости. Вычислительная сторона дела при этом остается без внимания. Но даже не это беспокоит в распространенной процедуре модального синтеза. Расчет регуляторов многосвязных систем связан с еще большими и мало оправданными компромиссами. Ибо не секрет, что во благо относительно примитивному способу обеспечения желаемого спектра приходится жертвовать частью входов или аннулировать блоки фробениусовой матрицы канонической формы системы. Вряд ли соображения вычислительной простоты могут оправдать небрежное отношение к динамике управляемого объекта.

В общем, модальный синтез страдает рецептами простых решений довольно сложных проблем. Он получит ясную перспективу тогда, когда их обсуждение приведет к более вдумчивому отношению к назначаемому спектру и механизму его реализации.

ДОБАВЛЕНИЕ МОДАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Ирина Ефремовна Зубер

Разработанный и используемый аппарат нелинейных систем управления не включает в себя ни преобразования подобия, ни модального синтеза, этих движущих идей теории линейных систем. Теперь мы покажем, что при довольно общих и естественных предположениях именно эта часть линейного аппарата может успешно применяться для решения основных задач синтеза и, в частности, для стабилизации нелинейных объектов.

Начнем с описания нелинейных систем, задаваемых уравнением общего вида

$$\dot{x} = f(x); \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

в предположении выполнения условий существования и единственности его решения для всех возможных начальных условий. Эта система может быть переписана в векторно-матричном виде, называемом иногда квазилинейным,

$$\dot{x} = A(x) x.$$

где $A(x)$ – матрица, определяемая, как показал Е. А. Барбашин, через матрицу Якоби

$$J(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^T}, \quad A(x) = \int_0^1 J(x\omega) d\omega.$$

Нелинейную систему можно рассматривать как совокупность линейных систем с постоянными матрицами $A(x)$, где x пробегает всю область задания системы.

Будем называть спектром функциональной матрицы $A(x)$ множество спектров указанных постоянных матриц, т.е. совокупность $\lambda_i(x)$, $i=1..n$. В отличие от линейных стационарных систем, связь между спектром матрицы и свойствами соответствующей ей нелинейной системы почти не изучена. Напомним, что связь между спектром матрицы и асимптотической устойчивостью системы формулировалась в гипотезе Айзермана в начале пятидесятых годов. Рассматривалась матрица системы с одной непрерывной ограниченной нелинейностью, спектр этой матрицы располагался в левой полуплоскости. Предполагалось, что такая система асимптотически устойчива в целом – при любых начальных условиях.

Гипотеза Айзермана была опровергнута контрпримерами. С тех пор не одно поколение математиков ищет дополнительные условия, при которых эта гипотеза окажется таки справедливой.

Для решения задач анализа и синтеза нелинейных систем управления в подавляющем большинстве случаев применяется тот или иной вид их линеаризации. Однако, как показали работы Исидори и Морена, при линеаризации системы область ее притяжения (т. е. множество начальных состояний асимптотически устойчивых траекторий) уменьшается столь значительно, что может даже стянуться в точку.

Далеко не всегда удается найти преобразование системы, при котором ее уравнения принимают вид, удобный для решения поставленных задач. В линейном стационарном случае с этой целью вводится преобразование подобия, переводящее матрицу системы в каноническую форму Жордана или Фробениуса.

Для нелинейных систем управления преобразование, переводящее матрицу системы в жорданову форму, строится только для узкого класса почти эйлеровых систем. Эти системы были введены в рассмотрение И. А. Ахметгалеевым в семидесятые годы. Матрица называется почти эйлеровой, если она перестановочна со своей производной. Было показано, что такие матрицы имеют постоянные собственные векторы.

Почти эйлеровы системы (системы с матрицей указанного вида) ведут себя почти как линейные стационарные системы с дрейфующим спектром. Для них существуют постоянное преобразование подобия, приводящее матрицу системы к жордановой форме, допустимо модальное управление и справедлива гипотеза Айзермана.

Однако почти эйлеровы системы составляют лишь очень узкий класс интересующих нас нелинейных систем.

Для систем управления общего вида в литературе нет преобразования подобия, приводящего матрицу системы к жордановой форме. Последние десятилетия появились работы, в которых для нелинейных и линейных нестационарных систем приводятся достаточные условия существования и явный вид преобразований, переводящих матрицу системы к канонической форма Фробениуса.

Рассмотрим нелинейную систему, линейную относительно скалярного управления

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u.$$

Предполагается, что пара $(A(x), B(x))$ задана и непрерывно дифференцируема нужное количество раз. Допустимым полагаем управление посредством обратной связи по состоянию $u = -K(x)x$.

Определение А. Будем называть преобразование $\hat{x} = T(x)^{-1}x$ каноническим преобразованием координат первого рода, если матрица объекта преобразованной системы имеет строчную форму Фробениуса.

Определение В. Будем называть преобразование $\hat{x} = T(x)^{-1}x$ каноническим преобразованием координат второго рода, если матрица замкнутой преобразованной системы имеет строчную форму Фробениуса.

Общий вид канонических преобразований первого и второго рода и достаточные условия их существования, максимально приближенные к необходимым, содержатся в работе, еще не вышедшей из печати [72], поэтому изложим их более подробно.

Преобразованная система имеет вид

$$\dot{\hat{x}} = \underline{A}(\hat{x}) \hat{x} + \underline{B}(\hat{x}) u, \quad u = -\underline{K}(\hat{x}) \hat{x},$$

причем, в силу формулы $\dot{x} = \dot{T}(x) \hat{x} + T(x) \dot{\hat{x}}$, имеем

$$\underline{A}(\hat{x}) = T^{-1}(x)A(x)T(x) - T^{-1}(x)\dot{T}(x), \quad \underline{B}(\hat{x}) = T^{-1}(x)B(x), \quad \underline{K}(\hat{x}) = K(x)T(x).$$

Из формулы очевидно, что в отличие от линейного стационарного случая преобразование координат не приводит к подобию систем, т. е. спектры матриц $\underline{A}(\hat{x})$ и $A(x)$, в общем случае, различны.

Отметим, что явное решение задачи стабилизации нелинейных систем рассматриваемого вида обычно неизвестно. Однако если система допускает каноническое преобразование хотя бы первого рода, то можно стабилизировать преобразованную систему с использованием прямого метода Ляпунова, причем функция Ляпунова преобразованной системы формируется по аналогии с линейным стационарным случаем в виде квадратичной формы с постоянной матрицей.

Достаточным условием существования канонического преобразования координат первого рода является полная управляемость системы.

Наибольшую возможность использования аппарата линейных систем управления применительно к нелинейным системам дает каноническое преобразование второго рода.

Рассмотрим общий вид канонических преобразований. Пусть ξ – производящий вектор. Формируем вектор \hat{x} соотношениями

$$\hat{x}_1 = \xi^T x, \quad \hat{x}_2 = \frac{d\hat{x}_1}{dt}, \quad \dots, \quad \hat{x}_n = \frac{d^{n-1}\hat{x}_1}{dt^{n-1}},$$

где дифференцирование производится в силу однородной системы $\dot{x} = A(x)x$.

Тогда матрица преобразования координат задается формулой

$$T^T(x, \xi) = [\xi \mid \frac{d}{dt} \xi + L_1 \xi \mid \dots \mid \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \xi + C_n^1 L_1 \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} \xi + \dots + C_n^n L_{n-1} \xi]^{-1},$$

где C_n^j – число сочетаний из n по j , L_j^T – матрица j -ой производной вектора состояния в силу однородной системы:

$$\frac{d^k x}{dt^k} = L(x)^T_k x, \text{ т. е. } L_1^T = A(x), \quad L_k^T = \sum_i \frac{\partial L_{k-1}^T}{\partial x_i} + L_{k-1}^T A(x).$$

Таким образом, если указанные выше действия выполнимы ($\det T \neq 0$), то получен общий вид канонического преобразования первого рода. Достаточным условием существования такого преобразования является полная управляемость пары $(A(x), \xi)$.

Для того, чтобы матрица замкнутой преобразованной системы

$$Q(\hat{x}) = \underline{A}(\hat{x}) - \underline{B}(\hat{x})\underline{K}(\hat{x})$$

имела форму Фробениуса, необходимо задать производящий вектор соотношением $\underline{B}(\hat{x}) = T^{-1}(x)B(x) \equiv e_n$ (последний единичный орт).

Дифференцируя последнее тождество последовательно, формируем линейную систему относительно производящего вектора $G \xi = e_n$, тогда

$$G^T(x) = [B(x) \mid F_2(x) \mid \dots \mid F_n(x) - \sum_{j=0}^{n-1} C_n^j \frac{d^j}{dt^j} F_{n-j}],$$

где $F_k(x) = (L_{k-1}(x) - \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}) B(x)$.

Для существования канонического преобразования второго рода необходима и достаточна невырожденность $G(x)$ и, далее, $T(G(x))$. Можно показать, что выполнение этих условий гарантируется полной управляемостью пар $(A(x), B(x))$, $(A(x), e_n)$.

Предположим далее, что для нелинейной системы указанные условия выполняются. Матрица преобразованной замкнутой системы есть матрица Фробениуса независимо от вектора обратной связи, причем вектор распределения управления превратился в последний единичный орт.

Преобразование второго рода есть усиление преобразования первого рода в том смысле, что в первом случае форму Фробениуса имеет только матрица разомкнутой системы. Известно, что нелинейную систему с матрицей Фробениуса стабилизируют, используя прямой метод Ляпунова. Покажем, что справедливо более содержательное утверждение: для нелинейных систем также, как это имеет место в линейном стационарном случае, возможно решение задачи стабилизации управлением спектра фробениусовой матрицы, т. е. модальным управлением. Утверждение нетривиально, потому что, как показано выше, матрица преобразованной системы и матрица исходной системы не являются подобными.

Зададимся множеством спектров матрицы $Q(\hat{x})$ замкнутой системы $\Lambda(\hat{x}) = \text{diag}(\lambda_1(\hat{x}), \lambda_2(\hat{x}), \dots, \lambda_n(\hat{x}))^T$, собственные значения простые (т. е. попарно не совпадают между собой), отличаются от спектра матрицы разомкнутой системы $\underline{\Lambda}(\hat{x})$ и лежат в левой полуплоскости. Выберем произвольные собственные значения из этого множества и запишем спектральное разложение

$$Q(\hat{x}) = S(\hat{x})\Lambda(\hat{x})S^{-1}(\hat{x}).$$

Матрица $S(\hat{x})$ есть матрица Вандермонда, построенная на выбранных собственных значениях. Рассмотрим положительно определенную квадратичную форму

$$V(\hat{x}) = \hat{x}^T H \hat{x},$$

где $H = S^{-1}(S^{-1})^*$.

Тогда условие экспоненциальной устойчивости в целом преобразованной системы сводится для заданной скорости роста $2\alpha > 0$ к условию

$$\frac{d}{dt} V = \hat{x}^T (2\text{Re}(\Lambda(\hat{x}))) H + \frac{d}{dt} H \hat{x} < -2\alpha V.$$

Очевидно, что всегда можно выбрать спектр так, чтобы последнее неравенство выполнялось. Если выбрать спектр матрицы преобразованной системы Λ постоянным, то последнее неравенство примет вид $\text{Re}\lambda_i(\hat{x}) < -\alpha$, т.е. совпадет с условием экспоненциальной устойчивости для линейного стационарного случая. Выбранный спектр $Q(\hat{x})$ обеспечивается выбором вектора обратной связи $\underline{K} = S^{-1}M$, $M = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$.

Заметим, что попутно при этом доказано следующее нетривиальное утверждение.

Теорема (Большая Теорема модального синтеза). Для приводимой к канонической форме второго рода нелинейной системы существует и в явном виде определяется управление, при котором эта система подобна линейной стационарной системе, матрица которой имеет произвольно выбираемый спектр.

Эта теорема является естественным обобщением модальной теоремы Калмана для линейных стационарных систем. При этом мы показали, что при определенных условиях для нелинейных систем существуют нелинейные преобразования, переводящие их в линейные стационарные. Аналогичные результаты имеют место и для линейных нестационарных систем, а также нелинейных и нестационарных систем.

Отметим, что необходимые и достаточные условия существования канонического преобразования первого рода эквивалентны только условию полной управляемости пары $(A(x), B(x))$, а необходимые и достаточные условия существования канонического преобразования второго рода добавляют к уже приведенному требованию условие полной управляемости пары $(A(x), e_n)$, где e_n – последний единичный орт.

Таким образом, класс систем, для которых существует каноническое преобразование первого рода значительно шире класса систем, для которых существует каноническое преобразование второго рода.

Покажем, однако, что и для этого более широкого класса систем равномерно модальное управление. Рассмотрим сначала системы специального вида

$$\dot{\hat{x}} = \underline{A}^T(\hat{x}) \hat{x} + e_1 u, \quad u = -\underline{K}(\hat{x}) \hat{x},$$

где e_1 – первый единичный орт, матрица $\underline{A}(\hat{x})$ – матрица Фробениуса с последней функциональной строкой.

Уравнение замкнутой системы имеет вид

$$\dot{\hat{x}} = \underline{Q}(\hat{x}) \hat{x},$$

где $\underline{Q}(\hat{x}) = \underline{A}^T(\hat{x}) - e_1 \underline{K}(\hat{x})$; зададимся произвольным вектором спектра матрицы $\underline{Q}(\hat{x})$: $\lambda(\hat{x}) = (\lambda_1 \dots \lambda_n)^T$, таким, что для некоторых $\varepsilon, \delta > 0$

$$\operatorname{Re} \lambda_i(\hat{x}) < -\delta, \quad |\operatorname{Re} \lambda_i(\hat{x})| > \max\{1, \|\underline{A}(\hat{x})\|\}, \quad |\lambda_i(\hat{x}) - \lambda_j(\hat{x})| > \varepsilon,$$

индексы $i \neq j$ в условиях перебора $i, j = 1..n$.

Собственные векторы матрицы $\underline{Q}(\hat{x})$ вычисляются как

$$S_i(\hat{x}) = (\underline{A}^T(\hat{x}) - \lambda_i(\hat{x})E)^{-1} e_i, \quad i=1..n.$$

Заменяем выражение для $S_i(\hat{x})$ его приближенным значением, разлагая в ряд $(E - \underline{A}^T(\hat{x})/\lambda_i(\hat{x}))^{-1}$ и используя соотношение $(\underline{A}^T)^k e_1 = e_k$, в данном случае e_k – k -ый единичный орт.

Матрица собственных векторов $S(\hat{x})$ принимает вид

$$S(\hat{x}) = W(\lambda) \text{diag}(\lambda)^{-1} + \Delta_S,$$

где $W(\lambda)$ – матрица Вандермонда, построенная на величинах, обратных собственным значениям, $\|\Delta_S\| = O(\|\lambda\|^{-(n-1)})$.

Введем в рассмотрение положительно определенную квадратичную форму $V(\hat{x}) = \hat{x}^T N \hat{x}$, где $N = S^{-1} (S^{-1})^*$, и ее производную в силу системы $dV/dt = \hat{x}^T L(\lambda, \hat{x}) \hat{x}$.

Отрицательная определенность матрицы $L(\lambda, \hat{x})$ обеспечивается выполнением неравенства $SS^*Q^T + QS^*S < -\alpha SS^*$, где $\alpha > 0$.

Полагаем теперь, что мы выбрали собственные значения постоянными. Тогда условием экспоненциальной устойчивости системы является выполнение неравенства $2S \text{diag}(\text{Re } \lambda) S^* < -\alpha SS^*$. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема. Пусть в системе

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, \quad u = -K(x)x$$

пара $(A(x), B(x))$ вполне управляема и равномерно ограничена вместе со своими частными производными, $T(x)$ – матрица управляемости.

Тогда система, полученная из исходной каноническим преобразованием первого рода $\hat{x} = T(x)^{-1}x$ стабилизируется априорным выбором спектра матрицы замкнутой системы и соответствующим модальным управлением.

В условиях предыдущей теоремы можно сделать обобщение, раскрывающее практический смысл канонических преобразований первого рода.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое модальное управление преобразованной системы $u = -\underline{K}(\hat{x})\hat{x}$, что исходная замкнутая система подобна системе с матрицей $\underline{Q} + R$, где \underline{Q} – постоянная матрица с произвольно назначаемым спектром, $\|R\| < \varepsilon$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ

1. *Вернадский В.И.* Размышления натуралиста. – М.: Наука, 1977.
2. *Винер Н.* Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. – М.: Советское радио, 1958.
3. *Клайн М.* Математика. Поиск истины. – М.: Мир, 1988.
4. *Кудрявцев П.С.* История физики. – М.: Учпедгиз, 1948.
5. *Курант Р., Дейвис Ф., Клайн М.* и др. Математика в современном мире. – М.: Мир, 1967.
6. *Карцев В.Л.* Приключения великих уравнений. – М.: Знание, 1986.
7. *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики. – М.: Наука, 1978.
8. *Пирс Дж.* Электроны, волны и сообщения. – М.: Физматлит, 1961.
9. *Эшби У. Р.* Введение в кибернетику. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959.

МАТРИЦЫ И ВЫЧИСЛЕНИЯ

10. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969.
11. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984.
12. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц – М.: Наука, 1967.
13. *Голуб Дж. Х., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. – М.: Мир, 1999.
14. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. – М.: Наука, 1984.
15. *Крылов А.Н.* О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты колебаний материальных систем, ИАН, Физматлит, 1931. С. 491–539.
16. *Ланкастер П.* Теория матриц – М.: Наука, 1982.
17. *Лоусон Ч., Хенсон Р.* Численное решение задач метода наименьших квадратов. – М.: Наука, 1986.
18. *Уилкинсон Дж.* Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1970.
19. *Уилкинсон Дж., Райнш К.* Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра. – М.: Машиностроение, 1976.
20. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

21. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1971.
22. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965.
23. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1970.

МЕХАНИКА

24. *Айзерман М.А.* Классическая механика. – М.: Наука, 1980.
25. *Зоммерфельд А.* Механика. – М.: Ин. лит., 1947.
26. *Корнев Г.В.* Введение в механику человека. – М.: Наука, 1977.
27. *Корнев Г.В.* Очерки механики целенаправленного движения. – М.: Наука, 1980.
28. *Ляпунов А.М.* Лекции по теоретической механике. К.: Наук. думка, 1982.

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ

29. *Ройтенберг Я.И.* Автоматическое управление. – М.: Наука, 1978.
30. Справочник по теории автоматического управления /Под ред. *А.А. Краковского*, –М.: Наука, 1987.

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

31. *Аоки М.* Оптимизация стохастических систем. – М.: Наука, 1971.
32. *Ту Ю.* Современная теория управления. – М.: Машиностроение, 1971.

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

33. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматгиз, 1961.
34. *Сю Д., Мейер А.* Современная теория автоматического управления и ее применение. – М.: Машиностроение, 1972.

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ

35. *Игнатьев М.Б.* Голономные автоматические системы. – М.: Изд-во АН СССР, 1963.
36. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. – М.: Наука, 1966.
37. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.: Гостехиздат, 1947.

СИСТЕМНЫЕ КРИТЕРИИ И КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ

38. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. – М.: Наука, 1976.
39. *Балонин Н.А., Мироновский Л.А.* Линейные операторы динамической системы // *АиТ. 2000* (в печати).
40. *Балонин Н.А., Попов О.С.* Критерии идентифицируемости линейных динамических систем // *Приборостроение. 1986. № 4. С. 25–29.*
41. *Балонин Н.А., Попов О.С.* Критерии идентифицируемости линейных стационарных и нестационарных динамических систем // *Приборостроение. 1994. № 1. С. 22–27.*
42. *Калман Р.* Об общей теории систем управления. Труды 1 Конгресса ИФАК. – М.: Изд. АН СССР, т. 2. 1961. С. 521–547. [*Kalman R.E. On the General Theory of Control System // Proc. of 1st IFAC Congress, Moscow, 1960.*]
43. *Мироновский Л.А.* Аналоговые и гибридные модели динамических систем. Учебное пособие в двух частях/ЛИАП –Л., Ч.1 1985, Ч2 1986.

МОДАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ

44. Автоматизированное проектирование систем управления. /Под ред. *М. Джамшиди и Ч. Дж. Хергета* – М.: Машиностроение, 1989.
45. *Балонин Н.А., Попов О.С.* Синтез систем модального управления на основе мер модального доминирования // *Техническая кибернетика. 1992. № 6. С. 89–93.*
46. *Кузовков Н.Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. – М.: Машиностроение, 1976.

ДИАГНОСТИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

47. *Мироновский Л.А.* Функциональное диагностирование динамических систем. – СПб.: МГУ–ГРИФ, 1998.

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

48. *Балонин Н.А., Мироновский Л.А.* Флип-метод определения сингулярных функций ганкелева оператора и оператора свертки //Автоматика и телемеханика. 1999. № 11. С. 3–18.
49. Balonin N.A., Gusev S.V. Experiments with the regularized adaptive control algorithms //Proc. of the Second Russian-Swedish Control Conference. Russia, Saint-Petersburg, 1995. P. 70–72.
50. *Грон Д.* Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979.
51. *Клейман Е.Г.* Идентификации нестационарных объектов. //Автоматика и телемеханика. 1999. № 10. С. 3–45.
52. *Ли Р.* Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. – М.: Наука, 1966. [Lee R.C.K. Optimal Estimation, Identification and Control, MIT Press, Cambridge, Mass., 1964.]
53. *Савитский С.К.* Инженерные методы идентификации энергетических объектов. Л.: Энергия, 1978.
54. Современные методы идентификации систем /Под ред. *П. Эйххоффа.* – М.: Мир, 1983.
55. *Эйххофф П.* Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975.
56. *Цыпкин Я.З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. – М.: Наука, 1968.
57. *Якубович В.А.* К теории адаптивных систем. ДАН СССР. т. 182, 1968. № 3. С. 518–521.

РЕШЕНИЕ ВЫРОЖДЕННЫХ ЗАДАЧ

58. *Альберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977.
59. *Балонин Н.А., Попов О.С.* Идентификация параметров систем в режиме их нормального функционирования //Автоматика и телемеханика. 1992. № 8. С. 98–103.
60. *Балонин Н.А., Попов О.С., Гусев С.А.* Элементы искусственного интеллекта в адаптивном управлении //Автоматика и телемеханика. 1994. № 4. С. 114–123.
61. *Балонин Н.А., Габитов Е.А.* Численные алгоритмы идентификации параметров систем в режиме нормального функционирования //Автоматика и телемеханика. 1997. № 2. С. 140–146.
62. *Беклемишев Д.В.* Дополнительные главы линейной алгебры. – М.: Наука, 1983.

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

63. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959.
64. *Попов Е.П.* Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1979.
65. *Воронов А.А.* Основы теории автоматического управления. Особые линейные и нелинейные системы. – М.: Энергоиздат, 1981.

ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ, ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

66. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970.
67. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950.

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

68. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф. Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. – М.: Изд-во АН СССР, 1963.
69. *Гантмахер Ф.Р., Якубович В.А.* Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем. /Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Обзорные доклады. Вып. 1. – М.: Наука, 1965. С 30–63.
70. *Якубович В.А.* Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем, ч. I, II //Автоматика и телемеханика. 1964 № 7, 1965 № 4.
71. *Zuber I.E.* Stabilization of Nonlinear Systems by Similarity Transformations //Jour. of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. v. 11:4. 1988, PP. 519–526.

МОДАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

72. *Зубер И.Е.* Спектральная стабилизация нелинейных систем на основе специального преобразования подобия. //Вестник СПбГУ, сер.1. 2000 г. (в печати)
73. *Ахметгалеев И.И., Корнев В.А., Ситзикова Э.А.* и др. Условия устойчивости и оценка области притяжения нелинейных систем с использованием почти эйлеровых матриц /В кн. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости и его приложения. Новосибирск: Наука, 1981. С. 137–151.

Cut-outs: Movement

