

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Глава 1.	
Систематизация линейных операторов динамических систем	7
1.1. Ассоциированные линейные операторы.....	7
1.2. Поиск симметричных или самосопряженных частей.....	8
1.3. Мультипликативное симметрирование систем.....	15
1.4. Аддитивное симметрирование систем.....	18
1.5. Симметрия собственных функций.....	23
1.6. Примеры экспериментов с симметричными операторами.....	25
1.7. Выводы.....	29
Глава 2.	
Аналитические методы поиска сингулярных функций	30
2.1. Спектральные свойства на ограниченном интервале времени.....	30
2.2. Сингулярные функции динамических систем.....	33
2.3. Свойства сингулярных функций.....	40
2.4. Поиск сингулярных функций на основе частотного подхода.....	51
2.5. Графо-аналитический метод исследования.....	60
2.6. Выводы.....	62
Глава 3.	
Экспериментальные методы поиска сингулярных функций	63
4.1. Основные понятия и определения.....	63
4.2. Содержание флип-метода в натурном эксперименте.....	65
4.3. Распространение флип-метода на другие операторы.....	73
4.4. Примеры применения флип-метода.....	80
4.5. Идентификация на основе сингулярных функций.....	86
4.6. Выводы.....	98
Заключение	99
Библиография	101

Введение.

Монография посвящена сингулярным и собственным функциям линейных динамических систем. Для становления линейной теории операторов большое значение сыграли матрицы. У матриц, как известно, есть собственные числа и собственные векторы. Теорию матриц невозможно представить без этих фундаментальных понятий, а книги по вычислительной математике – без соответствующего раздела об алгоритмах их нахождения.

Теория линейных динамических систем использует свойства аддитивности и суперпозиции менее активно. Линейная динамическая система, будучи естественным обобщением теплицевых и ганкелевых матриц, размещена в той части линейной теории, в которой нет собственных чисел и соответствующих им собственных функций. Хотя и то и другое характерно для иллюстрации наиболее важных свойств линейных операторов, редкий специалист по теории управления укажет, не задумываясь, собственную функцию элементарного динамического звена. Более того, само это понятие – собственная функция динамической системы (в отличие от импульсной и переходной характеристик) – не относится к общепринятым научным сообществом. Пояснить создавшееся положение можно следующим.

В теории матриц есть так называемые жордановы цепочки векторов. Жорданова цепочка включает собственный вектор, поэтому любая матрица имеет как минимум один собственный вектор. У бесконечномерных систем такая цепочка может быть легко построена, но не найдя завершения, она упускает самое важное – собственную функцию. Линейные динамические системы не повторяют по форме входной сигнал, долгое время считалось, что они собственных функций не имеют. Некоторый рудимент собственной функции, возможно, представляет собой дельта сигнал, поскольку реакция на него, т.е. импульсная весовая функция, по отношению амплитуд ничтожна, система имеет почти нулевое собственное значение.

В качестве собственных функций рассматривают гармонические сигналы, взятые на бесконечном интервале времени. Согласиться с этим толкованием сложно, так как, не меняясь по форме, они смещаются во времени: линейная динамическая система вносит фазовый сдвиг. На бесконечном интервале конечное смещение смотрится ничтожным, тем не менее, как и в случае с попыткой обобщения собственного вектора перед нами, скорее, некоторый рудимент собственной функции, чем сама эта собственная функция.

Наличие таких рудиментарных остатков важно подчеркнуть, потому что жордановы цепочки функций могут строиться от импульсной весовой функции (при нулевом собственном значении) и играть свою роль в теории линейных динамических систем, образуя жорданов базис, до сих пор редко используемый. Едва ли есть сомнения в важности такого базиса у матриц. Гармонические сигналы тоже, как будет показано далее, ничуть не выпадают из теории, рассматривающей более подробно переход от конечного к бесконечному интервалам времени. На конечном интервале времени у гармонических функций есть аналоги, отличающиеся от них, но имеющие с ними общую природу. В теории сигналов такой переход изучен, в теории систем такая точка зрения нова и исследуется в данной книге.

Кроме собственных векторов у матриц есть еще сингулярные векторы. Гармоническая функция, характерная для частотного анализа, ближе к этому понятию, чем к собственному вектору, с ней связан коэффициент усиления энергии сигнала. Теория матриц дает на интересующий нас случай вполне прозрачную иллюстрацию. Матрицы теплицевой и ганкелевой структуры тесно связаны между собой, это почти одно и то же: симметричная ганкелева матрица порождается из теплицевой структуры перестановкой столбцов. При этом, как и любая другая симметричная матрица, ганкелева матрица имеет набор вещественных собственных значений и собственных векторов.

Для линейных динамических систем довольно все равно, в каком именно направлении времени рассматривать их входной или выходной сигнал. Инвертируя время на входе или на выходе динамической системы, получим аналог симметричной ганкелевой структуры, естественно имеющей вещественные собственные числа и соответствующие им собственные функции. Собственные векторы или функции ганкелевой структуры являются сингулярными для структуры теплицевой, таким образом, выбор названия таких сигналов, дело вкуса.

Никакой путаницы понятие *сингулярной функции динамической системы* не вызывает, поскольку такая функция – атрибут системы, это не свойство самого сигнала. Понятие сингулярной функции (безотносительно к системе) в теории функций занято, в частности, дельта-функцией и сходными с ней функциями. Тем не менее, совершенно незачем сингулярный вектор матрицы обобщать каким-либо еще иным наименованием, кроме как сингулярная функция динамической системы.

Памятуя о безразличии в выборе направления времени для самого определения динамической системы, такие функции можно называть и собственными, что проще и будит меньше возражений. Дело, разумеется, не в выборе удачного наименования, хотя и это важно.

Коль скоро собственные числа и собственные функции у линейной динамической системы все-таки существуют, и значение их столь же важно для теории динамических систем, как и для теории матриц, возникает потребность в численных и аналитических методах их нахождения. Теория матриц располагает обширным арсеналом численных методов, есть труды, вошедшие в классику мировой литературы. С некоторыми оговорками и поправками, численные методы для матриц могут быть использованы для приближенного нахождения собственных функций динамических систем. Но важны и самостоятельные точные методы решения такой задачи.

В отличие от матриц, линейная динамическая система, в зависимости от условий эксперимента с ней, выступает в весьма различных своих ипостасях. Помимо упомянутой инверсии направления времени, входной и выходной сигналы можно рассматривать на частично совмещенных или непересекающихся интервалах времени. Типичные задачи старта ракеты или броска дискобола используют постановку, в которой интервал управления предшествует интервалу наблюдения выходного сигнала. Линейный оператор получается более простым, чем в случае полностью или частично пересекающихся интервалов, задача поиска ганкелевых собственных функций математически тривиализируется и не требует в решении больших вычислительных затрат.

Передаточная функция динамической системы, это изображение по Лапласу сигнала – реакции системы на дельта-функцию. Ганкелевы функции передаточной функции динамической системы постулированы, их можно найти в книге Гловера [125].

Теория динамических систем и теория сигналов – две смежные тесно пересекающиеся области знаний. В теории сигналов сложились представления о непрерывном и дискретном спектрах, а также об их взаимосвязи (когда один спектр аппроксимирует другой). Термин "дискретные" по отношению к системам заметно прижился в том, что касается динамических процессов. Привычным является деление общей теории на теорию непрерывных и дискретных динамических систем, причем вторая ее часть развивалась позднее под влиянием первой более продвинутой части.

Спектральные характеристики линейных динамических систем известны, прежде всего, как непрерывные амплитудная частотная и фазовая характеристики (АЧХ и ФЧХ), значение которых столь существенно в теории, что не нуждается в комментариях. На их основе формулируется критерий устойчивости Найквиста. Однако дискретные частотные характеристики (ДЧХ) систем – это другая иная ипостась науки о динамике, рассмотрим ее ниже.

Глава 1.

Систематизация линейных операторов динамических систем

1.1. Ассоциированные линейные операторы

Стандартным средством описания линейных динамических систем является оператор свертки. Он характеризует отображение множества входных сигналов, воздействующих на систему на интервале времени $(0, T)$, в множество выходных сигналов, рассматриваемых на том же самом интервале. Такой оператор отвечает режиму работы систем в реальном времени, типичному для большинства задач теории автоматического управления и теории электрических цепей.

Однако для ряда задач, например в тех случаях, когда интервалы управления и наблюдения не совпадают, оказывается удобным использовать иные операторы, например ганкелев оператор, операторы управления, наблюдения и другие [20, 82]. На деле, нельзя ограничить круг линейных операторов, применяемых для описания одного и того же динамического объекта. Даже относительно небольшие изменения в условиях подачи и снятия сигнала сказываются на свойствах оператора линейной динамической системы.

Настоящая глава описывает и систематизирует ряд операторов, ассоциированных с линейной динамической системой и обладающих разными видами симметрии. При этом наряду с обычной рассматривается симметрия ганкелева и теплицева типа, а также некоторые виды скрытой симметрии. Симметричные системы часто наделены уникальными свойствами, кроме того, через них лежит путь к решению некоторых экстремальных задач, в особенности, изопериметрических задач и задач на условный экстремум.

Для построения новых операторов предлагается использовать подход, основанный на симметрировании исходного оператора. При этом под симметрированием понимается выявление скрытой симметрии оператора либо выделение его симметричных компонент.

В линейной алгебре и теории операторов существуют мультипликативная и аддитивная процедуры выделения симметричных частей линейных операторов. В них используется представление оператора в виде суммы симметричной и кососимметричной составляющих, а также полярное разложение. Далее показывается, что для линейных динамических систем обе процедуры могут быть выполнены с помощью так называемого флип-оператора, осуществляющего переход к обратному времени. Этим обеспечивается простота их технической реализации.

Комбинирование результатов позволяет получить на основе исходного оператора, например, оператора свертки, семейство линейных операторов, обладающих разными типами симметрии.

1.2. Поиск симметричных или самосопряженных частей

Наиболее глубокие результаты теории операторов получены для самосопряженных систем. Это объясняется тем, что они обладают высокой степенью симметрии, характеризуемой равенством $A = A^*$.

Многие операторы, возникающие при исследовании линейных динамических систем, не являются симметричными в указанном классическом смысле. Типичным примером служит оператор свертки, а также операторы управления и наблюдения. Поэтому представляет интерес задача симметрирования этих операторов, т.е. перехода от них к симметричным или самосопряженным операторам, сохраняющим те или иные свойства исходных операторов.

Сначала остановимся на мультипликативном подходе к выделению симметричной части линейного оператора. Он опирается на хорошо известное полярное разложение операторов согласно формуле

$$A = H_1 O_1 = O_2 H_2, \quad (1.2.1)$$

где A – исходный оператор, O_1 и O_2 – ортогональные (изометрические) операторы, H_1 и H_2 – симметричные или самосопряженные операторы.

Указанные операторы могут быть найдены из соотношений

$$H_1^2 = A A^*; \quad H_2^2 = A^* A; \quad O_1 = H_1^{-1} A; \quad O_2 = A H_2^{-1}.$$

Симметричные операторы H_1 и H_2 наследуют ряд важных свойств оператора A , в частности, имеют те же сингулярные числа (и, следовательно, спектральные нормы), а их сингулярные функции связаны простой зависимостью. Заметим, что если не требовать положительной определенности H_1 , H_2 , то указанное разложение не единственно, т.е. существует много полярных разложений одного и того же оператора (по числу квадратных корней из самосопряженных операторов $A A^*$ и $A^* A$).

Проиллюстрируем этот подход на примере оператора свертки S , когда линейный стационарный объект описывается формулой

$$y(t) = S u(t) = \int_0^t q(t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad (1.2.2)$$

где S – оператор свертки; $q(t)$ – его импульсная весовая функция; $u(t)$, $y(t) \in L_2(0, T)$ – входные и выходные скалярные сигналы, определенные на ограниченном интервале $t \in (0, T)$.

Анализ операторов системы упрощается после приведения уравнений динамического объекта к дискретной матричной форме

$$\mathbf{y}=\mathbf{Q}\mathbf{u},$$

где векторы $\mathbf{u}(t)=[u(t_0),u(t_1),\dots,u(t_N)]^T$ и $\mathbf{y}(t)=[y(t_0),y(t_1),\dots,y(t_N)]^T$ содержат выборки входного и выходного сигналов, взятые с шагом h ; $t_0=0$, $t_N=T$, $h=T/N$.

Ненулевые элементы матрицы \mathbf{Q} пропорциональны отсчетам импульсной весовой функции $q(t)$

$$\mathbf{Q} = h \begin{pmatrix} q(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ q(t_1) & q(t_0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q(t_N) & q(t_{N-1}) & \dots & q(t_0) \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{[Графическое изображение матрицы Q]} \end{matrix} \quad (1.2.3)$$

В таком случае оператор свертки представлен нижнетреугольной матрицей \mathbf{Q} с одинаковыми элементами на каждой из диагоналей. Тем самым, данная матрица является теплицевой и, следовательно, симметричной относительно побочной диагонали. Такая матрица может быть изображена также в виде картинки, дающей представление о непрерывной модели линейной динамической системы. Численные значения элементов соотнесены здесь со светимостью пикселей изображения так, чтобы минимальные значения матрицы давали наименьшую светимость (правый верхний треугольник не закрашивается). Графическое изображение – равноправная математическая модель динамической системы, наряду с дифференциальным или интегральным уравнениями ее. Динамическая система, как картинка, непривычна, но это так.

Среди различных полярных разложений теплицевых матриц есть одно особенно простое. Структура его ясна из следующего утверждения.

Любая вещественная теплицева матрица может быть представлена в виде произведения ганкелевой и перестановочной матриц, причем ганкелева получается путем вращения теплицевой на 90 градусов, а перестановочная – путем вращения единичной на 90 градусов.

Например, для матрицы

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

существуют левые полярные разложения со следующими матрицами \mathbf{H}_1 :

$$\begin{bmatrix} 0,6487 & 0,5425 & 0,5338 \\ 0,5425 & 1,4537 & 1,6101 \\ 0,5338 & 1,6101 & 3,3351 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,3252 & 0,8414 & 0,4316 \\ 0,8414 & 1,1774 & 1,7046 \\ 0,4316 & 1,7046 & 3,3027 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -0,3235 & 0,2989 & 0,8978 \\ 0,2989 & 0,7237 & 2,0945 \\ 0,8978 & 2,0945 & 2,9677 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Все они симметричны, но лишь последняя из них является ганкелевой и совпадает с исходной с точностью до вращения. Заметим, что она не положительно определена.

Ей отвечает перестановочная матрица

$$\mathbf{O}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Соответствующие представления для оператора свертки имеют вид $S = H_1 F = F H_2$, где F – оператор, осуществляющий перенумерацию отсчетов сигнала в обратном порядке; H_1 и H_2 – симметричные операторы ганкелева типа, матрицы их дискретного представления имеют вид

$$H_1 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad H_2 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

Технически реализацию указанных ганкелевых операторов можно осуществить, добавляя ко входу или к выходу динамической системы блок, реализующий оператор зеркального отображения функции во времени относительно середины временного интервала $(0, T)$.

Оператор, осуществляющий переход к обратному времени, будем называть флип-оператором (от англ. flip – разворот) и обозначать как F . Его действие на непрерывный сигнал поясняется рис. 1.2.1.

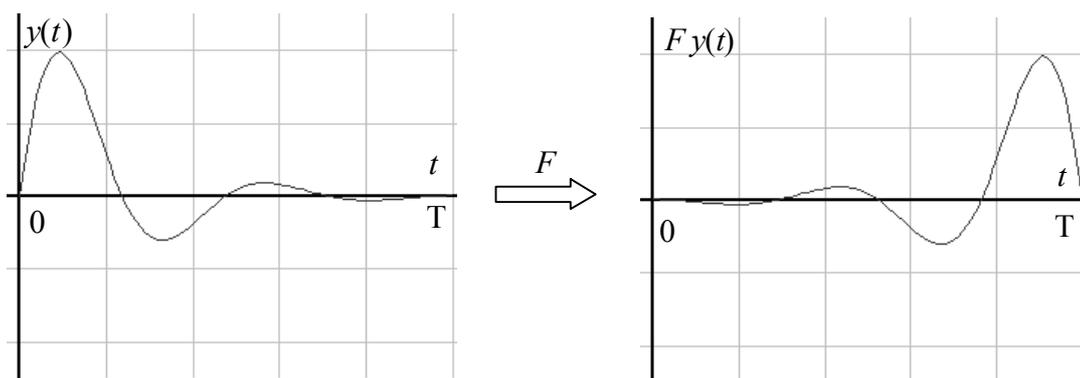


Рис. 1.2.1. Действие флип-оператора на непрерывный сигнал.

Целесообразность введения ганкелевых операторов H_1, H_2 поясним на следующем примере. Рассмотрим на множестве линейных систем отношение изометрической эквивалентности, а именно, будем считать две системы S_1 и S_2 изометрически эквивалентными, если их операторные нормы совпадают. Отношение обладает свойствами симметричности, рефлексивности и транзитивности, т.е. является отношением эквивалентности

$$S_1 \sim S_2 \Leftrightarrow \|S_1\| = \|S_2\|.$$

Нетрудно убедиться, что системы с операторами H_1 и H_2 изометрически эквивалентны системе S в смысле любой из операторных p -норм, как в конечномерном пространстве R^n , так и бесконечномерных пространствах L_1, L_2, H_∞ .

Более того, поскольку действие флип-оператора сохраняет форму непрерывных сигналов с точностью до зеркального отображения, у этих трех операторов будут совпадать (с той же оговоркой) и входные сигналы, на которых достигаются эти нормы. Это означает, что для решения задач, связанных с отысканием норм операторов и экстремальных сигналов, на которых достигаются нормы, можно вместо оператора свертки S использовать симметричные операторы H_1, H_2 , более просто устроенные с точки зрения классической теории операторов.

Оператор свертки является оператором типа Вольтерра с нулевым спектром и на конечном интервале не имеет собственных функций. Для нахождения его сингулярных функций требуется решать двухточечную краевую задачу, доставляющую серьезные трудности уже в случае систем второго порядка. В то же время спектр операторов H_1, H_2 вещественный, а собственные функции ортогональны. Изометрическая эквивалентность операторов H_1, H_2 и S свидетельствует о том, что сингулярные функции оператора свертки совпадают с собственными функциями симметрированных операторов.

Для отыскания собственных функций может быть использован итерационный метод, сущность которого иллюстрирует схема, приведенная на рис. 1.2.2.

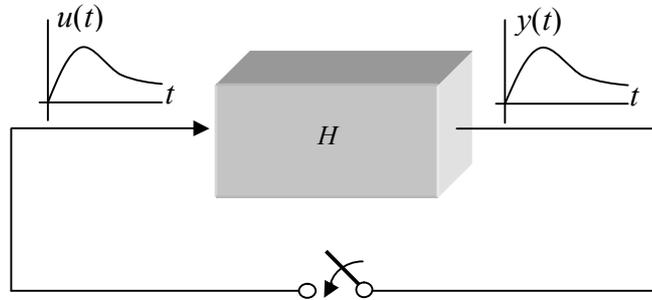


Рис. 1.2.2. Процедура нахождения собственных функций.

Согласно схеме, для отыскания собственной функции симметричного оператора H , его нормированная реакция $y(t)$ итерационно подается на вход в качестве нового входного сигнала $u(t)$.

Через несколько итераций в контуре устанавливается сигнал, соответствующий главной собственной функции оператора (после ее исключения из выходного сигнала можно последовательно найти и остальные собственные функции). В теории матриц аналогичные итерационные процедуры используются для нахождения или уточнения собственных векторов.

Допустим, начальный вектор состоит из суммы собственных векторов. После умножения на матрицу сумма содержит уже взвешенные компоненты – собственные векторы с собственными значениями при них. Второе умножение дает в качестве весовых коэффициентов квадраты собственных значений. При достаточном числе таких итераций главный собственный вектор становится превалирующим вектором суммы. Это обстоятельство используется, например, в цепях Маркова, где ищется главный собственный вектор. Условия сходимости итерационного процесса дает теория операторов.

1.3. Мультипликативное симметрирование систем

При переходе от оператора свертки к операторам H_1 и H_2 был использован флип-оператор F . Отметим некоторые его свойства. Ближайший матричный аналог флип-оператора, к которому он сводится при дискретизации процессов на входе и выходе системы – это оператор, описываемый матрицей перестановок с единичными элементами на побочной диагонали.

Правое (левое) умножение матрицы перестановок на произвольную матрицу приводит к зеркальному отражению последней относительно вертикальной (горизонтальной) оси, то есть к своеобразному вертикальному или горизонтальному “транспонированию”.

Флип-оператор обладает целым рядом специальных свойств: он симметричен $F = F^*$, ортогонален $F^* = F^{-1}$ и инволютивен $F^2 = E$, где E – тождественный оператор. Отсюда вытекает, что собственные числа флип-оператора вещественны и по модулю равны единице, то есть его спектр сосредоточен в точках ± 1 . Множество собственных функций флип-оператора, отвечающих собственным числам $+1$, образовано всеми функциями, заданными на интервале $(0, T)$ и симметричными (четными) относительно середины этого интервала, а множество собственных функций, отвечающих собственным числам -1 , образовано всеми кососимметричными (нечетными) функциями. В конечномерном случае число четных собственных векторов равно или больше на единицу числа нечетных.

Флип-оператор допускает экспоненциальное представление вида $F = e^{i\Phi}$, где симметричный оператор Φ определяется формулой $\Phi = \pi(E - F)/2$. Матрица дискретного представления оператора Φ имеет крестообразную структуру – все ее ненулевые элементы расположены на главной и побочной диагоналях.

В силу изометричности флип-оператор не меняет энергии преобразуемых сигналов, а также их классических норм. Это качество позволяет образовывать с помощью флип-оператора F эквивалентные по норме комбинированные операторы типа FS, SF, FSF .

Заметим, что к операторам, изометрически эквивалентным исходному, относится и сопряженный оператор. В связи с этим возникает вопрос, а не находится ли среди комбинированных операторов, изометрически эквивалентных оператору свертки S , сопряженный оператор S^* . В общем случае это не так. Однако для линейных стационарных динамических систем ответ оказывается положительным: использование двух флип-операторов (на входе и на выходе объекта) преобразует оператор свертки в сопряженный оператор, т.е. имеет место операторное равенство

$$S^* = FSF. \quad (1.3.1)$$

Отметим, что возможность такого простого представления оператора S^* обусловлена наличием внутренней симметрии, присущей оператору свертки линейной стационарной динамической системы. Эта симметрия носит теплицев характер и хорошо видна из структуры матрицы \mathbf{Q} (1.2.3).

Следуя терминологии работы [127], мы имеем здесь дело с так называемой скрытой симметрией.

В случае матриц обычная симметрия вводится с помощью операции транспонирования $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Если же это равенство выполняется с точностью до перестановки столбцов, то такая симметрия называется скрытой. В нашем случае матрица \mathbf{Q}^T может быть получена из матрицы \mathbf{Q} перестановкой столбцов в обратном порядке (“транспонированием” относительно вертикальной оси). Из формулы (1.3.1) вытекает простой путь получения реакции сопряженного объекта на известное входное воздействие, при котором знание математического описания объекта, в принципе, не требуется.

Его реализация в составе более сложного комбинированного оператора иллюстрируется схемой, показанной ниже на рис. 1.3.1. Через u и y на ней обозначены входной и выходной сигналы исходного объекта, через v и w – соответствующие сигналы сопряженного объекта. Опираясь на эту схему можно строить вычислительные алгоритмы и проводить реальные эксперименты с физическим объектом.

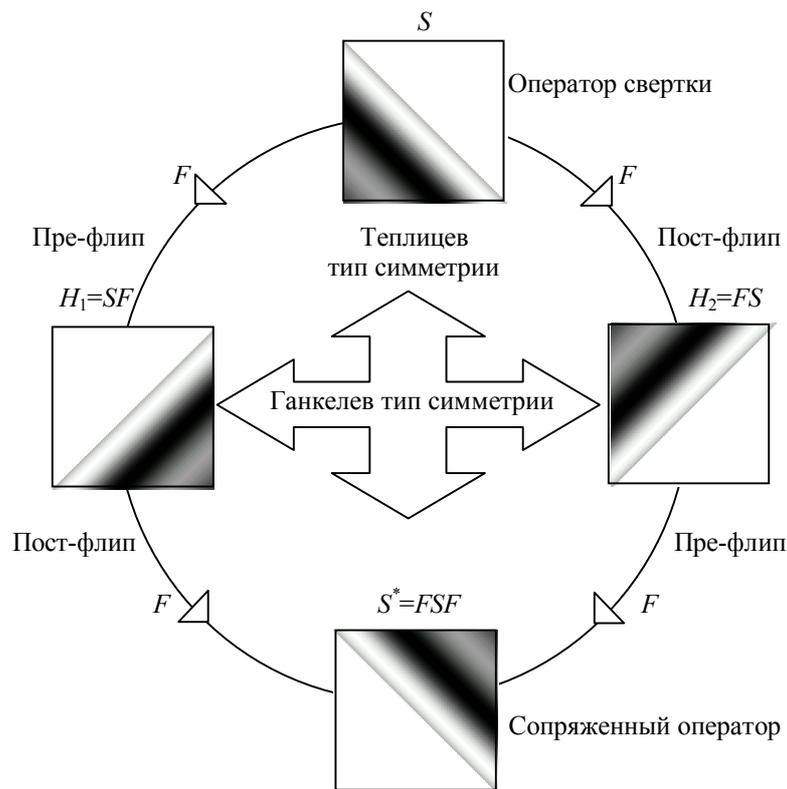


Рис. 1.3.1. Взаимосвязь комбинированных операторов.

Приведенная на рис. 1.3.1 диаграмма характеризует набор комбинированных операторов, получаемых путем умножения оператора свертки на флип-оператор, и указывает тип их симметрии. Аналогичным образом могут быть получены комбинированные операторы и для других видов исходных операторов. Например, для эксперимента, когда входной сигнал рассматривается во времени раньше выходного (временные интервалы разнесены), линейному оператору связи входного сигнала с выходным будет отвечать нижняя левая четверть картинки оператора свертки.

1.4. Аддитивное симметрирование систем

Альтернативный подход к выделению симметричной части произвольного линейного оператора основан на представлении его в виде суммы симметричной M и кососимметричной K частей. Применительно к оператору свертки указанное разложение имеет вид

$$S = M + K, \quad M = (S + S^*)/2, \quad K = (S - S^*)/2. \quad (1.4.1)$$

Перепишем последние равенства с учетом формул, приведенных на диаграмме рис. 1.3.1:

$$M = (S + FSF)/2, \quad K = (S - FSF)/2. \quad (1.4.2)$$

Эти формулы указывают путь практической реализации симметричной и кососимметричной частей оператора свертки.

Структурная реализация оператора M поясняется рис. 1.4.1. Через u и y на ней обозначены входной и выходной сигналы исходного объекта, через v и w – соответствующие сигналы сопряженного объекта.

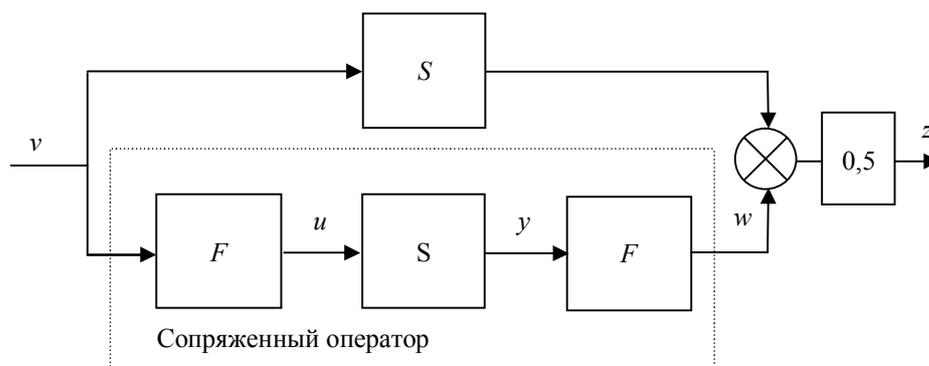


Рис. 1.4.1. Реализация комбинированного оператора M .

Для структурной реализации оператора K сумматор на рис. 1.4.1 следует заменить вычитающим устройством.

Отметим, что наряду с операторами M и K высокой степенью симметрии обладают операторы $FM = (FS + SF)/2$ и $FK = (FS - SF)/2$, последний из которых имеет структуру скобки Пуассона операторов F и S .

Оператор M возникает, в частности, при исследовании оптимизационной задачи о минимальном искажении. В ней требуется найти сигнал $u(t)$, форма которого при прохождении через данную систему претерпевает наименьшие искажения. Можно показать, что искомый сигнал совпадает с главной собственной функцией оператора M [20].

Формула (1.4.2), описывающая традиционное разложение $S = M + K$, использует симметрию и кососимметрию составляющих относительно главной диагонали матриц дискретного представления операторов.

Другие разложения можно получить, выделяя симметричные и кососимметричные части матриц относительно вертикальной и горизонтальной осей, а также относительно побочной диагонали

$$S = M_1 + K_1, \quad S = M_2 + K_2, \quad S = M_3 + K_3. \quad (1.4.3)$$

Учитывая, что вертикальное и горизонтальное “транспонирование” оператора обеспечивается его умножением справа или слева на оператор F , можем записать:

$$M_1 = (S + SF)/2, \quad K_1 = (S - SF)/2, \quad M_2 = (S + FS)/2, \quad K_2 = (S - FS)/2. \quad (1.4.4)$$

Вследствие треугольной теплицевой структуры оператора свертки, третье из разложений (1.4.3) оказывается тривиальным $M_3 = S$, $K_3 = 0$, однако оно будет более содержательным для нестационарных систем.

Формулы вводят в рассмотрение различные полусуммы и полуразности операторов S , FS , SF , FSF . Изложенный аддитивный подход к симметрированию оператора свертки иллюстрируется рис. 1.4.2.

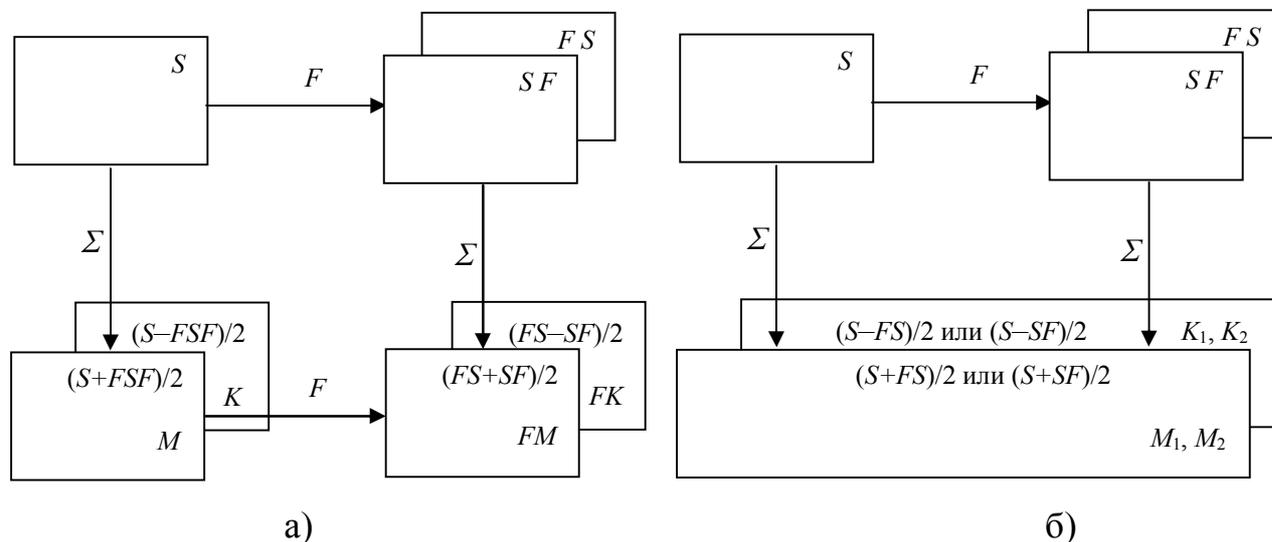


Рис. 1.4.2. Симметрирование: а – диагональное, б – продольное.

Перечень операторов, с указанием структуры – теплицева (Т) или ганкелева (Г), а также осей симметрии – горизонтальная (Х), вертикальная (Y), главная диагональ (D_1), побочная диагональ (D_2) – приведен ниже в табл. 1.4.1. Знаки + и – означают тип симметрии относительно соответствующей оси (симметричность или кососимметричность).

Таблица 1.4.1. Свойства операторов.

Оператор	S	H_1	H_2	S^*	M	K	FM	FK	M_1	K_1	M_2	K_2
Структура	Т	Г	Г	Т	Т	Т	Г	Г	–	–	–	–
Ось симметрии	+ D_2	+ D_1	+ D_1	+ D_2	+ D_1 + D_2	- D_1 + D_2	+ D_1 + D_2	+ D_1 - D_2	+Y	-Y	+X	-X

Структура матриц представления операторов показана на рис. 1.4.3.

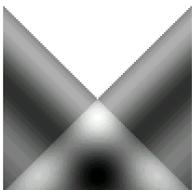
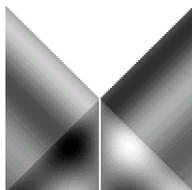
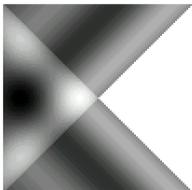
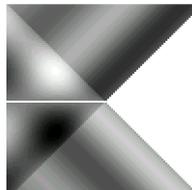
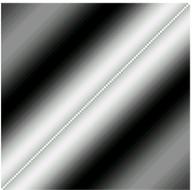
S  ОПЕРАТОР СВЕРТКИ	$M = (S+S^*)/2$  СИММЕТРИЧНАЯ ЧАСТЬ S	$K = (S-S^*)/2$  КОСОСИММЕТРИЧНАЯ ЧАСТЬ S
$H_1 = SF$  ПРЕ-ФЛИП	$M_1 = (S+SF)/2$  	$K_1 = (S-SF)/2$ 
$H_2 = FS$  ПОСТ-ФЛИП	$M_2 = (S+FS)/2$  	$K_2 = (S-FS)/2$ 
$S^* = FSF$  СОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР	$FM = (FS+SF)/2$  	$FK = (FS-SF)/2$  СКОБКА ПУАССОНА

Рис. 1.4.3. Линейные операторы

В первом столбце представлены операторы с треугольной структурой, получаемые мультипликативным симметрированием. Во втором и третьем столбцах находятся симметричные и кососимметричные операторы разных типов, получаемые аддитивным симметрированием.

Рисунок наглядно демонстрирует наличие четырех типов симметрии операторных матриц – два диагональных, вертикальный и горизонтальный (они совпадают с четырьмя классическими осями симметрии квадрата).

Отметим, что два из приведенных операторов M и FM обладают двойной симметрией, а операторы K_1 и K_2 , напротив, не имеют осей симметрии, но имеют оси кососимметрии. Список полученных операторов может быть продолжен за счет их умножения на флип-оператор и линейного комбинирования.

По существу здесь идет речь об алгебре операторов с двумя образующими. Это открывает единообразный путь для систематизации операторов, ассоциированных с динамической системой, их изучения и применения для решения прикладных задач.

Аналогичным образом могут исследоваться и другие операторы, известные в теории динамических систем, такие как операторы управления, наблюдения и ганкелев оператор.

Наряду с изучением симметрии операторов, изображенных выше на рисунке, представляет интерес изучение симметрии их собственных функций и симметрия их спектров.

Для обзора интересующих нас свойств воспользуемся диаграммами, приведенными на рис. 1.4.2. На них через F , Σ обозначены операторы мультипликативного и аддитивного симметрирования, в блоках приведены части, порождаемые диагональным, горизонтальным или вертикальным симметрированием. Рассмотрим спектры и собственные функции семейства линейных операторов, а также использовать спектральные свойства одних операторов для анализа других, более сложных.

1.5. Симметрия собственных функций

В отношении спектров и собственных функций семейства рассматриваемых операторов имеют место следующие факты, полученные компьютерным исследованием:

1) Спектры операторов H_1 и H_2 , выделяемых мультипликативным симметрированием, совпадают, а их собственные функции зеркально симметричны по отношению друг к другу.

2) Модули спектров операторов M и FM , выделяемых аддитивным симметрированием, совпадают, их собственные функции попарно совпадают и распадаются на четные и нечетные относительно середины временного интервала $(0, T)$.

3) Собственные значения оператора FK расположены на вещественной оси симметрично относительно начала координат. Собственные функции ортогональны и попарно зеркально симметричны.

4) Операторы M_1, K_1, M_2, K_2 вырождены, половина их собственных чисел равна нулю.

5) Ненулевые части спектров M_1, K_1 или M_2, K_2 в совокупности образуют спектр оператора M , кроме того, M_2, K_2 наследуют его четные и нечетные собственные функции соответственно.

К особому виду редукции можно отнести разнесение интервалов управления и наблюдения во времени на взаимно непересекающиеся фрагменты. Упрощение состоит в том, что спектр становится конечным. Именно к этому семейству принадлежит ганкелев оператор, анализ собственных функций которого для односвязных и многосвязных систем представлен в основополагающей работе [1].

Разнесение интервалов удваивает семейство ассоциированных с линейным динамическим объектом операторов при сохранении указанных признаков симметрии и схем структурной реализации.

Анализ видов симметрии позволяет проводить редукцию задачи на поиск норм или собственных функций операторов заменой сложных операторов M, K на более простые M_1, K_1 или M_2, K_2 . В итоге, сложная схема (см. рис. 1.4.1) может быть заменена более простыми, изображенными на рис. 1.5.1.

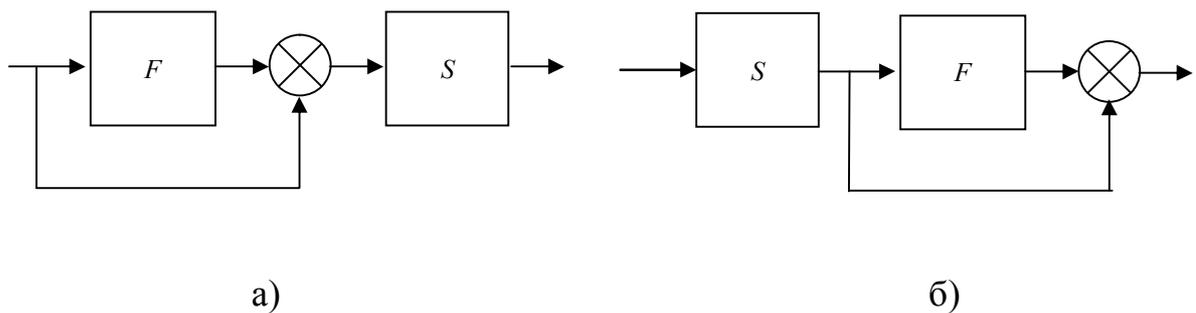


Рис. 1.5.1. Симметрирование: а – по входу, б – по выходу.

Две схемы отличаются от реализаций операторов H_1, H_2 только дополнительной связью, симметрирующей входные или выходные сигналы. Все они могут быть использованы в итерационном методе поиска собственных функций и собственных значений, поясняемом рис. 1.2.2.

Итерационный поиск проводится дважды с заменой сумматора на вычитающее устройство. Помимо выгод в простоте структурной реализации, эта декомпозиция позволяет находить условный экстремум на классах четных и нечетных функций.

Устройства запоминания, инверсии, сложения, вычитания сигналов могут быть реализованы аппаратно при помощи современной элементной базы. Еще более просто эти операции реализуются на компьютерах. Заметим, что данный подход позволяет находить экстремальные решения при отсутствии достоверной математической модели объекта. Натурный эксперимент, осуществленный в соответствии со схемами, может использоваться для проверки априорных сведений о нем.

1.6. Примеры экспериментов с симметричными операторами

Проиллюстрируем процедуры моделирования и анализа операторов, ассоциированных с линейной динамической системой, на примере электрического фильтра, изображенного на рис. 1.6.1.

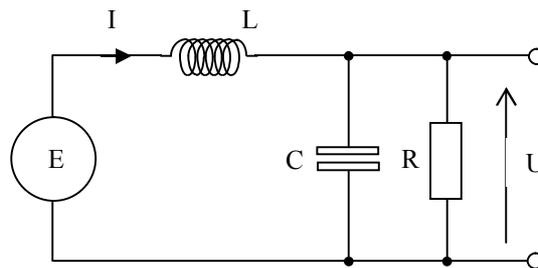


Рис. 1.6.1. Исследуемая схема электрического фильтра.

По отношению к этой динамической системе решались задачи по определению реакции операторов на стандартное входное воздействие и отыскание оптимальных сигналов, имеющих ясную физическую интерпретацию расходов энергии на активном сопротивлении и в нагрузке источника. Передаточные функции этой RLC-схемы от входа E к выходам U, I имеют, соответственно, вид

$$Q_1(p) = \frac{R}{RLC p^2 + Lp + R}; \quad Q_2(p) = \frac{RCp + 1}{RLC p^2 + Lp + R}.$$

Эксперимент 1. Для нахождения формы входного сигнала, обеспечивающего максимальную отдачу энергии источника в активную нагрузку R за время 5 с., определялась главная собственная функция оператора H_1 при значениях параметров $R=2$, $L=1$, $C=0,5$.

С этой целью была использована итерационная процедура рис. 1.2.2 для передаточной функции $Q_1(p)$.

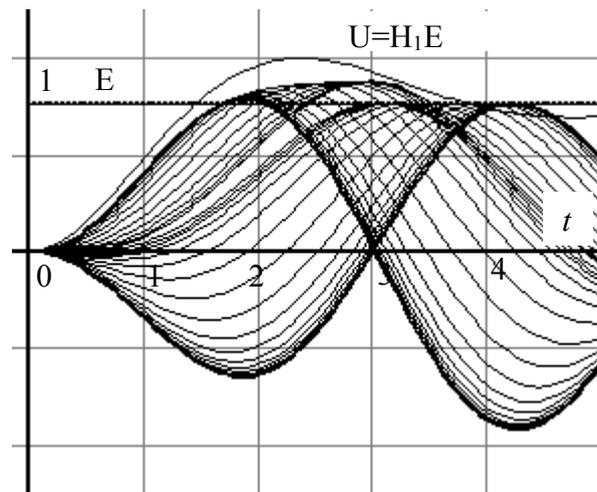


Рис. 1.6.2. Поиск главной собственной функции оператора H_1 .

Графики сигналов, полученные на последовательных итерациях, приведены на рис. 1.6.2. Инвертирование сигнала на соседних итерациях происходит вследствие знака $\lambda_1 = -1,208$. Итерационно получаемые сигналы достаточно быстро сходятся к оптимальному сигналу, отвечающему максимальному по модулю собственному значению. Искомая собственная функция обеспечивает максимум скалярного произведения $\langle U, U \rangle$.

Эксперимент 2. Моделировались связанные с оператором свертки S операторы $H_1, H_2, S^*, M, K, M_1, K_1, M_2, K_2$ данной схемы. В качестве входного сигнала E использовался один период прямоугольной волны (меандра) единичной амплитуды длительностью 50 с. Реакция U на этот сигнал при значениях параметров $R=1,2$, $L=1$, $C=0,5$ приведена на рис. 1.6.3.

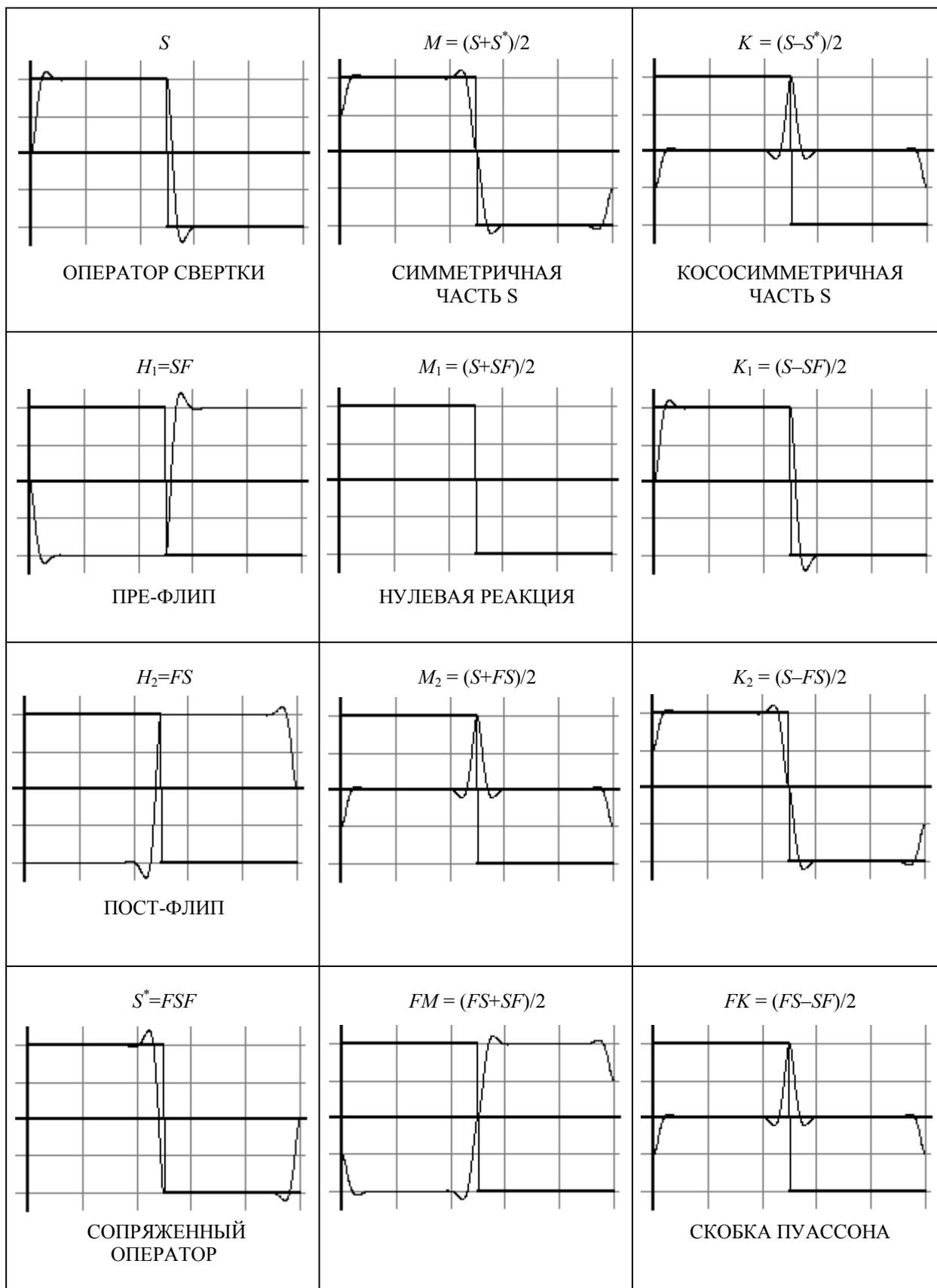


Рис. 1.6.3. Реакция симметризованных операторов на меандр.

Эксперимент 3. Для нахождения формы входного сигнала, обеспечивающего максимальную отдачу энергии источника в цепь за выделенное время, определялась главная собственная функция оператора M при тех же значениях параметров, что и ранее. Итерационная процедура проводилась для передаточной функции $Q_2(p)$ согласно реализации M по рис. 1.4.1.

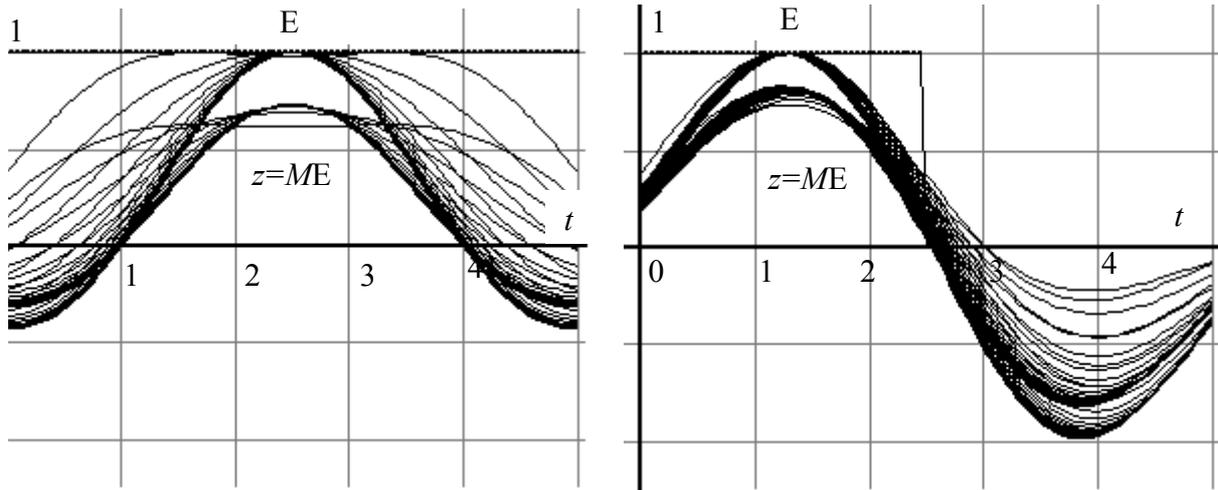


Рис. 1.6.4. Поиск четной и нечетной собственных функций оператора M .

У оператора M имеются два близких по модулю собственных числа $\lambda_1 = 0,867$ и $\lambda_2 = 0,773$, которым соответствуют нечетная и четная собственные функции $f_1(t), f_2(t)$.

Использование в качестве начального приближения симметричного входного сигнала ведет к установлению собственной функции $f_2(t)$ (левая часть рис. 1.6.4), использование несимметричного входного сигнала приводит к главной собственной функции $f_1(t)$ (правая часть рис. 1.6.4).

Аналогичные результаты получаются при редукции задачи использованием более простых операторов M_2, K_2 (рис. 1.5.1), отвечающих расщепленному спектру M . В данном примере искомая собственная функция обеспечивает максимум скалярного произведения $\langle E, I \rangle$.

1.7. Выводы

Первая глава вводит в рассмотрение широкий круг операторов, порождаемых линейной динамической системой. Указаны принципы, позволяющие систематизировать их, опираясь на признаки симметрии.

Операторы, ассоциированные с линейной динамической системой, могут обладать различными видами симметрии: обычная симметрия и кососимметрия (симметрия относительно главной диагонали), симметрия и кососимметрия относительно побочной диагонали, симметрия и кососимметрия относительно вертикальной и горизонтальной осей, ганкелева и теплицева симметрии, симметрия собственных функций и спектра.

Использование симметрии операторов ведет в ряде случаев к упрощению решения (итерационными методами) изопериметрических задач, задач на нахождение норм операторов, задач на определение собственных функций и спектров и т.д.

В ряде случаев упрощение следует из симметрии самих собственных функций, из совпадения части спектра сложного оператора со спектром оператора, для которого проще устроить натурный эксперимент с объектом, математическое описание которого неизвестно.

На практике это приводит к существенному выигрышу: к уменьшению общего времени на эксперимент, к увеличению точности находимых данных и т.д.

Недостатком данного экспериментального подхода, опирающегося на выявленные свойства операторов, является отсутствие сколько-нибудь серьезного аналитического описания искомого спектра.

На устранение этого недостатка нацелена следующая глава, посвященная аналитическим методам исследования задачи.

Глава 2.

Аналитические методы поиска сингулярных функций

2.1. Спектральные свойства на ограниченном интервале времени

Спектральные свойства линейных операторов динамических систем широко используются в задачах анализа и синтеза регуляторов. К числу наиболее значимых результатов относятся частотный критерий устойчивости, синтез корректирующих звеньев по логарифмическим частотным характеристикам и др. Сравнительно недавно, возникли новые методы редукции моделей динамических систем на основе сингулярных чисел ганкелева оператора и синтеза H_∞ -оптимальных регуляторов на основе сингулярных чисел передаточной функции.

В теории динамических систем, в частности, в теории управления, спектральные характеристики линейных операторов обычно рассматривают на неограниченном интервале времени протекания процессов. Подобные идеализации упрощают математический аппарат, однако нередко это происходит в ущерб содержательной стороне его применения.

Глава посвящена изучению спектральных характеристик оператора свертки на конечном интервале времени $(0, T)$. Предпочтение отдается частотному подходу. Частотный подход играет особую роль в теории управления. Амплитудно-частотная (АЧХ) и фазовая (ФЧХ) характеристики динамических объектов широко используются при решении задач анализа и синтеза систем управления. Однако все они отвечают бесконечному интервалу времени приложения воздействия, тогда как реальные системы работают конечное время. Возникает естественное желание ввести аналоги частотных характеристик на ограниченном интервале времени и выяснить их связь с классическими. Содержательный ответ на этот вопрос можно получить в терминах спектральных характеристик оператора свертки.

В главе показывается, что сингулярные числа оператора свертки, рассматриваемого на интервале длительности T , образуют дискретное множество, точки которого расположены на классической непрерывной АЧХ. Чем протяженнее интервал T , тем плотнее будут линии дискретного операторного спектра. Указанная закономерность нетривиальна и не повторяет во всех деталях соотношения дискретного и непрерывного спектров сигналов, известного в теории преобразования Фурье. В отличие от теории сигналов, при переходе от бесконечного интервала времени к конечному спектр хотя и становится дискретным, но его отсчеты на оси частот не становятся регулярными. В отношении спектральных характеристик оператора свертки исследуются три основные задачи.

Первая из них состоит в получении характеристического уравнения (или совокупности уравнений) для сингулярных чисел оператора свертки. Соответствующий конечномерный аналог в матричном исчислении содержит полином, здесь это будет уже трансцендентная функция, имеющая бесконечное (счетное) количество нулей.

Вторая задача связана с поиском аналитических соотношений между сингулярными числами и сингулярными функциями. В теории матриц известно немного примеров, в которых компоненты собственных векторов явным образом выражаются через собственные значения. В частности, известно, что для матрицы Фробениуса собственные векторы образуют матрицу Вандермонда из собственных чисел. Тем более интересно отыскать такого рода соотношения для бесконечномерных задач.

Третья задача состоит в поиске характеристик сингулярных функций оператора свертки и установлению их связи с классическими. Континуальность сингулярных функций не отвергает возможности описания их конечным набором коэффициентов. Так, например, весовая функция скалярной системы полностью характеризуется $2n$ параметрами (где n – порядок системы), которые можно связать с коэффициентами передаточной функции.

Сингулярную функцию можно рассматривать как модель динамической системы, раскрывающую ее пропускные способности на конечном интервале времени. Так же, как и любая другая функция времени, она имеет амплитудный спектр Фурье. Частоты сингулярной функции, т.е. ее частичный спектр, связаны с топологическими особенностями АЧХ. Заметим, что на топологию АЧХ опирается анализ устойчивости систем по Найквисту, так что развиваемый подход вполне лежит в русле традиций теории моделирования динамических систем.

Тем самым, исследование разбивается на три этапа: изучение качественных закономерностей, отличающих спектральные характеристики линейных динамических систем на ограниченном интервале времени; изучение частичных частот гармонических компонент сингулярных функций и их локализация (подобно кругам Гершгорина, только не для спектра оператора, а для частичного спектра сингулярных функций); разработка численных алгоритмов и графоаналитических методов нахождения спектральных характеристик.

Глава состоит из пяти разделов. В разделе 2.2 вводятся необходимые математические модели и дается определение сингулярных функций оператора свертки на конечном интервале времени. В разделе 2.3 устанавливаются важные свойства симметричности сингулярных функций и другие качественные характеристики, облегчающие нахождение их аналитического описания. Раздел 2.4 посвящен поиску сингулярных функций на основе частотного подхода, при этом важную роль играет флип-оператор, введенный в работах [19, 20]. Подчеркивая актуальность и новизну исследования, отметим, что в литературе по теории динамических систем наблюдается недостаток сведений по затрагиваемым вопросам.

Импульсные и переходные функции элементарных динамических звеньев рассматриваются в учебниках, тогда как собственные и сингулярные функции тех же объектов известны недостаточно полно.

2.2. Сингулярные функции динамических систем

Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему с одним входом и одним выходом, описываемую уравнениями в пространстве состояний

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t),\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

где $\mathbf{x}(t) \in R^n$ – вектор состояния, \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} – постоянные матрицы соответствующих размерностей; $u(t)$, $y(t)$ – входной и выходной скалярные сигналы, начальное состояние $\mathbf{x}(0)=0$, $0 \leq t \leq T$.

Оператор свертки S характеризует отображение множества входных сигналов, воздействующих на систему на интервале времени $(0, T)$, в множество выходных сигналов, рассматриваемых на том же самом интервале. Он задается формулой

$$y(t) = S u(t) = \int_0^t q(t - \tau)u(\tau)d\tau,\tag{2.2.2}$$

где $q(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$ – импульсная весовая функция односвязной динамической системы с передаточной функцией $Q(p)$.

Оператор свертки S отвечает режиму работы системы в реальном времени, типичному для большинства задач теории автоматического управления и теории электрических цепей. Сопряженный оператор S^* вводится стандартным образом с помощью соотношения $(v, Su) = (S^*v, u)$, где скобки означают скалярное произведение соответствующих функций, рассматриваемых на интервале $(0, T)$.

Оператор S^* представляет собой оператор свертки сопряженной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -\dot{\zeta}(t) &= \mathbf{A}^T \zeta(t) + \mathbf{C}^T v(t), \\ \tilde{y}(t) &= \mathbf{B}^T \zeta(t), \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

где $v(t)$, $\tilde{y}(t)$ – входной и выходной скалярные сигналы, начальное условие зависит от вида входного сигнала $v(t)$ и определяется формулой

$$\zeta(0) = -\int_0^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T v(t) dt, \text{ конечное значение } \zeta(T) = 0.$$

Интегральное представление оператора S^* имеет вид

$$\tilde{y}(t) = S^* v(t) = \tilde{y}_0 + \int_0^t q^*(t-\tau) v(\tau) d\tau, \quad (2.2.4)$$

где $q^*(t) = \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T (T-t)} \mathbf{C}^T$ – импульсная весовая функция сопряженной системы. Начальное значение \tilde{y}_0 рассчитывается из условия $y(T) = 0$ и равно

$$\tilde{y}_0 = -\int_0^T q(t) v(t) dt. \text{ Для скалярных систем справедливо } q^*(t) = q(T-t).$$

В инверсном направлении времени $\tau = T-t$ уравнения сопряженной системы совпадают с уравнениями дуальной системы:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(\tau) &= \mathbf{A}^T \zeta(\tau) + \mathbf{C}^T v(\tau), \\ \tilde{y}(\tau) &= \mathbf{B}^T \zeta(\tau). \end{aligned}$$

Линейные стационарные динамические системы с одним входом и выходом самодуальны в том смысле, что их вход-выходные характеристики (весовая и передаточная функции) совпадают с соответствующими характеристиками дуальных систем.

Описаниям (2.2.1) и (2.2.3) исходной и сопряженной систем при нулевых начальных условиях соответствуют дробно-рациональные передаточные функции

$$Q(p) = C(pE - A)^{-1}B = \frac{b(p)}{a(p)} \quad \text{и} \quad Q^*(p) = C(-pE - A)^{-1}B = Q(-p) = \frac{b(-p)}{a(-p)}, \quad (2.2.5)$$

являющиеся изображениями по Лапласу соответствующих импульсных весовых функций. При этом следует различать сопряженную передаточную функцию $Q(p^*)$ системы S и передаточную функцию $Q^*(p)$ сопряженной системы S^* . Они совпадают друг с другом только в частном случае гармонических входных сигналов, когда $p = j\omega$.

Кроме перечисленных, в работе используется оператор F зеркального инвертирования во времени функции $f(t)$, заданной на интервале $(0, T)$. Он описывается зависимостью

$$Ff(t) = f(T-t). \quad (2.2.6)$$

Следуя терминологии работы [19], будем называть его флип-оператором. Его спектральные свойства и значение в теории динамических систем освещены ранее. Флип-оператор обладает рядом специальных свойств: он симметричен $F = F^*$, ортогонален $F^* = F^{-1}$ и инволютивен $F^2 = I$, где I – тождественный оператор.

Отметим также нетривиальное представление сопряженного оператора в виде $S^* = FSF^*$. Оно означает, что в случае стационарных систем пара операторов S^* , S связана преобразованием подобия со всеми вытекающими отсюда последствиями. Относительная простота описания флип-оператора во временной области вовсе не означает такой же простоты в частотной, этот вопрос подробнее рассматривается в разделе 2.4.

Предметом исследования настоящей главы служат спектральные свойства операторов динамической системы (2.2.1), и, в первую очередь, сингулярные числа и сингулярные функции оператора свертки (2.2.2) на конечном интервале времени.

Приведем необходимые математические определения. В случае матричных операторов собственные и сингулярные числа отыскиваются из характеристических уравнений вида $|S - \lambda I| = 0$, $|S^*S - \sigma^2 I| = 0$. Аналогичные уравнения возникают при дискретном описании динамики линейных систем матрицами на конечном интервале времени.

Переходя от матриц к непрерывным динамическим системам, отметим следующее.

Всякая динамическая система с нулевыми начальными условиями, рассматриваемая на конечном или полубесконечном интервале времени, фильтрует входной сигнал, неизбежно меняя его форму. Поэтому ее оператор свертки не имеет собственных функций. Вместе с тем, любой линейный оператор имеет сингулярные функции. Существуют два подхода к определению сингулярных функций операторов.

Согласно первому подходу, помимо оператора S самой системы в рассмотрение вводится сопряженный ему оператор S^* .

Определение 1. Функции $f_i(t)$, $g_i(t)$, удовлетворяющие операторным уравнениям

$$SS^*f_i(t) = \sigma_i^2 f_i(t), \quad S^*Sg_i(t) = \sigma_i^2 g_i(t), \quad (2.2.7a)$$

называются левыми и правыми сингулярными функциями оператора свертки S . Арифметические корни σ_i из коэффициентов пропорциональности в этих равенствах называются сингулярными числами оператора S .

Структурная интерпретация этого определения для левых сингулярных функций иллюстрируется рис. 2.2.1, а.

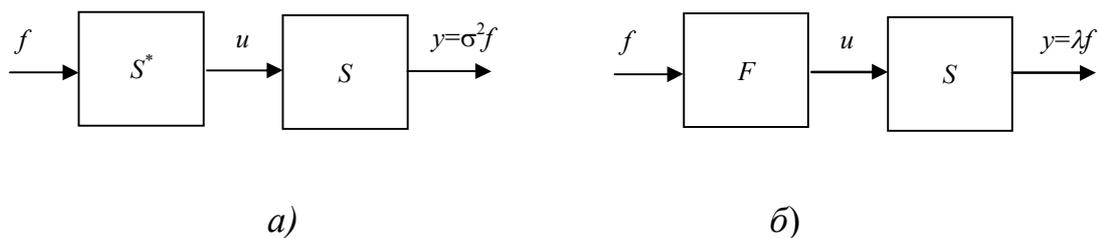


Рис. 2.2.1. Альтернативные варианты определения сингулярной функции оператора свертки: а) с помощью оператора сопряженной системы; б) с помощью флип-оператора.

В соответствии с ним левой сингулярной функцией $f(t)$ называется ненулевой входной сигнал, проходящий через последовательное соединение систем S^* и S без искажения формы. Схема для правых сингулярных функций выглядит аналогично и получается перестановкой блоков S^* и S .

Отметим, что правые и левые сингулярные функции связаны равенствами

$$S^* f_i(t) = \sigma_i g_i(t), \quad S g_i(t) = \sigma_i f_i(t), \quad (2.2.7b)$$

представляющими собой симметричную запись уравнений (2.2.7a). В приложениях главную роль играют функции $f_1(t)$, $g_1(t)$, отвечающие максимальному сингулярному числу σ_1 , иногда называемые максимизирующей парой Шмидта.

Второй подход к определению сингулярных функций опирается на их экстремальные свойства.

Определение 2. Для заданного оператора S рассмотрим следующую задачу на условный экстремум

$$J = \| S f(t) \| \Rightarrow \text{extr}, \quad \| f(t) \| = 1, \quad (2.2.8)$$

где $\| \bullet \|$ означает норму функции.

Функции $f_i(t)$, отвечающие стационарным точкам этой экстремальной задачи, называются сингулярными функциями оператора S , а соответствующие им значения σ_i функционала J – сингулярными числами оператора S . Функция $f_1(t)$, доставляющая глобальный максимум функционалу J , называется главной сингулярной функцией. Ей соответствует главное сингулярное число σ_1 , характеризующее максимальный "коэффициент усиления" (в смысле используемой нормы), который может быть реализован данным оператором.

При использовании квадратичной нормы $\|f\|_2 = (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^T f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$,

оба определения приводят к одинаковым результатам. В случае других норм, например, модульной $\|f\|_1 = \int_0^T |f(t)| dt$ или чебышевской $\|f\|_\infty = \max_t (|f(t)|)$, определения 1, 2 становятся неэквивалентными.

Далее рассматриваются квадратичные нормы функций и согласованные с ними нормы операторов.

Во избежание терминологической путаницы отметим четыре разновидности спектров, встречающихся в литературе и используемых в данном разделе: это амплитудный спектр сигнала, модальный и операторный спектры динамической системы и парциальный спектр сингулярной функции.

Первая разновидность – *амплитудный спектр сигнала* – широко используется в теории связи и других приложениях. Он получается с помощью преобразования Фурье и характеризует амплитуды гармоник, входящих в состав сигнала.

Вторая разновидность спектра – это *модальный спектр системы*. Под ним понимается совокупность полюсов системы, определяющих модальные составляющие ее свободного движения. Очевидно, что он совпадает со спектром матрицы A описания (2.2.1).

Третья разновидность спектра – это *операторный спектр динамической системы*. В функциональном анализе спектром оператора обычно называется совокупность его собственных значений, соответствующих собственным функциям.

Как отмечалось, оператор свертки собственных функций не имеет. Предметом нашего изучения является спектр симметричного оператора S^*S , образующий для конечномерных систем счетное множество. Поэтому, говоря в дальнейшем об операторном спектре динамической системы, будем иметь в виду именно этот спектр.

Более формально: операторным спектром линейной системы назовем совокупность сингулярных чисел ее оператора свертки (2.2.2), рассматриваемого на интервале времени $(0, T)$. Исходя из общих свойств симметричных операторов, эти числа вещественны, положительны, а сингулярные функции попарно ортогональны.

Четвертая разновидность спектра – *парциальный спектр сингулярной функции*.

Как будет показано ниже, каждая из сингулярных функций оператора свертки динамической системы представляет собой линейную комбинацию конечного числа гармонических сигналов – модальных компонент некоторой динамической системы удвоенного порядка.

Совокупность частот этих компонент будем называть парциальным спектром сингулярной функции.

Операторный и парциальный спектры будут представлять особый интерес нашего анализа. Кроме приведенных выше двух классических подходов к определению сингулярных функций возможен еще один, третий. Он основан на специальном свойстве симметрии, присущем сингулярным функциям оператора свертки стационарных скалярных систем и рассматривается в следующем разделе.

2.3. Свойства сингулярных функций

Для изучения свойств сингулярных функций выпишем в соответствии с первым определением систему дифференциальных уравнений порядка $2n$, получаемую путем каскадного соединения исходной и сопряженной систем (рис. 2.2.1, *a*). Для описания такого соединения используем уравнения (2.2.1), (2.2.3), дополненные уравнением связи $u(t) = \tilde{y}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), & y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t), & u(t) &= \tilde{y}(t), \\ \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) &= -\mathbf{A}^T\boldsymbol{\zeta}(t) - \mathbf{C}^T f(t), & \tilde{y}(t) &= \mathbf{B}^T\boldsymbol{\zeta}(t), & f(t) &= y(t)/\sigma^2 \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Последнее соотношение имеет место при условии, что в качестве входного сигнала $f(t)$ выступает сингулярная функция системы S , тогда согласно формуле (2.2.7) выходной сигнал $y(t) = SS^*v(t)$ отличается от входного только амплитудой $y(t) = \sigma^2 f(t)$. Матрица пространства состояний \mathbf{M} системы (2.1) имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{C}^T\mathbf{C}/\sigma^2 & -\mathbf{A}^T \end{pmatrix}. \quad (2.3.2)$$

Заметим, что похожая матрица возникает при минимизации квадратичного функционала $\int_0^\infty (\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + u(t)^T \mathbf{R}u(t))dt$ в теории оптимального управления. В самом деле, природы этих задач близки, однако имеются три существенных различия. Во-первых, при поиске сингулярных функций ищется максимум квадратичного функционала, а при поиске оптимального управления – его минимум. Во-вторых, матрицы различаются знаком левого нижнего блока (в задачах оптимального управления он положителен). В-третьих, в матрице \mathbf{M} имеется неизвестный параметр σ , который должен быть выбран таким образом, чтобы решение системы (2.3.1) удовлетворяло краевым условиям $\mathbf{x}(t) = 0$, $\boldsymbol{\zeta}(T) = 0$.

Указанные различия не мешают использовать при поиске сингулярных функций стандартный математический аппарат, разработанный в теории управления. Он включает составление дифференциального уравнения Риккати и расчет коэффициентов матрицы обратных связей, обеспечивающих оптимальный вид выходных сигналов системы.

Аналитические трудности этого пути известны. В теории оптимального управления, где ищется одно решение (и не надо определять сингулярное число σ) уже в случае анализа апериодического звена возникают громоздкие выкладки [92, 107], а при повышении порядка системы аналитические выражения для искомых функций становятся необозримыми. Отметим также, что вариационные методы теории оптимального управления мало согласуются с частотными (и это отдаляет нас от традиционных спектров, т.е. АЧХ и ФЧХ).

От указанных недостатков свободен альтернативный подход к определению сингулярных функций, основанный на использовании специального вида симметрии, присущего оператору свертки и его сингулярным функциям [20].

Суть этой симметрии становится ясной из следующей теоремы.

Теорема 1 (о зеркальной симметрии). Левая и правая сингулярные функции $f_i(t)$ и $g_i(t)$ оператора свертки (2.2.2), отвечающие простому сингулярному числу σ_i и связанные соотношениями (2.2.7b), удовлетворяют условию зеркальной симметрии

$$f_i(t) = \pm g_i(T - t). \quad (2.3.3)$$

Доказательство теоремы 1. Согласно определению 1, правые сингулярные функции оператора свертки g_i удовлетворяют равенствам $S^* S g_i = \sigma_i^2 g_i$.

Используя соотношение $S^* = FSF$, перепишем их в виде

$$FSFS g_i = \sigma_i^2 g_i \text{ или } H^2 g_i = \sigma_i^2 g_i,$$

где $FS=H$ – симметричный оператор, получаемый при полярном разложении оператора свертки.

Обозначим q_i – собственную функцию оператора H , отвечающую его собственному числу λ_i , тогда справедливы равенства: $H q_i = \lambda_i q_i$.

Отсюда заключаем, что сингулярные функции операторов S^*S и H совпадают $g_i = q_i$, а их собственные числа равны с точностью до знака $\lambda_i = \pm \sigma_i$. Следовательно

$$H g_i = \lambda_i g_i, FS g_i = \lambda_i g_i, S g_i = \lambda_i F f_i.$$

С учетом второго из соотношений (2.2.7b), получаем $\sigma_i f_i(t) = \lambda_i g_i(T-t)$ или $f_i(t) = \pm g_i(T-t)$, что и требовалось доказать.

Условие (2.3.3) означает, что левая сингулярная функция с точностью до знака совпадает с копией правой сингулярной функции, взятой в обратном времени.

Приведенная теорема позволяет дать еще одно, третье определение сингулярных функций оператора свертки системы (2.2.1).

Определение 3. Функции $f_i(t)$ и $g_i(t)$, удовлетворяющие операторным уравнениям

$$S f_i(T-t) = \lambda_i f_i(t), \quad S g_i(t) = \lambda_i g_i(T-t), \quad (2.3.4)$$

называются левыми и правыми сингулярными функциями оператора свертки S , отвечающими сингулярному числу $\sigma_i = |\lambda_i|$.

Вещественный коэффициент λ_i , который может быть как положительным, так и отрицательным, будем называть алгебраическим сингулярным числом в отличие от арифметического сингулярного числа σ_i . Далее, из соображений простоты, индекс у сингулярных функций и чисел будем опускать. Равенства (2.3.4) имеют прозрачную структурную интерпретацию. В частности, первое из них означает, что если на вход системы (2.2.1) подать сигнал, равный левой сингулярной функции $f(t)$, взятой в обратном времени, то на выходе получим усиленный в λ раз сигнал $f(t)$. Это поясняется рис. 3.1.1, б, на котором через F обозначен флип-оператор (2.2.6). Он осуществляет получение зеркальной копии входного сигнала в обратном времени. Таким образом, из определения 3 следует, что сингулярной функцией линейной динамической системы называется входной сигнал, проходящий, после его инверсии во времени, на выход системы без искажения формы.

Отметим, что операция инверсии входного сигнала относительно середины конечного интервала управления (флип-операция) не меняет энергетических соотношений для входных и выходных сигналов. Это позволяет при решении некоторых задач заменять оператор свертки симметричным оператором H , который вводится с помощью факторизации $S = HF$ [20]. Собственные функции оператора H совпадают с сингулярными функциями оператора свертки S . Поскольку квадратичные нормы прямого и сопряженного операторов одинаковы, собственные значения оператора H с точностью до знака равны искомым сингулярным числам.

Перейдем к исследованию свойств сингулярных функций (не находя их в явном виде), опираясь на все три их определения. Необходимость этого диктуется тем, что аналитическая часть задачи очень сложна, и для ее решения полезна качественная информация. Сингулярные функции линейной системы на бесконечном интервале времени представляет собой синусоиды, т.е. моногармонические сигналы.

На конечном интервале времени структура сингулярной функции заметно усложняется и в ее состав входит несколько гармоник различных частот, то есть она становится полигармоническим сигналом. Общее число таких гармоник равно n , а совокупность их частот образует парциальный спектр сингулярной функции. Точнее состав этого спектра описывает следующая теорема.

Теорема 2 (о парциальном спектре). Для минимально-фазовой системы с передаточной функцией $Q(p) = b(p)/a(p)$ правые и левые сингулярные функции оператора свертки представляют собой линейные комбинации конечного числа гармоник $h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t)$.

Вид гармоник, отвечающих сингулярному числу σ , определяется корнями характеристического уравнения

$$\sigma^2 a(p)a(-p) + b(p)b(-p) = 0. \quad (2.3.5)$$

Доказательство теоремы 2. Для системы с передаточной функцией $Q(p) = b(p)/a(p)$ изображения по Лапласу левой и правой сингулярной функций удовлетворяют соотношениям

$$Q(p) Q(-p) f(p) = \sigma^2 f(p), \quad Q(-p) Q(p) g(p) = \sigma^2 g(p).$$

Им соответствует одно и то же характеристическое уравнение для парциального спектра сингулярных функций (2.3.5).

В это уравнение входят только четные степени p , поэтому расположение его корней на комплексной плоскости характеризуется центральной симметрией относительно начала координат. Общее число корней равно $2n$, после их попарного объединения получаем n гармоник, которые входят в состав правых и левых сингулярных функций. Доказательство закончено.

Парам чисто мнимых корней отвечают круговые гармоники $h_i(t) = a_i \sin(\omega t) + b_i \cos(\omega t)$, парам чисто вещественных – гиперболические $h_j(t) = a_j \operatorname{sh}(\omega t) + b_j \operatorname{ch}(\omega t)$, четверкам (квартетам) двоякосимметричных комплексных корней – смешанные $h_s(t) = \operatorname{sh}(\omega_1 t)[a_s \sin(\omega_2 t) + b_s \cos(\omega_1 t)]$ и $h_c(t) = \operatorname{ch}(\omega_1 t)[a_c \sin(\omega_2 t) + b_c \cos(\omega_2 t)]$.

Отметим что вариационные методы, основанные на множителях Лагранжа, приводят к тому же результату, но более длинным путем.

Сингулярное число σ входит в характеристическое уравнение как параметр. Если его значение заранее не известно, то уравнение (2.3.5) не позволяет найти парциальный спектр, однако оно накладывает на этот спектр ряд ограничений качественного характера.

Следствие. Для минимальнофазовых систем с несократимой передаточной функцией в состав парциального спектра не могут входить нули и полюсы исходной системы, нули и полюсы сопряженной системы, а также изолированные экспоненциальные компоненты.

В самом деле, у пар полиномов $(\pm a(p), \pm b(p))$ минимальных минимальнофазовых систем нет общих корней, поэтому корни полиномов $\pm a(p)$ и $\pm b(p)$, т.е. нули и полюсы исходной и сопряженной систем, не могут быть корнями уравнения (2.3.5). Следовательно, гармоники $h_i(t)$ не совпадают с модальными составляющими импульсной весовой функции исходной и сопряженной систем. Кроме того, сингулярные функции не могут содержать изолированных экспоненциальных членов, поскольку каждому члену вида e^{at} в силу симметрии корней будет отвечать член e^{-at} , вместе они образуют гиперболическую функцию. Отметим, что при наличии кратных корней уравнения (2.3.5) у сингулярной функции будут появляться составляющие, содержащие полиномиальные множители.

Для неминимально-фазовых систем полиномы $a(p)$ и $b(-p)$ могут иметь общие корни. Тогда в сингулярной функции будут присутствовать соответствующие модальные компоненты системы.

Известно, что всякая неминимально-фазовая система может быть представлена в виде последовательного соединения минимально-фазовой системы и фазовращателя. Упомянутые модальные компоненты отвечают его полюсам.

Согласно этому следствию сингулярные функции не имеют изолированных экспоненциальных составляющих, этим они отличны от "свободных" движений системы. Сингулярная функция не содержит модальных составляющих, т.е. не возбуждает их. Некоторую аналогию можно найти во входных сигналах с частотами, отвечающими нулям передаточной функции. Они возбуждают собственные движения объекта, но сами не пропускаются на выход. Сингулярные функции действуют наоборот: они проходят сами, не возбуждая модальных составляющих. Последнее глубокое по содержанию свойство позволяет применить для локализации и анализа гармоник сингулярных функций, определяемых на конечном интервале времени, частотные характеристики (такие, как АЧХ и ФЧХ), определенные для интервалов бесконечной длительности. По сути, это обоснование приемлемости здесь обычного частотного подхода.

В качестве комментария к следствию заметим, что теория оптимального управления связывает вид решения с особенностями гамильтоновой матрицы (2.3.2). Напомним (см. [57]), что матрица \mathbf{M} называется гамильтоновой, если соблюдается следующее матричное равенство $\mathbf{J}^{-1}\mathbf{M}^T\mathbf{J}=-\mathbf{M}$, где \mathbf{J} – матрица вида $\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & 0 \end{pmatrix}$. Спектр гамильтоновой матрицы обладает свойством: наряду с каждым числом μ он содержит, причем с той же кратностью, число $-\mu$. Иными словами, он содержит двоякосимметричные комплексные числа. В задачах оптимального управления матрица \mathbf{M} не имеет чисто мнимых собственных значений, ровно половина ее спектра принадлежит полуплоскости $\operatorname{Re} \mu < 0$. Тем самым однозначно определено n -мерное инвариантное подпространство, отвечающее устойчивым собственным значениям (в нем расположена оптимальная траектория).

Парциальный спектр сингулярных функций наоборот затрагивает мнимую ось – сказывается знак левого нижнего блока коэффициентов – оставаясь двоякосимметричным. Таким образом, рассматриваемая задача имеет свои особенности.

Определение частот парциальных компонент сингулярной функции, т.е. ее парциального спектра – проблема весьма сложная. Ее решение может облегчить локализация этого спектра на основе следующего свойства. Рассмотрим функцию комплексного переменного $R(p)=Q(p)Q(-p)$. На мнимой оси она совпадает с квадратом обычной АЧХ, а в остальных случаях отличается от нее.

Свойство 1. (Локализация спектра). Парциальный спектр сингулярной функции системы заключен в области комплексной плоскости, ограниченной условиями

$$\text{Im}(R(p)) = 0, \text{Re}(R(p)) = \sigma^2 \geq 0. \quad (2.3.6)$$

В самом деле, как правые, так и левые сингулярные функции оператора свертки удовлетворяют соотношению $Q(p)Q(-p)f(p) = \sigma^2 f(p)$.

Перейдем от него к операторному равенству $R(p) - \sigma^2 = 0$, где $R(p) = Q(p)Q(-p)$. Учитывая вещественность числа σ , приравняем нулю действительную и мнимую части комплексного выражения $R(p) - \sigma^2$, получим (2.3.6). Первое из соотношений (2.3.6) свидетельствует об отсутствии фазового сдвига сингулярной функции при прохождении ее через последовательное соединение прямой и сопряженной систем. Смысл второго условия – одинаковый коэффициент усиления всех парциальных компонент, входящих в состав сингулярной функции.

Поясним также физический смысл этих соотношений. В соответствии с первым определением сингулярной функции и видом передаточных функций прямой S и сопряженной S^* систем передаточная функция их последовательного соединения равна $Q(p)Q(-p)$.

Последовательное соединение прямой и сопряженной систем известно в теории как амплитудный фильтр. Он меняет амплитуды гармоник, но оставляет неизменными фазы сигналов, поскольку сопряженная система выступает как фазовый компенсатор. Следовательно, все гармоники проходят через такое соединение с сохранением формы сигнала, усиливаясь одинаково. В итоге, сингулярная функция, проходя через амплитудный фильтр, не искажается по форме, а только умножается на положительный коэффициент σ^2 . В терминах частотного подхода это выражается двумя условиями (2.3.6). Дополнительный пример применения этого свойства будет рассмотрен позже.

Свойство 2 (краевые условия). Левые сингулярные функции оператора свертки системы (2.2.1), отвечающие алгебраическому сингулярному числу λ , удовлетворяют краевым условиям

$$f(0) = 0, \lambda \dot{f}(0) = q(0)f(T), \lambda \ddot{f}(0) = \dot{q}(0)f(T) - q(0)\dot{f}(T), \dots \quad (2.3.7)$$

Запишем, согласно теореме 1, $\lambda f(t) = \int_0^t q(t-\tau)f(T-\tau)d\tau$, где $q(t)$ – импульсная весовая функция системы. Полагая $t = 0$, получаем $f(0)=0$, т.е. первое из соотношений (2.3.7). Дифференцируя равенство по времени, получим

$$\lambda \dot{f}(t) = q(0)f(T-t) + \int_0^t \dot{q}(t-\tau)f(T-\tau)d\tau,$$

что после подстановки $t=0$ даст $\lambda \dot{f}(0) = q(0)f(T)$, т.е. второе из соотношений (2.3.7). Выполняя повторное дифференцирование в сочетании с интегрированием по частям, получим третье из соотношений (2.3.7) и т.д.

Возможен также матричный вариант доказательства, основанный на рассмотрении равенств $y=Cx$; $\dot{y}=CAx+CBu$ и других, получаемых их последовательным дифференцированием, для входного сигнала $u=f(t)$. Заметим, что перечисленные краевые условия выписаны с учетом нулевых начальных условий системы.

Эти формулы имеют регулярный вид и могут быть записаны в матричной форме, структуру которой поясним на примере первых четырех условий:

$$\lambda \begin{pmatrix} f(0) \\ \dot{f}(0) \\ \ddot{f}(0) \\ \dddot{f}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ q(0) & 0 & 0 & 0 \\ \dot{q}(0) & q(0) & 0 & 0 \\ \ddot{q}(0) & \dot{q}(0) & q(0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(T) \\ -\dot{f}(T) \\ \ddot{f}(T) \\ -\ddot{f}(T) \end{pmatrix}$$

иной вариант записи

$$\lambda \begin{pmatrix} f(0) \\ \dot{f}(0) \\ \ddot{f}(0) \\ \dddot{f}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{CB} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & 0 & 0 \\ \mathbf{CA^2B} & \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(T) \\ -\dot{f}(T) \\ \ddot{f}(T) \\ -\ddot{f}(T) \end{pmatrix},$$

удобен при задании уравнений системы в пространстве состояний.

Краевые условия для правых сингулярных функций имеют аналогичный вид и получаются из приведенных путем замены $f(t) = g(T-t)$, например, $g(T) = 0$, $\lambda \dot{g}(T) = q(0)g(0)$, и т.д.

Значения $q(0)=\mathbf{CB}$, $\dot{q}(0)=\mathbf{CAB}$, $\ddot{q}(0)=\mathbf{CA^2B}$, ... называются марковскими параметрами динамической системы. С их помощью выражается интересное топологическое свойство (сформулируем его для левых сингулярных функций).

Свойство 3 (взаимосвязь параметров). Если начальные значения сингулярных функций нормировать с помощью марковских параметров условием $\dot{f}_i(0) = q(0)$, то их конечные значения "заметают" операторный спектр $f_i(T) = \lambda_i$ (если первая производная равна нулю, то нормируем вторую производную и так далее).

Тем самым, через марковские параметры устанавливается взаимосвязь сингулярных функций и операторного спектра системы. Значение этого свойства для анализа сингулярных функций поясним на простом примере.

Синусоидальные сингулярные функции идеального колебательного звена $\ddot{y} + k^2y = u$, имеют вид $f(t) = \sin(\omega_1 t + \theta_1)\sin(\theta_2) - \sin(\omega_2 t + \theta_2)\sin(\theta_1)$. Из начальных условий следует, что частоты и фазы парциальных составляющих $\omega_1, \omega_2, \theta_1, \theta_2$ удовлетворяют соотношению

$$\omega_1/\text{tg}(\theta_1) = \omega_2/\text{tg}(\theta_2),$$

инвариантному к номеру сингулярной функции.

Отсюда видно, что знание любых трех параметров сингулярных функций позволяет находить четвертый параметр.

Аналогичное соотношение имеет место для сингулярных функций с гиперболическими компонентами.

Учет таких соотношений позволяет избежать трудоемких выкладок. Сходная ситуация имеет место при анализе устойчивости систем по логарифмическим частотным характеристикам, когда фазовая характеристика попросту не используется. Анализ соответствующей связи между изменениями амплитудной и фазовой характеристик сыграл здесь заметную роль, позволяя анализировать устойчивость только по одной из них на основании критерия Найквиста.

2.4. Поиск сингулярных функций на основе частотного подхода

Частотный подход получил широкое распространение благодаря его способности передавать довольно сложные соотношения, возникающие при анализе динамических систем, в относительно простом виде. Для того, чтобы применить его в рассматриваемом случае, необходимо рассматривать частотные характеристики не только на мнимой оси, как в обычном частотном анализе, а на всей комплексной плоскости. Это относится к обоим блокам, показанным на рис. 2.2.1, б (к системе и к флип-оператору).

Частотные характеристики системы. Введем в рассмотрение обобщенную частотную характеристику системы $A(p)$, рассматривая ее как коэффициент передачи синусоидальных и гиперболических парциальных составляющих сигналов. Она выражается через введенную ранее функцию $R(p)=Q(p)Q(-p)$ и имеет вид:

$$A(p) = \sqrt{R(p)}. \quad (2.4.1)$$

Эта характеристика совпадает с обычной АЧХ только на мнимой оси, когда $p=j\omega$. Для гиперболических сигналов типа $\text{sh}(at)$ в формулу (2.4.1) следует подставлять $p=a$.

Частотные характеристики флип-оператора. Флип-оператор – линейный, но нестационарный объект. Он не меняет амплитуду гармоник (его АЧХ равна единице), а сдвигает сигнал во времени. Величина сдвига зависит от начальной фазы, причем возможны случаи, когда сигнал вовсе не меняется. Нестационарные объекты принято описывать параметрическими передаточными функциями, зависящими от времени или от параметра. Так, например, в методе Гольдфарба параметрическая передаточная функция линеаризуемого нелинейного элемента зависит от амплитуды входного сигнала.

Применяя флип-метод, мы вводим нестационарный блок, передаточная функция которого зависит, наоборот, от фазы входного сигнала θ .

Пусть входной сигнал равен $u(t) = \sin(\omega t + \theta)$, тогда выходной сигнал флип-оператора будет иметь вид

$$u(T-t) = \sin(\omega T - \omega t + \theta),$$

где T – длительность интервала времени. Для оценки сдвига фазы запишем тот же сигнал как $u(T-t) = \sin(\omega t + \pi - \omega T - 2\theta)$. Ясно, что добавка $\pi - \omega T - 2\theta$ описывает фазовую характеристику флип-оператора

$$\psi(\omega, \theta) = \pi - \omega T - 2\theta. \quad (2.4.2)$$

В случае аperiodических сигналов анализ фазовой характеристики приводит к сходному результату, однако инверсия знака гармоники не может быть учтена сдвигом фазы на π . Приступим к определению сингулярных чисел и сингулярных функций на основе частотного подхода.

Каждая сингулярная функция $f(t)$ зависит от $2n$ параметров (частот и фаз парциальных составляющих), общее число неизвестных, с учетом алгебраического сингулярного числа, равно $2n+1$. Это отражается на количестве уравнений связи, которые требуются для их отыскания.

В ряде случаев методом исключения переменных можно перейти к одному уравнению относительно одного параметра, в качестве которого наиболее целесообразно взять сингулярное число λ . Такое уравнение будем называть *характеристическим уравнением для операторного спектра* динамической системы.

Первые $2n$ уравнений получаем на основе третьего определения сингулярной функции

$$SF f(t) = \lambda f(t). \quad (2.4.3)$$

Соотношение (2.4.3) можно трактовать как уравнение операторного баланса. При частотном подходе оно разделяется на уравнения амплитудного и фазового балансов. Далее в целях простоты изложения ограничимся рассмотрением сингулярных функций, содержащих только синусоидальные составляющие. На бесконечном и полубесконечном интервалах времени система имеет только такие сингулярные функции, а при переходе к конечному интервалу они играют, как правило, доминирующую роль. Уравнение амплитудного баланса для таких функций имеет вид

$$A(\omega) - |\lambda| = 0, \quad (2.4.4)$$

где $A(\omega)$ – обычная амплитудно-частотная характеристика системы.

Соответствующее уравнение фазового баланса получаем, учитывая фазовые характеристики каскадного соединения блоков рис. 3.1.1, б,

$$\varphi(\omega) + \psi(\omega, \theta) = \arg(\lambda), \quad (2.4.5)$$

где $\arg(\lambda) = 0$ при $\lambda \geq 0$ и $\arg(\lambda) = \pi$ при $\lambda < 0$.

После подстановки в уравнения (2.4.4) и (2.4.5) парциальных частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ и фаз $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ получаем систему $2n$ нелинейных уравнений относительно $2n + 1$ неизвестных (с учетом λ). На основе начальных и краевых условий (свойство 3) получаем фазо-частотное уравнение

$$\chi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = 0. \quad (2.4.6)$$

В частности, для звеньев первого порядка (интегратора и апериодического звена) оно имеет крайне простой вид $\theta_1 = 0$.

Для идеального колебательного звена получаем уже упоминавшееся инвариантное соотношение $\omega_1 \operatorname{ctg}(\theta_1) - \omega_2 \operatorname{ctg}(\theta_2) = 0$.

Необходимость в рассмотрении фазо-частотного уравнения отражает специфику конечного интервала времени. Таким образом, получена замкнутая система уравнений (2.4.4 – 2.4.6) для определения сингулярных чисел и соответствующих им сингулярных функций оператора свертки.

Ее можно решать аналитически (если это удастся), либо численно. Одной из задач, поставленных в начале главы, было отыскание характеристического уравнения для сингулярных чисел оператора свертки. Система уравнений позволяет предложить процедуру его формирования.

Шаг 1. Из системы уравнений амплитудного баланса (2.4.4) выразить парциальные частоты как функции λ : $\omega_1(\lambda), \omega_2(\lambda), \dots, \omega_n(\lambda)$

Шаг 2. Подставить полученные выражения для парциальных частот в уравнения фазового баланса (2.4.5) и найти фазовые зависимости $\theta_1(\lambda), \theta_2(\lambda), \dots, \theta_n(\lambda)$.

Шаг 3. Подставить найденные выражения для парциальных частот и фаз в фазо-частотное уравнение (2.4.6).

В результате получаем искомое характеристическое уравнение. Оно оказывается трансцендентным и имеет счетное множество корней. Графическая интерпретация первого этапа процедуры поясняется рис. 2.4.1.

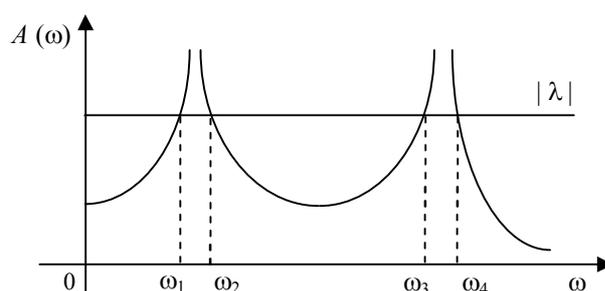


Рис. 2.4.1. Графическая интерпретация амплитудного баланса.

На рисунке в качестве примера приведена АЧХ системы 4-го порядка с двумя резонансными частотами, которая соответствует первому члену уравнения (2.4.4). Модуль $|\lambda|$ дает горизонтальную линию.

Точкам пересечения в окрестностях резонансных частот системы отвечают четыре парциальные частоты. В случае их попарной близости у сингулярной функции проявляется эффект биений. Гиперболические составляющие сингулярных функций возникают при малых значениях модуля λ , когда число точек пересечения оказывается меньше порядка системы. Проиллюстрируем изложенную процедуру двумя примерами.

Пример 1. Начнем с консервативной системы, как наиболее простой для частотного анализа. Определим характеристическое уравнение и сингулярные функции для звена с передаточной функцией $Q(p) = 1/(p^2 + 1)$.

Уравнение амплитудного баланса (2.4.4) имеет вид $1/(1 - \omega^2)^2 + \lambda^2 = 0$.

Отсюда находим выражения для двух парциальных частот

$$\omega_1(\lambda) = \sqrt{1 - \frac{1}{|\lambda|}}, \quad \omega_2(\lambda) = \sqrt{1 + \frac{1}{|\lambda|}}.$$

Уравнение фазового баланса (2.4.5) запишем с учетом полученного ранее равенства $\psi(\omega, \theta) = \pi - \omega T - 2\theta$ (фазовая характеристика флип-оператора):

$$\varphi(\omega) + \pi - \omega T - 2\theta = \arg(\lambda),$$

где $\varphi(\omega) = \arg(1 - \omega)$ – фазовая характеристика колебательного звена. Ее можно записать в форме $\varphi(\omega_1) = 0$, $\varphi(\omega_2) = \pi$. Здесь ω_1, ω_2 – парциальные частоты в окрестности особой точки $\omega_0 = 1$.

Отсюда выражаем фазы: $\theta_1 = (\pi - \omega_1 T)/2$, $\theta_2 = -\omega_2 T/2$ (если $\lambda > 0$) и, наоборот, $\theta_1 = -\omega_1 T/2$, $\theta_2 = (\pi - \omega_2 T)/2$ (если $\lambda < 0$).

Остается воспользоваться фазо-частотным уравнением (2.4.6)

$$\omega_1 \operatorname{ctg}(\theta_1) - \omega_2 \operatorname{ctg}(\theta_2) = 0.$$

Подставляя в него парциальные частоты и фазы, для положительных значений λ получаем трансцендентное характеристическое уравнение:

$$\sqrt{1 - \frac{1}{\lambda}} \operatorname{ctg} \left(\frac{T}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda}} \right) + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda}} \operatorname{ctg} \left(\frac{T}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda}} \right) = 0.$$

Графическое решение этого уравнения для $T = \frac{10\pi}{\sqrt{2}} = 22,3$ представлено на рис. 2.4.2, *а* как точки пересечения функции левой части и оси абсцисс. По мере приближения к началу координат точки спектра сгущаются (на рисунке указаны первые три точки спектра).

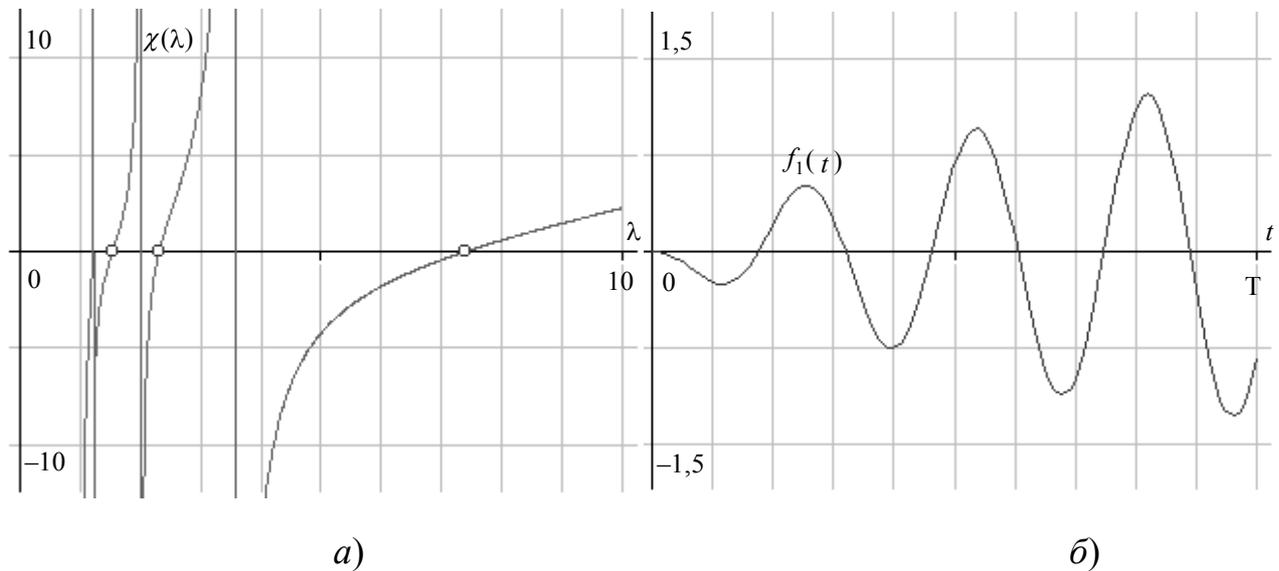


Рис. 2.4.2. Положительные корни характеристического уравнения консервативного звена (*а*) и его главная сингулярная функция (*б*).

Значения корней характеристического уравнения в этих точках для указанного интервала равны 7,43 (главное сингулярное число), далее 2,31 и 1,54. Соответствующие сингулярные функции имеют колебательный характер

$$f(\lambda, t) = \sin(\omega_1(\lambda)t + \theta_1(\lambda))\sin(\theta_2(\lambda)) - \sin(\omega_2(\lambda)t + \theta_2(\lambda))\sin(\theta_1(\lambda)),$$

график главной сингулярной функции показан на рис. 3.4.2, *б*.

Сила, раскачивающая осциллятор (маятник, колокол) по указанному закону, должна совпадать с правой сингулярной функцией (ее график получается зеркальным отражением приведенного графика относительно середины интервала). Она вызывает отклик максимальной энергии на заданном интервале времени.

Пример 2. Рассмотрим звено с передаточной функцией $Q(p) = 1/(p + b)$. При $b = 0$ эта модель описывает интегратор, при $b > 0$ – устойчивое апериодическое звено и при $b < 0$ – неустойчивое апериодическое звено. С точки зрения частотного подхода звенья первого порядка менее удобны для анализа.

Вначале локализуем парциальный спектр сингулярных функций, опираясь на свойство 1 и формулу (2.3.6). В данном случае, при $p = a + j\omega$ получаем

$$R(p) = Q(p)Q(-p) = 1/(b^2 - p^2) = 1/(b^2 - a^2 + \omega^2 - 2ja\omega).$$

Согласно первому из условий (2.3.6) $\text{Im}(R(p)) = 0$ имеем $a\omega = 0$. Отсюда вытекает, что либо $a = 0$, либо $\omega = 0$, т. е. парциальный спектр сосредоточен на вещественной и мнимой осях комплексной плоскости.

В первом случае сингулярная функция динамической системы представляет собой гиперболическую зависимость вида $f(t) = sh(at + \theta)$, во втором – синусоиду $f(t) = sin(\omega t + \theta)$.

Согласно второму из условий (2.3.6) $\text{Re}(R(p)) \geq 0$ имеем $b^2 + \omega^2 > 0$. Отсюда получаем, что допустимая область вещественной оси ограничена отрезком $-b \leq a \leq b$. В частности, для интегратора, когда $b = 0$, этот отрезок вырождается в точку. Поэтому интегратор не может иметь гиперболических сингулярных функций. После проведенной локализации спектра перейдем к рассмотрению уравнений баланса.

Обычная АЧХ системы и гиперболическая АЧХ (далее подчеркнутая), определяемая уравнением (2.4.1), дают два уравнения амплитудного баланса для парциальных частот

$$|\lambda| = A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{b^2 + \omega^2}}, \text{ отсюда } \omega = \sqrt{1/\lambda^2 - b^2},$$

$$|\lambda| = \underline{A}(a) = \sqrt{\frac{1}{b^2 - a^2}}, \text{ отсюда } a = \sqrt{b^2 - 1/\lambda^2}.$$

Второе из них справедливо для собственных значений λ , превышающих статический коэффициент усиления звена. Обычная фазовая частотная характеристика апериодического звена имеет вид $\varphi(\omega) = -\text{arctg}(\omega/b)$. Введем следующую гиперболическую фазовую частотную характеристику $\varphi(a) = -\text{arth}(a/b)$, не учитывающую смену знака гармоники при $b < 0$.

Из фазо-частотного уравнения (нулевых начальных условий) следует, что $\theta = 0$. Поэтому фазовые частотные характеристики флип-оператора для периодического и апериодического режимов имеют вид, соответственно, $\psi(\omega) = \pi - \omega T$ и $\psi(a) = -aT$, последняя формула не учитывает смену знака гармоники. Сходную характеристику имеет звено задержки на некоторое время T .

Отсюда получаем пару уравнений фазового баланса для периодического и апериодического режимов $-\text{arctg}(\omega/b) + \pi - \omega T = \arg(\lambda)$ и $-\text{arth}(a/b) - aT = 0$. Гиперболический арктангенс $\text{arth}(a/b)$ пересекается с линейной функцией $-aT$ при $a < 0$, причем только в одной точке. Следовательно, гиперболическая гармоника может быть только у неустойчивого звена при $T > b$, причем ровно одна. Это главная сингулярная функция неустойчивого апериодического звена, она отвечает его максимальному сингулярному числу. Остальные сингулярные функции – обычные синусоидальные, их частоты находим из первого уравнения фазового баланса.

Характеристические уравнения для периодического и аperiodического режимов при положительных значениях λ имеют вид

$$-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2 b^2}}\right) + \pi - T\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2 b^2}} = 0 \text{ и}$$

$$-\operatorname{arth}\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda^2 b^2}-1}\right) - T\sqrt{\frac{1}{\lambda^2 b^2}-1} = 0 .$$

Корням уравнений отвечают частоты $\omega_i = \sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2 b^2}}$, $a = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 b^2}-1}$,

сингулярные функции $f_1 = \sin(\omega_1 t)$, $f_2 = \sin(\omega_2 t)$, ... для устойчивого звена и $f_1 = \operatorname{sh}(at)$, $f_2 = \sin(\omega_2 t)$, ... для неустойчивого. На рис. 3.4.3 приведены первые две сингулярные функции аperiodического звена.

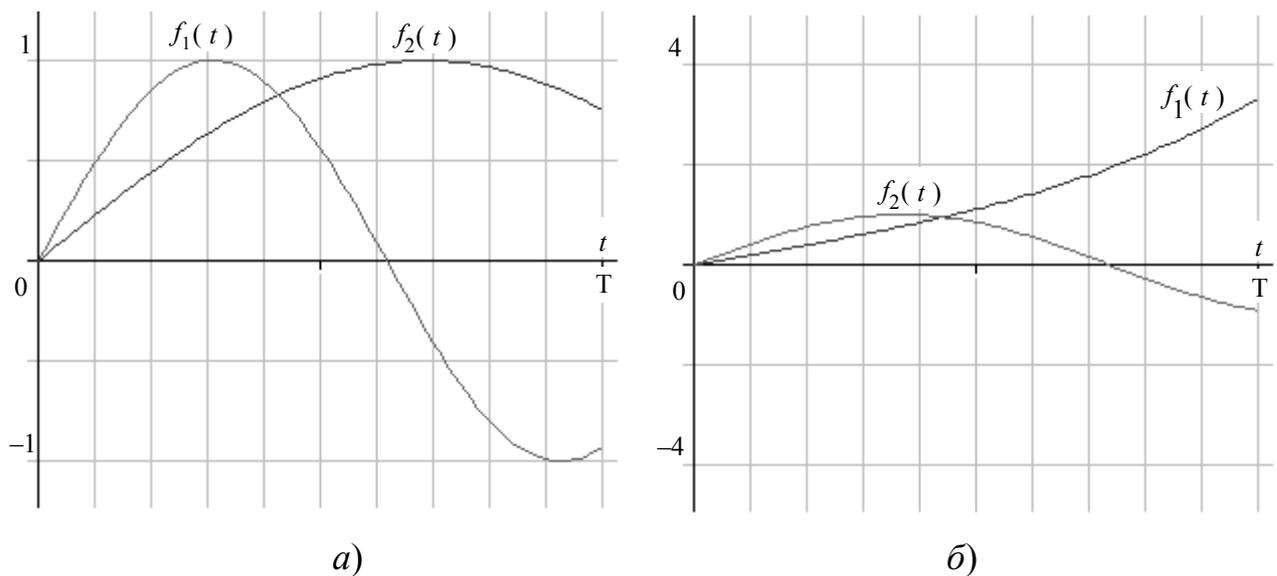


Рис. 2.4.3. Первые две сингулярные функции аperiodического звена:
 a – устойчивого; b – неустойчивого.

В критическом случае, при $T = -b$ гиперболическая зависимость сменяется линейной $f_1 = t$ и при дальнейшем уменьшении T – синусоидальной $f_1 = \sin(\omega_1 t)$. Тем самым, при малых значениях T оба аperiodических звена, устойчивое и неустойчивое, по своим характеристикам, включая сингулярные функции, приближаются к интегратору.

2.5. Графо-аналитический метод исследования

Частотная теория систем автоматического регулирования была создана до применения вычислительной техники и выработала эффективный графо-аналитический метод определения устойчивости динамических систем. На нем основаны, в частности, широко используемые критерии Найквиста, Попова и некоторые другие. Ниже предлагается развитие этого подхода для получения спектральных характеристик оператора свертки на ограниченном интервале времени.

Для демонстрации закономерностей рассмотрим частотные характеристики интегратора для интервала времени $T = 5$ (см. рис. 2.5.1).

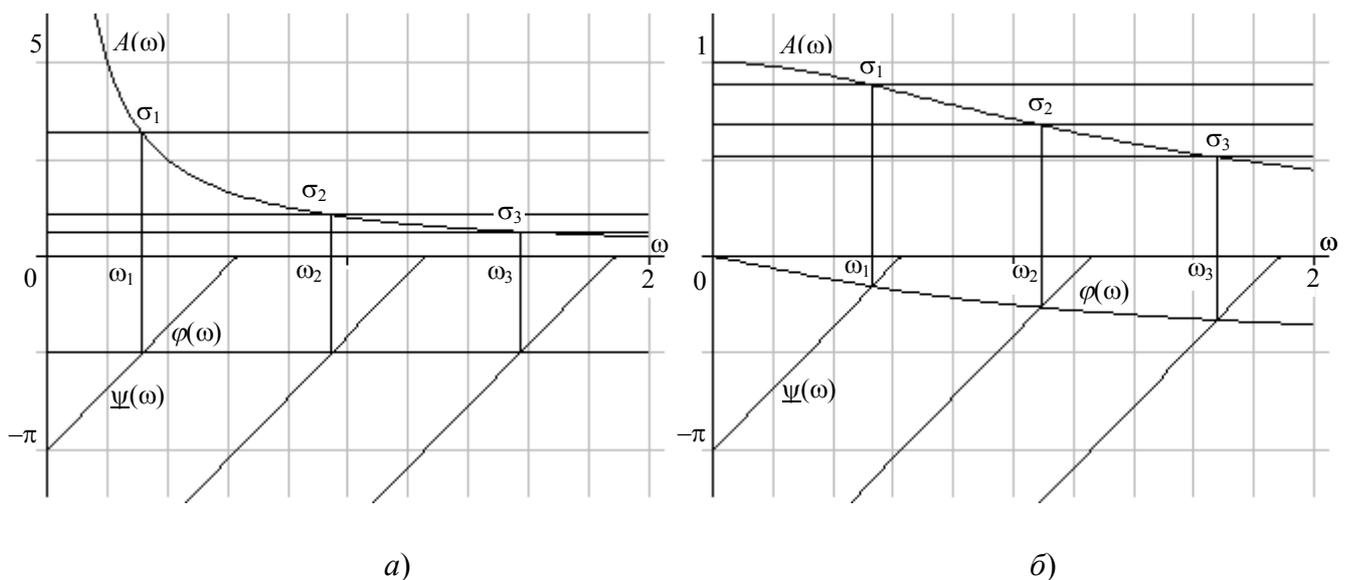


Рис. 2.5.1. Частотные характеристики интегратора (а) и аperiodического звена (б) на конечном интервале времени.

На рис. 2.5.1, а приведены его амплитудная $A(\omega)=1/\omega$ (выше оси частот) и фазовая $\varphi(\omega) = -\pi/2$ (ниже оси частот, оси характеристик совмещены, но масштабы вниз и вверх разные) частотные характеристики, а также смещенная фазовая характеристика флип-оператора $\psi(\omega) = \omega T - \pi$, инвертированная по знаку для удобства учета баланса фаз $\varphi(\omega) = \psi(\omega)$.

Напомним, что фазо-частотное уравнение дает здесь тривиальное решение относительно сдвига фазы $\theta = 0$.

Учитывая синусоидальный вид сингулярных функций, линии частотных характеристик флип-оператора размножены с интервалом 2π .

По точкам пересечения частотных характеристик $\varphi(\omega)$ и $\psi(\omega)$ выясняется частота ω_1 главной сингулярной функции, отвечающая максимальному сингулярному числу σ_1 , а также частоты и значения сингулярных чисел остальных сингулярных функций $f_k(t) = \sin(\omega_k t)$.

На рис. 2.5.1, б) для сравнения приведены аналогичные частотные характеристики апериодического звена. Точки пересечения кривых $\varphi(\omega)$ и $\psi(\omega)$ в этом случае располагаются на оси частот нерегулярно. Проведенный анализ показывает, что чем больше значение T , тем плотнее лежат точки дискретного спектра на непрерывной АЧХ. В области высоких частот (при малых T) спектральные характеристики различных динамических систем сближаются.

Частотный подход дает прозрачную интерпретацию собственных значений, как точек АЧХ, взятых при дискретных значениях аргумента, т.е. частот, удовлетворяющих фазовым ограничениям. Он ценен не только как метод получения конкретного результата. С его помощью становятся видны тенденции изменения дискретного спектра по мере изменения протяженности интервала T , характеристик динамических звеньев (постоянных времени, коэффициентов демпфирования и т.д.). Он указывает на неравномерный характер распределения парциальных частот.

У колебательных систем парциальные частоты сосредоточены возле резонансных пиков АЧХ, образуя близкие пары. На высоких частотах, отвечающих малым значениям сингулярных чисел, резонансные пики перестают определять характер сингулярных функций, они все более приближаются к характеристикам n -кратного интегратора, по этой причине его исследование представляет особый интерес.

2.6. Выводы

Анализ поведения динамических систем на конечном интервале времени важен для многих прикладных задач. Классическая теория линейных систем в значительной степени ориентирована на бесконечный или полубесконечный интервал времени. Это касается аппарата частотных характеристик, преобразования Лапласа, анализа устойчивости и других областей, где получено много красивых и полезных результатов.

Однако на практике такой подход применим лишь для систем, время работы которых значительно больше длительности переходных процессов. Вместе с тем, реальные системы часто работают на конечных интервалах времени, соизмеримых с временем переходных процессов системы. В таких условиях многие результаты классической теории перестают быть справедливыми или вообще теряют смысл. Это касается, например, вопросов устойчивости систем на конечном интервале времени, а также той роли, которую играют синусоидальные гармонические сигналы в частотном анализе. Поэтому представляется важным изучение, во-первых, тех результатов и положений классической теории, которые сохраняются и на конечных интервалах времени (возможно с частичной модификацией) и, во-вторых, изучение новых эффектов и свойств, которые здесь появляются. В этом смысле можно говорить о необходимости развития финитной теории линейных систем.

В главе исследован один из аспектов этой теории, связанный с изучением спектральных характеристик оператора свертки на конечном интервале времени. Разработан способ определения его сингулярных чисел и сингулярных функций и исследованы их свойства. При неограниченном увеличении интервала времени сингулярные функции становятся синусоидальными, однако на конечном интервале они носят совершенно иной характер и представляют собой полигармонические сигналы с различными парциальными частотами.

Глава 3.

Экспериментальные методы поиска сингулярных функций

3.1. Основные понятия и определения

Рассмотрим линейную динамическую систему размерности n с несколькими входами и выходами

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t),\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

где $\mathbf{x}(t) \in R^n$ – вектор состояния; $\mathbf{u}(t) \in R^r$ и $\mathbf{y}(t) \in R^s$ – входной и выходной векторные сигналы; \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} – постоянные матрицы соответствующих размерностей; начальное состояние $\mathbf{x}(0)=0$, $0 \leq t \leq T$. Его можно описать также матричной передаточной функцией $\mathbf{Q}(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$, либо импульсной весовой характеристикой $\mathbf{q}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$.

Обозначим через S и Γ оператор свертки и ганкелев оператор системы (3.1.1). Действие этих операторов на интервале $(0, T)$ задается формулами

$$\mathbf{y}(t) = S\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{q}(t - \tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau,\tag{3.1.2}$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \Gamma\mathbf{u}(t) = \int_0^T \mathbf{q}(t + \tau)\mathbf{v}(\tau)d\tau,\tag{3.1.3}$$

В разделе 3.2 наряду с описанием (3.1.3) будет рассматриваться более общий вид ганкелева оператора, осуществляющего отображение $\Gamma: L_2^y(-T_1, 0) \rightarrow L_2^y(0, T_2)$. Каждый из этих операторов исчерпывающим образом описывает вход-выходные зависимости системы, но их математические свойства существенно различаются.

Оператор свертки S – это оператор типа Вольтерра, он характеризуется нулевым спектром и не имеет собственных функций даже в случае скалярных систем (не существует входного сигнала, сохраняющего свою форму при прохождении через систему с нулевыми начальными условиями). Ядро интегрального оператора (3.1.2) зависит от разности $t - \tau$.

Ганкелев оператор Γ имеет симметричное ядро, зависящее от суммы $t + \tau$, которое не меняется при перестановке аргументов. Отсюда вытекает, что при $r = s = 1$ (односвязные системы или SISO-системы) ганкелев оператор, будучи симметричным, должен обладать вещественным спектром и набором ортогональных собственных функций $f_i(t)$. В [82] показано, что для односвязных систем число этих функций конечно, равно размерности системы n и совпадает с рангом ганкелева оператора. Аналитически они задаются формулами $f_i(t) = \mathbf{G}_i e^{At} \mathbf{B}$, $i = \overline{1, n}$, где \mathbf{G}_i – левые собственные векторы кросс-грамиана системы $\mathbf{W}_{co} = \int_0^T e^{At} \mathbf{B} \mathbf{C} e^{At} dt$.

Для многосвязных систем (MIMO-систем) при $r \neq s$ ганкелев оператор оказывается "прямоугольным", поэтому вместо собственных функций приходится говорить о его сингулярных функциях, т.е. собственных функциях произведения $\Gamma^* \Gamma$, где Γ^* – сопряженный ганкелев оператор (ганкелев оператор дуальной системы). Левые и правые сингулярные функции определяются формулами

$$\mathbf{R}_i^T(t) = \mathbf{G}_i e^{At} \mathbf{B}, \quad \mathbf{S}_i(t) = \mathbf{C} e^{At} \mathbf{H}_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.1.4)$$

Пара векторных функций $\mathbf{R}_1(t)$ и $\mathbf{S}_1(t)$, отвечающая максимальному сингулярному числу, называется максимизирующей парой Шмидта.

Функция $\mathbf{R}_1(t)$ обладает способностью в наибольшей степени возбудить систему, обеспечивая получение выходного сигнала с максимальной энергией. При этом выходной сигнал оказывается пропорциональным $\mathbf{S}_1(t)$.

3.2. Содержание флип-метода в натурном эксперименте

Как уже отмечалось, при решении ряда прикладных задач возникает необходимость в отыскании собственных и сингулярных функций ганкелева оператора. Можно выделить два подхода к их нахождению – аналитический и экспериментальный. Аналитические методы опираются на формулы, приведенные в предыдущем разделе. Однако для их применения необходимо знать матрицы **A**, **B**, **C** описания в пространстве состояний либо матричную импульсную характеристику объекта. Если же математическое описание исследуемого объекта неизвестно, то аналитические методы непосредственно неприменимы. В таких случаях следует использовать практический подход, предполагающий разработку инженерных методов определения ганкелевых собственных и сингулярных функций путем проведения некоторых вход-выходных экспериментов над объектом.

Отметим, что с методической точки зрения здесь имеется полная аналогия с задачей определения импульсной весовой характеристики объекта, для решения которой разработан ряд экспериментальных методов, таких как возбуждение объекта импульсным или ступенчатым сигналом с последующей обработкой реакции, возбуждение объекта белым шумом и вычисление взаимной корреляционной функции между выходом и входом, возбуждение объекта произвольным сигналом с последующим решением уравнения Винера–Хопфа и др.

В решении поставленной задачи выделим три этапа:

- разработку экспериментальной процедуры получения реакции $y(t)$ ганкелева оператора G на входное воздействие $u(t)$;
- разработку аналогичной процедуры для получения реакции сопряженного ганкелева оператора G^* ;
- разработку экспериментальной процедуры получения ганкелевых сингулярных функций.

Остановимся подробнее на каждом из этих этапов.

1. Реализация ганкелева оператора. Первым шагом к решению поставленной задачи должна быть разработка процедуры экспериментального получения реакции ганкелева оператора Γ на входное воздействие. Для этого воспользуемся идеей структурной реализации ганкелева оператора.

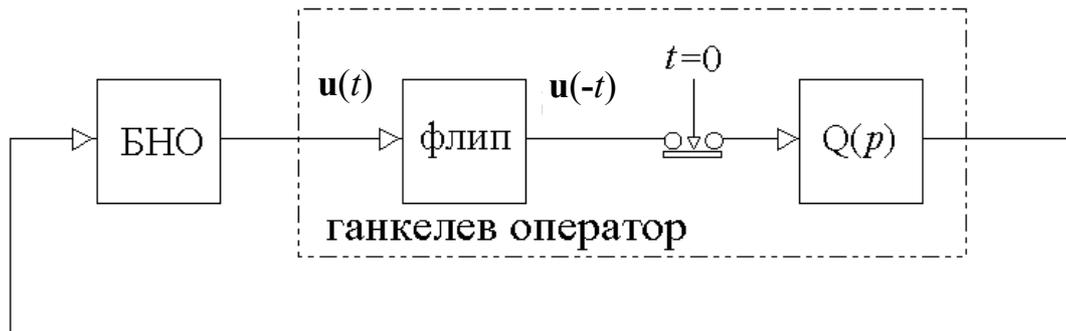


Рис. 3.2.1. Структурная реализация ганкелева оператора.

Ее суть поясняется рис. 3.2.1, на котором через $Q(p)$ обозначена передаточная функция исследуемой линейной динамической системы, через "флип" (от англ. "flip" – переворот) – блок, осуществляющий реверсирование входного сигнала относительно оси ординат, т. е. переход к копии сигнала в обратном времени, а БНО – блок нормировки и ортогонализации.

Математическое обоснование структурной реализации опирается на представление ганкелева оператора в виде произведения операторов управления L_c и наблюдения L_o : $\Gamma = L_o L_c$. Это приводит к описанию ганкелева оператора формулами

$$\mathbf{x}(0) = \int_{-T_1}^0 e^{-A\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(-\tau) d\tau, \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} e^{At} \mathbf{x}(0), \quad 0 < t < T_2, \quad (3.2.1)$$

где T_1 и T_2 – длительности интервалов управления и наблюдения соответственно.

Таким образом, для того, чтобы экспериментально наблюдать действие ганкелева оператора на сигнал $u(t)$, заданный на интервале $(0, T_1)$, надо развернуть его во времени, перейдя к сигналу $u(-t)$, возбудить им систему на интервале $(-T_1, 0)$, и зарегистрировать реакцию на интервале $(0, T_2)$. Далее указанную последовательность действий будем для краткости называть *ганкелевым экспериментом*.

Заметим, что при $T_1 \rightarrow 0, T_2 \rightarrow \infty$ ганкелев эксперимент превращается в эксперимент по определению импульсной весовой характеристики, а при $T_1 \rightarrow \infty, T_2 \rightarrow 0$ соответствует оператору управления состоянием L_c . В работе [19] показано, что ганкелев эксперимент может быть использован для определения ганкелевых функций односвязной системы. Это достигается с помощью его многократного повторения, при котором нормированный выходной сигнал предыдущего опыта используется в качестве входного сигнала для следующего.

Такой итерационный процесс будет сходиться к главной собственной функции ганкелева оператора $f_1(t)$, отвечающей максимальному по модулю собственному числу. Структурная реализация такой итерационной процедуры иллюстрируется рис. 3.2.1, где БНО обеспечивает отстройку от уже найденных собственных функций. После определения $f_1(t)$ все последующие собственные функции могут быть найдены с помощью этой схемы. Аналогичная схема для нахождения ганкелевых сингулярных функций системы с несколькими входами и выходами приведена на рис. 3.2.2.

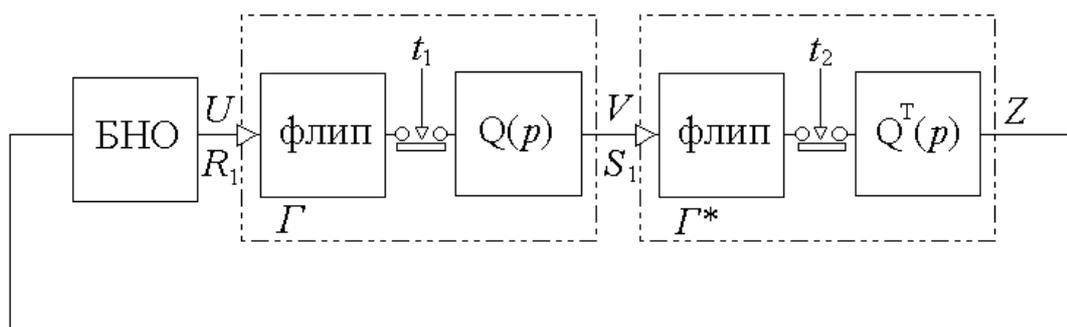


Рис. 3.2.2. Схема для нахождения ганкелевых сингулярных функций.

Схема иллюстрирует итерационную процедуру нахождения правых и левых сингулярных функций ганкелева оператора, т. е. функций $\mathbf{R}_i(t)$ и $\mathbf{S}_i(t)$, удовлетворяющих уравнению (3.1.4). Через $\mathbf{Q}^T(p)$ на ней обозначена передаточная функция дуальной системы, а через Γ^* – сопряженный ганкелев оператор. К сожалению, эта схема не может быть непосредственно применена для экспериментального определения ганкелевых сингулярных функций из-за наличия в ней сопряженного оператора Γ^* .

2. Реализация сопряженного ганкелева оператора. Чтобы выяснить структуру сопряженного оператора, воспользуемся классической формулой для его определения $(\Gamma \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \Gamma^* \mathbf{v})$, которая в нашем случае может быть записана в виде

$$\int_0^{T_2} (\Gamma \mathbf{u}(t))^T \mathbf{v}(t) dt = \int_0^{T_1} \mathbf{u}(t)^T \Gamma^* \mathbf{v}(t) dt. \quad (3.2.2)$$

Подставляя в левую часть вместо $\Gamma \mathbf{u}$ выражение (3.2.1), получаем

$$\int_0^{T_2} [\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \int_0^{T_1} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau]^T \mathbf{v}(t) dt = \int_0^{T_1} \mathbf{u}(\tau)^T \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T \tau} \int_0^{T_2} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{v}(t) dt d\tau.$$

Из сравнения этого выражения с правой частью формулы (3.2.2) вытекает, что сопряженный ганкелев оператор Γ^* системы (3.1.1) совпадает с ганкелевым оператором дуальной системы

$$\dot{\zeta}(t) = \mathbf{A}^T \zeta(t) + \mathbf{C}^T \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{z}(t) = \mathbf{B}^T \zeta(t), \quad (3.2.3)$$

у которой интервалы управления и наблюдения соответственно равны $(-T_2, 0)$ и $(0, T_1)$, т.е. поменялись местами по сравнению с исходной системой.

Передаточная функция системы (3.2.3) равна транспонированной передаточной функции $\mathbf{Q}^T(p)$ исходной системы (3.1.1). Это приводит к изображенной на рис. 4.2.2 структурной реализации сопряженного ганкелева оператора Γ^* . Для того чтобы эту схему можно было применить на практике, нужно найти способ моделирования дуальной системы с помощью исходной системы (ее математическое описание по-прежнему считается неизвестным). Он должен позволять, производя некоторые эксперименты с исходной системой, находить реакцию дуальной системы на заданные входные сигналы.

Покажем, что это возможно, и приведем описание такого способа. Сопоставим исходной системе (3.1.1) матричную передаточную функцию $\mathbf{Q}(p)$ размера $s \times r$ с элементами $Q_{ij}(p)$. Тогда дуальной системе будет соответствовать транспонированная матричная передаточная функция $\mathbf{Q}^T(p)$ размером $r \times s$ с элементами $Q_{ji}(p)$. Передаточная функция от i -го входа до j -го выхода исходной системы будет равна передаточной функции от j -го входа до i -го выхода дуальной системы.

Путь моделирования дуальной системы таков: пусть требуется получить реакцию $\mathbf{z}(t)=[z_1(t), \dots, z_r(t)]^T$ дуальной системы на входной сигнал $\mathbf{v}(t)=[v_1(t), \dots, v_s(t)]^T$: $\mathbf{z}(t)=\mathbf{Q}^T(p) \mathbf{v}(t)$ или в более подробной записи

$$z_i(t) = Q_{i1}v_1(t) + Q_{i2}v_2(t) + \dots + Q_{is}(t)v_s(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.2.4)$$

Подав сигнал $v_1(t)$ (первую компоненту вектора $\mathbf{v}(t)$) на i -й вход исходной системы, получим на ее первом выходе сигнал $Q_{i1}v_1(t)$, подав сигнал $v_2(t)$ на тот же вход, получим на втором выходе сигнал $Q_{i2}v_2(t)$ и т.д. Сумма этих сигналов даст нам $z_i(t)$. Сигнал возможно вычислить, но не измерить непосредственно на выходе объекта. Выполнив аналогичную процедуру для каждого $i = \overline{1, n}$, найдем все компоненты искомого вектора $\mathbf{z}(t)$.

Назовем эту последовательность действий *дуальным экспериментом*. Его структурная реализация, содержащая переключатели $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ и накапливающий сумматор, показана на рис. 3.2.3.

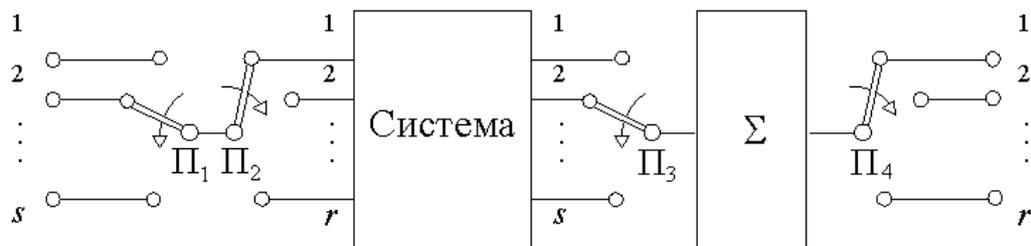


Рис. 3.2.3. Структурная реализация дуального эксперимента.

Переключатели Π_1, Π_3 и Π_2, Π_4 движутся синхронно. В исходном положении Π_2, Π_4 находятся в верхнем положении, Π_1, Π_3 пробегают все положения, полученные результаты суммируются, в результате чего определяется величина $z_1(t)$.

Переключатели Π_2, Π_4 переводятся во второе положение, вся процедура повторяется, в результате чего определяется величина $z_2(t)$ и т.д.

Дуальный эксперимент позволяет, проведя конечное число $N=r \times s$ экспериментов с исходной системой, найти реакцию дуальной системы на любое наперед заданное входное воздействие.

3. Получение ганкелевых сингулярных функций. Воспользуемся описанным способом для того, чтобы определить выходные сигналы блока $\mathbf{Q}^T(p)$ в схеме, изображенной на рис. 4.2.2. Это дает возможность осуществить ее экспериментальную реализацию, имея в распоряжении единичный экземпляр исследуемой системы, с которым сначала проводится ганкелев, а затем дуальный эксперимент.

Пропуская получаемый выходной сигнал через блок нормализации БНО и повторяя те же эксперименты, приходим к итерационной процедуре, которая сходится к максимизирующей паре Шмидта $\mathbf{R}_1(t), \mathbf{S}_1(t)$.

Более подробное описание этой процедуры сводится к следующему.

Шаг 1 (инициализация). Задать длительности интервалов управления и наблюдения T_1, T_2 ; указать число входов r и выходов s объекта; установить начальную векторную функцию $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_r(t)]^T, 0 < t < T_1$.

Шаг 2 (ганкелев эксперимент). Определить векторную функцию $\mathbf{v}(t), 0 < t < T_2$, путем возбуждения реального объекта на интервале $(-T_1, 0)$ функцией $\mathbf{u}(t)$, развернутой во времени, и регистрации его выходов на интервале $(0, T_2)$.

Шаг 3 (дуальный эксперимент). Определить векторную функцию $\mathbf{z}(t), 0 < t < T_1$, путем поочередной подачи компонент векторной функции $\mathbf{v}(t)$, развернутой во времени, на каждый из входов реального объекта и суммированием его реакций, полученных на интервале $(0, T_1)$, согласно формуле (3.2.4).

Шаг 4 (нормировка и переход к следующей итерации). Присвоить новое значение функции $\mathbf{u}(t) = \mathbf{z}(t) / \|\mathbf{z}(t)\|$ и перейти к шагу 2.

Условием окончания итерационной процедуры может служить близость векторных функций $\mathbf{u}(t)$, полученных на соседних итерациях.

Финальные значения векторных функций $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$ служат оценками (с заданной степенью точности) главных сингулярных функций ганкелева оператора $\mathbf{R}_1(t), \mathbf{S}_1(t)$ (максимизирующей пары Шмидта), а норма $\|\mathbf{v}(t)\|$ – оценкой главного сингулярного числа σ_1 объекта.

При отыскании остальных ганкелевых сингулярных чисел и функций алгоритм следует дополнить процедурой ортогонализации Грама–Шмидта для отстройки от уже найденных сингулярных функций. С целью улучшения сходимости алгоритма в случае близких сингулярных чисел могут использоваться различные его модификации.

Для односвязных систем алгоритм упрощается, поскольку шаги 2 и 3 будут отличаться только длительностями вход-выходных интервалов.

При отсутствии равных по модулю сингулярных чисел флип-метод позволяет найти полный набор левых и правых сингулярных функций ганкелева оператора для любых (устойчивых и неустойчивых) линейных систем при любых конечных длительностях интервалов T_1, T_2 .

При наличии кратных или равных по модулю сингулярных чисел соответствующие им ганкелевы сингулярные функции определяются с точностью до их линейных комбинаций и могут далее уточняться путем специальных экспериментов.

Метод предполагает структурную реализацию ганкелева оператора в виде последовательного соединения флип-оператора и исследуемой системы (рис. 3.2.1) и структурную реализацию сопряженного ганкелева оператора в виде последовательного соединения флип-оператора и дуальной системы (рис. 3.2.2), получение реакции дуальной системы на заданный входной сигнал путем экспериментов с исходной системой (рис. 3.2.3). Определенным недостатком описанного способа является большое количество экспериментов, которое требуется провести с объектом для определения ганкелевых сингулярных функций. Например, для объекта четвертого порядка с двумя входами и тремя выходами на каждой итерации требуется выполнить семь экспериментов, т.е. при среднем числе итераций 5–10 для определения четырех ганкелевых функций понадобится 140–280 экспериментов. В силу отмеченных причин применение описанного подхода ограничивается приложениями, где длительность экспериментов сравнительно невелика и имеется возможность их автоматизации.

В то же время возможность структурной реализации ганкелева оператора и сопряженного ганкелева оператора имеет ценность сама по себе и не сводится к использованию в описанной итерационной процедуре.

3.3. Распространение флип-метода на другие операторы

Оператор свертки на конечном интервале времени $(0, T)$ не имеет собственных функций. В то же время, у него существуют сингулярные функции, которые определяются как собственные функции произведения S^*S , где S^* – оператор, сопряженный по отношению к оператору свертки. Он представляет собой оператор свертки сопряженной системы

$$\begin{aligned} -\dot{\zeta}(t) &= \mathbf{A}^T \zeta(t) + \mathbf{C}^T v(t), \\ z(t) &= \mathbf{B}^T \zeta(t), \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

где $v(t)$, $z(t)$ – входной и выходной скалярные сигналы, начальное условие зависит от вида входного сигнала $v(t)$ и определяется формулой

$\zeta(0) = -\int_0^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T v(t) dt$, конечное значение $\zeta(T) = 0$. Интегральное описание

$$z(t) = S^* v(t) = z_0 + \int_0^t q^*(t - \tau) v(\tau) d\tau, \quad (3.3.2)$$

где $q^*(t) = \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T (T-t)} \mathbf{C}^T$ – импульсная весовая функция сопряженной системы. Начальное значение z_0 рассчитывается из условия $z(T) = 0$ и равно

$z_0 = -\int_0^T q(t) v(t) dt$. Для скалярных систем справедливо $q^*(t) = q(T - t)$. Пере-

ходя в уравнениях (3.3.1) к обратному времени $\tau = T - t$, получаем:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(\tau) &= \mathbf{A}^T \zeta(\tau) + \mathbf{C}^T v(\tau), \\ z(\tau) &= \mathbf{B}^T \zeta(\tau). \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Описанию соответствует передаточная функция $Q^T(p) = [\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}]^T$.

Из сопоставления систем (3.3.1) и (3.3.3) видно, что оператор S^* совпадает с оператором свертки дуальной системы (3.3.3), рассматриваемой в обратном времени. Отсюда следует, что для получения реакции сопряженного оператора на входной сигнал $v(t)$ нужно подать этот сигнал, развернув его во времени, на вход дуальной системы, и результат вновь развернуть во времени.

Соответствующая структурная реализация поясняется рис. 3.3.1.

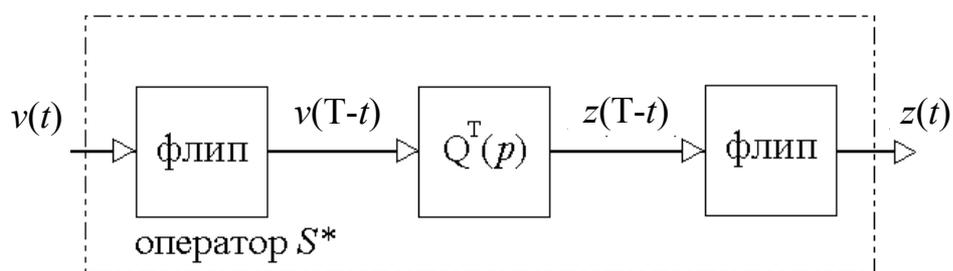


Рис. 3.3.1. Структурная реализация сопряженного оператора.

Через "флип" на этом рисунке обозначен блок, выполняющий реверсирование (разворот) сигнала во времени относительно середины интервала $(0, T)$, т.е. переход от сигнала $v(t)$ к сигналу $v(T-t)$. В конечном итоге, для реализации сопряженной системы S^* может быть практически без изменений использован структурный подход, особенности которого, связанные с моделированием дуальной системы, изложены в предыдущем разделе. Для односвязных систем последовательное соединение S и S^* в кольце можно заменить, как видно из структурной реализации сопряженного оператора, двойным циклом S с реверсом (флипом).

Эксперимент по нахождению главной сингулярной функции оператора свертки упрощается настолько, что заслуживает отдельного описания.

Шаг 1 (инициализация). Задать длительность интервала управления и наблюдения T ; установить начальную скалярную функцию $u(t)$, $0 < t < T$, в качестве первого приближения можно использовать развернутые во времени импульсную весовую или переходную функции.

Шаг 2 (эксперимент свертки). Определить скалярную функцию $y(t)$, $0 < t < T$, путем возбуждения реального объекта функцией $u(t)$ и регистрации его выхода на заданном интервале.

Шаг 3 (флип). Реверсировать (развернуть) выходной сигнал во времени относительно середины интервала $(0, T)$, т. е. перейти от сигнала $y(t)$ к сигналу $z(t) = y(T-t)$.

Шаг 4 (нормировка и переход к следующей итерации). Присвоить новое значение функции $u(t) = z(t) / \|z(t)\|$ и перейти к шагу 2.

Условием окончания итерационной процедуры, ведущей к установлению главной сингулярной функции оператора свертки, может служить близость оценок $u(t)$, полученных на соседних итерациях.

Отметим, что искомая главная сингулярная функция представляет собой решение нетривиальной вариационной задачи по отысканию входного воздействия единичной энергии, заданного на интервале $(0, T)$, приводящего к получению выходного сигнала максимальной энергии на том же интервале. Очевидно, что при $T \rightarrow \infty$ решением этой задачи будет гармонический сигнал, частота которого соответствует максимуму АЧХ системы, однако на конечном интервале форма оптимального сигнала может оказываться достаточно сложной.

Возможности аналитических методов решения указанной оптимизационной задачи весьма ограничены, поэтому предложенная процедура может рассматриваться как эффективный численный метод ее решения.

Для получения второй и последующих сингулярных функций оператора свертки алгоритм, как и ранее, следует дополнить этапом ортогонализации Грама–Шмидта для отстройки от уже найденных сингулярных функций. Это позволяет найти любое требуемое число этих функций.

Алгоритм отыскания главной сингулярной функции оператора свертки многомерных систем отличается использованием структурной реализации дуального объекта и выглядит следующим образом.

Шаг 1 (инициализация). Задать длительность интервала управления и наблюдения T ; указать число входов r и выходов s объекта; установить начальную векторную функцию $\mathbf{u}(t)$, $0 < t < T$, в качестве первого приближения можно использовать ступенчатые функции.

Шаг 2 (эксперимент свертки). Определить векторную функцию $\mathbf{y}(t)$, $0 < t < T$, путем возбуждения реального объекта векторной функцией $\mathbf{u}(t)$ и регистрации его выхода на заданном интервале.

Шаг 3 (дуальный эксперимент свертки). Определить векторную функцию $\mathbf{z}(t)$, $0 < t < T$, путем поочередной подачи компонент векторной функции $\mathbf{y}(t)$, развернутой во времени, на каждый из входов реального объекта и суммированием его реакций согласно формуле (3.4); в завершение суммарный сигнал развернуть во времени относительно середины заданного интервала (флип).

Шаг 4 (нормировка и переход к следующей итерации). Присвоить новое значение функции $\mathbf{u}(t) = \mathbf{z}(t) / \|\mathbf{z}(t)\|$ и перейти к шагу 2.

Условием окончания итерационной процедуры установления главной сингулярной функции оператора свертки многосвязной системы может служить близость оценок – векторных функций $\mathbf{u}(t)$, полученных на соседних итерациях. Норма $\|\mathbf{z}(t)\|$ служит оценкой квадрата главного сингулярного числа.

Рассмотрим симметричную часть S_+ оператора свертки. Она определяется формулой $S_+ = (S+S^*)/2$, которая имеет смысл только для систем с равным числом входов и выходов (так называемых square systems).

Матричное описание оператора S_+ получаем, рассматривая параллельное соединение систем (3.1.1) и (3.3.1)

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & -\mathbf{A}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\zeta}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ -\mathbf{C}^T \end{pmatrix} \mathbf{u}(t);$$

$$\mathbf{y}_+(t) = 0,5(\mathbf{C} \quad \mathbf{B}^T) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\zeta}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\zeta}(T) = 0, \quad 0 < t < T.$$

Отметим, что это – оператор с ненулевыми краевыми условиями $\boldsymbol{\zeta}(0)$, $\mathbf{x}(T)$. Его интегральное описание получается суммированием формул (3.1.2), (3.3.2) и имеет вид

$$\mathbf{y}_+(t) = S_+ \mathbf{u}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_0^t \mathbf{q}_+(t-\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad 0 < t < T,$$

где $\mathbf{q}_+(t) = 0,5(\mathbf{q}(t) + \mathbf{q}(T-t))$ – симметричная часть импульсной характеристики системы. Она получается путем сложения импульсной характеристики со своим зеркальным отражением относительно середины временного интервала $(0, T)$. Начальное значение \mathbf{y}_0 определяется формулой

$$\mathbf{y}_0 = -0,5 \int_0^T \mathbf{q}(t) \mathbf{u}(t) dt.$$

Поскольку оператор S_+ симметричен, его спектр вещественный, а собственные функции ортогональны и совпадают с сингулярными функциями. Оператор S_+ возникает, в частности, при исследовании оптимизационной задачи для односвязных систем по нахождению входного сигнала $u(t)$ единичной энергии, максимизирующего скалярное произведение (u, y) входного и выходного сигналов на заданном интервале времени.

Попытка аналитического решения приводит к двухточечной граничной задаче, что, во-первых, сопряжено с известными трудностями, и во-вторых, требует знания математического описания объекта. Использование флип-метода позволяет найти указанные функции путем итерационных экспериментов, выполняемых с реальным объектом.

Заметим, что такой подход может оказаться удобным и при известном математическом описании, поскольку позволяет избежать процедуры решения двухточечной граничной задачи. Исходная схема итерационного эксперимента для нахождения собственных функций оператора S_+ представлена на рис. 3.3.2.

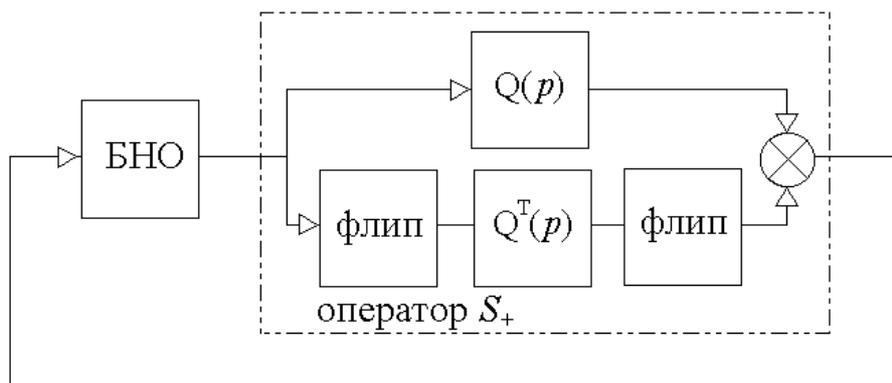


Рис. 3.3.2. Эксперимент для нахождения собственных функций

На этом рисунке, как и ранее, БНО – блок нормализации и (если необходимо) ортогонализации, флип – блок, обеспечивающий получение перевернутой относительно середины временного интервала копии входного сигнала. Для односвязных и симметричных систем реакции исходного и дуального объектов не отличаются между собой (они "самодуальны"). Для них в ряде важных случаев главная собственная функция обладает симметрией и разворот (флип) относительно середины интервала не меняет ее вида. Учет данного обстоятельства позволяет упростить схему итерационного эксперимента, устранив одну из параллельных ветвей на рис. 3.3.2.

Схема приводит к следующему итерационному алгоритму определения собственных функций оператора S_+ .

Шаг 1 (инициализация). Задать длительность интервала управления и наблюдения T ; указать число входов и выходов $r = s$ объекта; установить начальную векторную функцию $\mathbf{u}(t)$, $0 < t < T$, в качестве первого приближения можно использовать ступенчатые функции.

Шаг 2 (эксперимент свертки). Определить векторную функцию $\mathbf{y}(t)$, $0 < t < T$, путем возбуждения реального объекта векторной функцией $\mathbf{u}(t)$ и регистрацией его реакции на заданном интервале.

Шаг 3 (симметрирование). Определить векторную функцию $\mathbf{z}(t)$, $0 < t < T$, путем сложения реакции $\mathbf{y}(t)$ и ее зеркального отражения относительно середины интервала $\mathbf{y}(T - t)$.

Шаг 4 (нормировка и переход к следующей итерации). Присвоить новое значение функции $\mathbf{u}(t) = \mathbf{z}(t) / \|\mathbf{z}(t)\|$ и перейти к шагу 2.

Условием окончания итерационной процедуры установления главной собственной функции оператора S_+ многосвязной системы может служить близость векторных функций $\mathbf{u}(t)$, полученных на соседних итерациях. Норма $\|\mathbf{z}(t)\|$ служит оценкой главного собственного числа.

Таким образом, в данном случае использование флип-метода позволяет экспериментально отыскивать собственные функции симметричной части оператора свертки.

Аналогичным образом флип-метод может быть применен для нахождения сингулярных функций операторов управляемости, наблюдаемости и других операторов, связанных с линейными системами.

Более того, нет видимых препятствий для применения его к нелинейным системам, для которых также могут быть организованы итерационные флип-процедуры.

3.4. Примеры применения флип-метода

Пример 1. Найдем сингулярные функции ганкелева оператора, оператора свертки и симметричной части оператора свертки для четырех элементарных звеньев – интегратора, устойчивого аperiodического звена, неустойчивого аperiodического звена и колебательного звена с передаточными функциями

$$Q_1(p) = \frac{1}{p}, \quad Q_2(p) = \frac{1}{p+1}, \quad Q_3(p) = \frac{1}{p-1}, \quad Q_4(p) = \frac{1}{0,01p^2 + 0,05p + 1}. \quad (3.4.1)$$

В результате применения флип-метода для определения указанных сингулярных функций, при $T=2$ получены графики, приведенные на рис. 4.4.1.

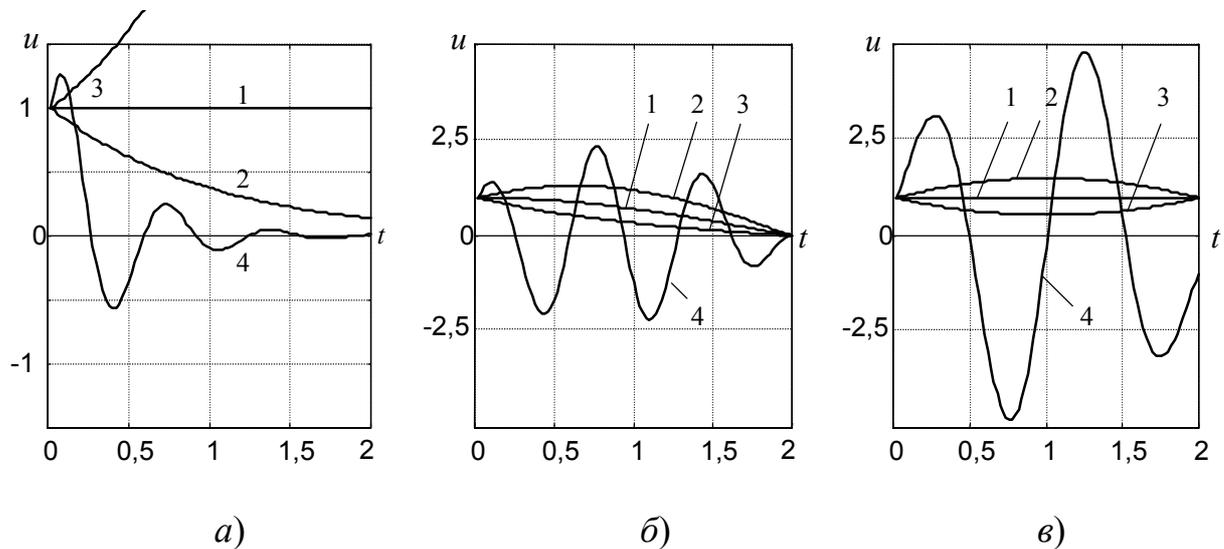


Рис. 3.4.1. Сингулярные функции для четырех элементарных звеньев:

a – ганкелева оператора, *б* – оператора свертки, *в* – оператора S_+ .

Отметим некоторые особенности. Ганкелевы сингулярные функции (рис. 3.4.1, *a*) во всех случаях характеризуют свободное движение системы, отвечающее некоторым специальным начальным условиям.

Сингулярные функции оператора свертки (рис. 3.4.1, б) имеют вид видеоимпульсов для аperiodических систем или радиоимпульсов (видеоимпульсов с высокочастотным заполнением) для колебательных систем. Огибающая импульса для неустойчивых систем, как правило, оказывается вогнутой, а для устойчивых – выпуклой. Следует отметить симметричность или кососимметричность этих графиков относительно середины временного интервала.

Все приведенные сингулярные функции обладают теми или иными экстремальными свойствами. В частности, если функции рис. 3.4.1, а использовать в качестве входных сигналов ганкелева оператора звеньев (3.4.1), развернув их во времени и отнормировав, то графики выходных сигналов ганкелева эксперимента будут иметь ту же форму и обладать максимальной энергией (она будет равна квадрату ганкелевой нормы системы). Аналогично, если отнормированные кривые рис. 3.4.1, б использовать в качестве входных сигналов оператора свертки звеньев (3.4.1), то выходные сигналы будут иметь максимальную энергию (она будет равна квадрату второй нормы оператора свертки).

Форма каждого из выходных сигналов будет совпадать с формой соответствующего входного сигнала, развернутого во времени.

Наконец, если в качестве входного сигнала оператора свертки звеньев (3.4.1) использовать функции рис. 3.4.1, в, то выходные сигналы звеньев будут в наибольшей степени коррелированы с входными сигналами в смысле максимума скалярного произведения функций $u(t)$, $y(t)$, рассматриваемых на заданном временном интервале.

Подобные экстремальные свойства будут иметь место и для звеньев с другими передаточными функциями.

Пример 2. Рассмотрим ганкелев эксперимент с двухзвенным маятником, изображенным на рис. 3.4.2.

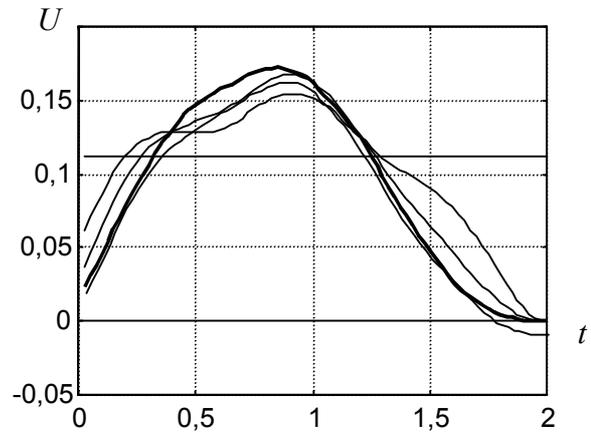
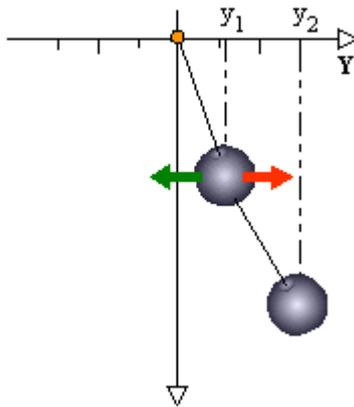


Рис 3.4.2. Двухзвенный маятник. Рис 3.4.3. Итерационный процесс.

Эта система в линейном приближении описывается уравнениями вида (3.1.1) с матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{g}{l}(1 + 2m_1/m_2) & -k & \frac{gm_1/m_2}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 & -\frac{g}{l} & -k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения, $m_1 = m_2 = 0,5 \text{ кг}$ – массы маятников, $l = 0,5 \text{ м}$ – длина каждого из звеньев, $k = 3$ – коэффициент, характеризующий трение. Управление прикладывается к верхнему маятнику, выходными переменными y_1, y_2 служат отклонения маятников. При подаче ступенчатого воздействия система отвечает колебаниями, графики которых регистрируются и подаются на входы сопряженного объекта: дуальная система, в отличие от исходной, имеет два входа и один выход.

Реакция системы находится путем двух экспериментов с подачей пары управляющих воздействий поочередно на вход исходной системы, суммарная реакция подсчитывается сложением колебаний двух маятников, причем первое слагаемое формируется как колебание верхнего маятника в первом эксперименте, а второе – как колебание нижнего маятника во втором эксперименте. Итерационный процесс определения главной сингулярной функции оператора свертки, находимой флип-методом, иллюстрируется рис. 3.4.3. Процесс сходится уже на пятой итерации.

Ганкелев эксперимент иллюстрируется рисунками 3.4.4, 3.4.5. На рис. 3.4.4 показан итерационный процесс определения главной сингулярной функции (сходится к нижней кривой). Рис. 3.4.5 показывает реакцию системы на итоговый входной сигнал.

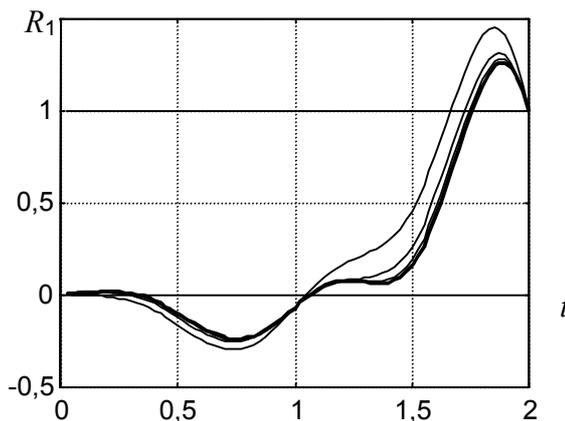


Рис 3.4.4. Определение главной сингулярной функции.

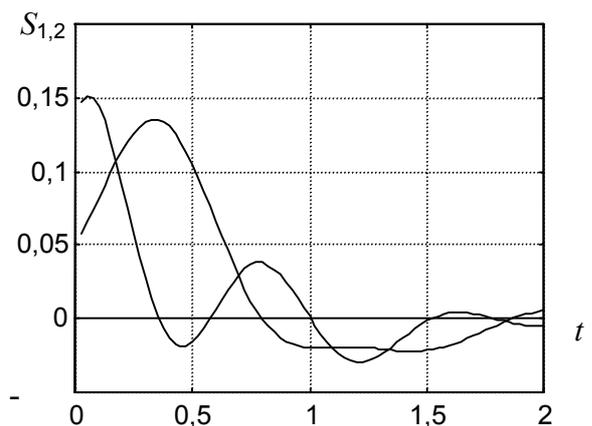


Рис 3.4.5. Реакция системы

Для обоих рассмотренных случаев реакция системы на входное воздействие экстремальна в смысле достижения наибольшей совокупной энергии выходных сигналов, графики между тем существенно различаются, поскольку ганкелев эксперимент, в отличие от эксперимента с оператором свертки, обеспечивает наиболее энергичное раскачивание маятников после завершения подачи входного воздействия. Амплитуда раскачивающего воздействия возрастает к концу интервала управления.

Пример 3. Флип-метод может применяться как для конечномерных, так и для бесконечномерных систем. Проиллюстрируем это на примере определения сингулярных функций оператора свертки и его симметричной части для участка газопровода (см. рис. 3.4.6), где в качестве входной и выходной переменных выступают давление газа на левом и правом концах участка, т.е. при $x = 0$ и $x = L$.

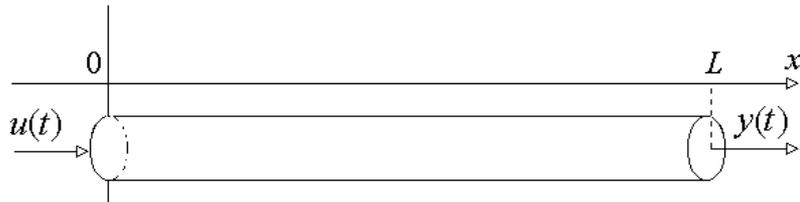


Рис 3.4.6. Схема участка газопровода

Теоретически эта система с распределенными параметрами может быть описана уравнением теплопроводности вида

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + u,$$

однако для применения флип-метода это описание, вообще говоря, не требуется. На рис. 3.4.7 приведены графики импульсной и переходной функций участка газопровода для $a = 1$, $L = 12$.

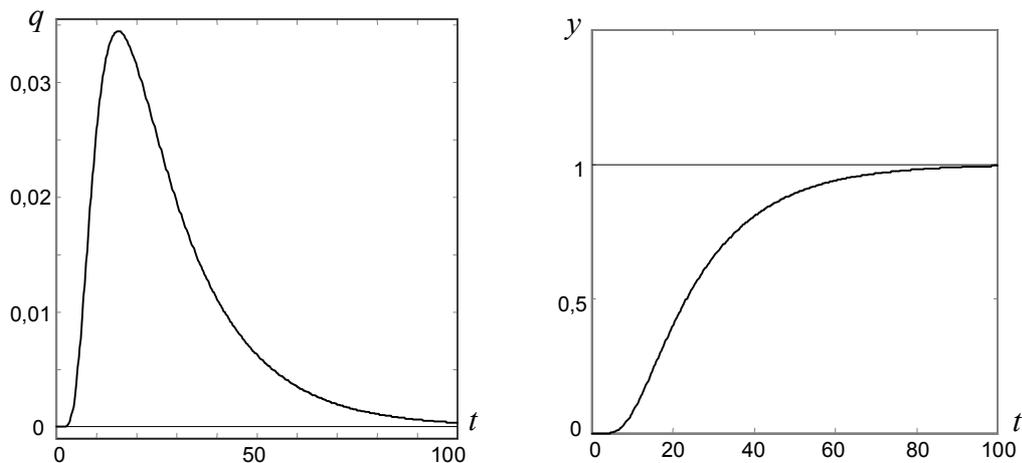


Рис. 3.4.7. Импульсная и переходная характеристики.

Графики сингулярных функций оператора свертки, полученные в результате экспериментов для интервалов времени 20 и 60 с, представлены на рис. 3.4.8.

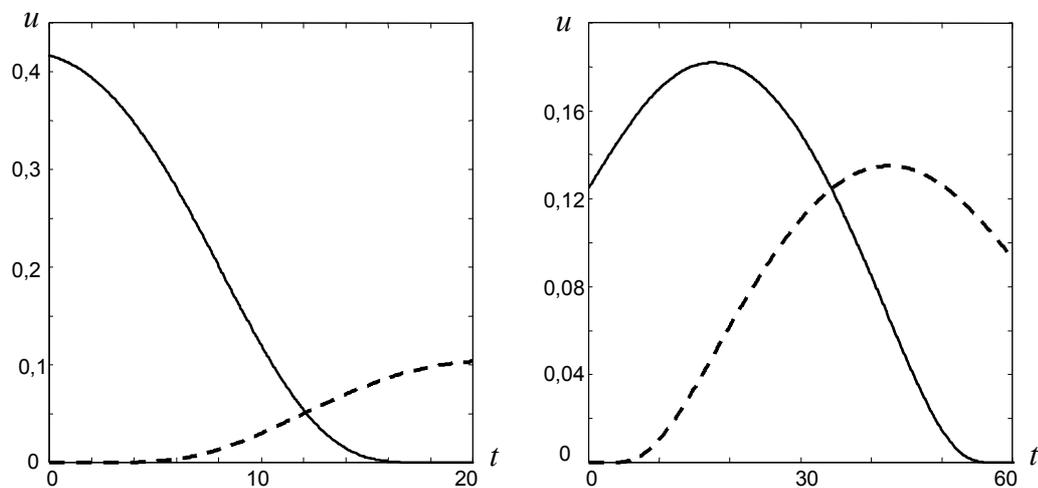


Рис. 3.4.8. Сингулярные функции оператора свертки.

Пунктирными линиями выделена реакция системы на эти функции. На рис. 3.4.9 показаны собственные функции оператора S_+ и реакция системы на входные воздействия в виде этих функций.

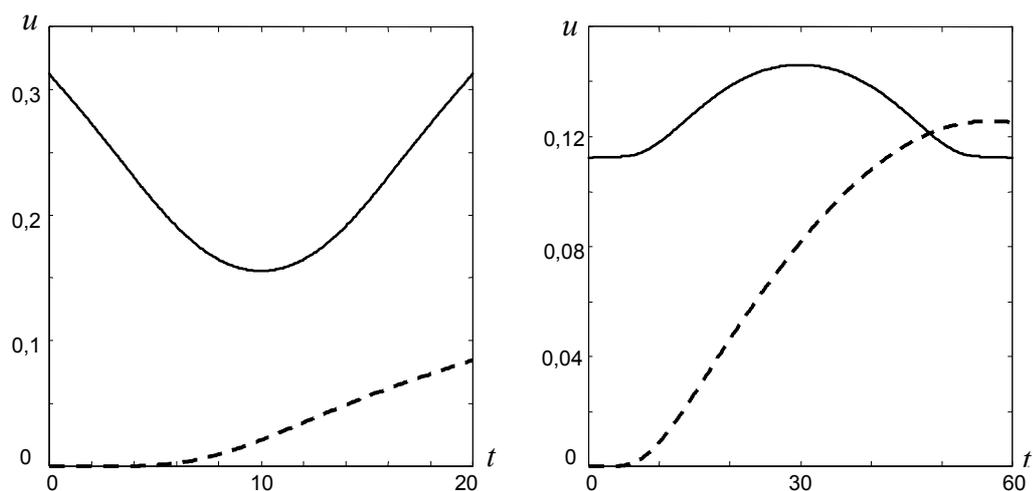


Рис. 3.4.9. Собственные функции оператора S_+ и реакция системы.

3.5. Идентификация на основе сингулярных функций

Рассмотрим односвязную линейную динамическую систему размерности n . Ее можно описать в пространстве состояний

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t),\end{aligned}\tag{3.5.1}$$

где $\mathbf{x}(t) \in R^n$ – вектор состояния; $u(t)$ и $y(t)$ – входной и выходной скалярные сигналы, \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} – постоянные матрицы соответствующих размерностей, начальное состояние $\mathbf{x}(0)=0$, $0 \leq t \leq T$.

Матрица \mathbf{A} сбалансированного канонического представления этой системы наделена зеркальной симметрией относительно ее главной диагонали. Компоненты вектора состояния системы в этой форме и есть сингулярные функции при подаче на ее вход дельта-импульса.

Коэффициенты матрицы системы \mathbf{A} обратно пропорциональны разностям собственных значений ганкелева оператора (флип-метод позволяет найти именно их) так, что $a_{ij} = \frac{c_i b_j}{\lambda_i - \lambda_j}$. Можно показать, что начальные значения ганкелевых сингулярных функций "высекают" значения вход-выходных коэффициентов $c_i = f_i(t_0)$. Элементы вектора входа \mathbf{B} равны им, но строго положительны.

Столь простые соотношения устанавливаются при условии нормирования функций так, чтобы знаки собственных чисел и коэффициентов вектора входа \mathbf{C} совпадали, кроме того, нужно уравновесить квадраты норм сингулярных функций, сделав их равными сингулярным числам системы.

Вместе с тем, импульсную весовую функцию можно найти как линейную комбинацию сингулярных функций ганкелева оператора $q(t) = b_1 f_1(t) + \dots + b_n f_n(t)$.

По сравнению с частотным методом рассмотренное направление выигрывает меньшим количеством вход-выходных экспериментов и более интересным типом оценок. Таким образом, сингулярные функции применимы для решения задач как параметрической, так и сигнальной идентификации. Остановимся на этом подробнее.

Как отмечалось, с объектом можно связать большое количество линейных операторов, описываемых уравнением $\mathbf{y}=\mathbf{Q}\mathbf{u}$, где \mathbf{Q} – матрица дискретного представления динамики, массивы

$$\mathbf{u} = [u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_N)]^T \text{ и } \mathbf{y} = [y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_N)]^T$$

содержат выборки входного и выходного сигналов, взятые с шагом h ; $t_0=0$, $t_N=T$, $h=T/N$. Каждый из линейных операторов взаимно однозначно описывает динамический объект и связан с прочими моделями. Например, для оператора свертки S ненулевые элементы матрицы \mathbf{Q} пропорциональны отсчетам импульсной весовой функции $q(t)$

$$\mathbf{Q} = h \begin{pmatrix} q(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ q(t_1) & q(t_0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q(t_N) & q(t_{N-1}) & \dots & q(t_0) \end{pmatrix}.$$

Теплицева матрица \mathbf{Q} симметрична относительно побочной диагонали. После разбиения матрицы на блоки $\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_{11} \ \mathbf{Q}_{12}; \mathbf{Q}_{21} \ \mathbf{Q}_{22}]$ и зеркального отражения ненулевых элементов \mathbf{Q}_{21} относительно центральной вертикальной оси, получим симметричную матрицу ганкелева оператора (при разнесенных интервалах) $\mathbf{\Gamma} = \text{flip}(\mathbf{Q}_{21})$.

Ниже нас будет интересовать, в первую очередь, идентификация на основе функциональных инвариантов оператора свертки.

Для нужд идентификации компоненты произведения $\mathbf{Q}\mathbf{u}$ подвергаются перестановке, так что

$$\mathbf{U}\mathbf{q} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{U} = h \begin{pmatrix} u(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ u(t_1) & u(t_0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(t_N) & u(t_{N-1}) & \cdots & u(t_0) \end{pmatrix}, \quad (3.5.2)$$

где \mathbf{q} – вектор отсчетов импульсной весовой характеристики.

В основе корреляционного и некоторых других подходов лежит, как известно, метод наименьших квадратов (МНК), согласно которому вместо исходной системы используется система нормальных уравнений $\mathbf{U}^T\mathbf{U}\mathbf{q}=\mathbf{U}^T\mathbf{y}$. Интегральная форма записи этого уравнения называется уравнением Винера-Хопфа. Его используют в теоретических изысканиях, на практике распространена матричная модель, более близкая к непосредственному применению численных методов линейной алгебры.

В отличие от \mathbf{U} матрица МНК $\mathbf{U}^T\mathbf{U}$ симметрична, однако теряет треугольную теплицевую структуру, что усложняет алгоритмы численного решения, если не использовать специальный входной сигнал. Таковым является нормированный белый шум, для которого матрица системы нормальных уравнений упрощается до единичной $\mathbf{U}^T\mathbf{U}=\mathbf{E}$.

Если указанное условие соблюдается, то оцениваемые отсчеты импульсной весовой характеристики равны отсчетам взаимной корреляционной функции $\mathbf{r}_{wy} = \mathbf{U}^T\mathbf{y}$ входного и выходного сигналов, что и записывается в форме решения $\mathbf{q} = \mathbf{r}_{wy}$, поясняющего суть корреляционного подхода. Он является, как видно, весьма частным случаем, целиком основанным на свойствах входного сигнала. Простота, с которой получается искомый результат, обеспечила ему популярность.

Недостатки такого алгоритма идентификации являются прямым продолжением его достоинств. В самом обосновании корреляционного подхода усматривается неразрешимое противоречие, поскольку требование $U^T U = E$ означает, что отличная от диагональной матрица U должна быть одновременно треугольной и унитарной. Противоречие снимается только тогда, когда в качестве входного сигнала избирается не белый шум, а дельта-импульс (когда $U = E$), оба сигнала представляют собой абстракции, реализуемые на практике своими приближениями. Как следствие, требуемое условие на входе никогда не выполняется.

Обозначим через S и Γ оператор свертки и ганкелев оператор системы. Их действие на интервале $(0, T)$ задается формулами

$$y(t) = S u(t) = \int_0^t q(t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad y(t) = \Gamma v(t) = \int_0^T q(t + \tau) v(\tau) d\tau.$$

Здесь и далее наряду с указанным описанием будет рассматриваться общий вид ганкелева оператора, осуществляющего отображение $\Gamma : L_2^y(-T_1, 0) \rightarrow L_2^y(0, T_2)$.

Содержание флип-метода применительно к оператору свертки состоит в следующем. В общем, не существует входного сигнала, сохраняющего свою форму при прохождении через систему с нулевыми начальными условиями. Ситуация изменяется, если рассматривать входной сигнал перевернутым во времени. Энергетические характеристики сигнала инвариантны к такому преобразованию входа. Так что сингулярные функции оператора свертки тождественны собственным функциям оператора, получаемого выделением его мультипликативной симметричной части.

Матрица \mathbf{S} мультипликативной симметричной части связана с матрицей \mathbf{T} оператора свертки произведением $\mathbf{T}=\mathbf{S}\mathbf{P}$, где \mathbf{P} – перестановочная матрица, осуществляющая расстановку столбцов \mathbf{S} в обратном порядке, по отношению к \mathbf{T} .

Иными словами, матрица \mathbf{S} имеет вид

$$\mathbf{S} = h \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & q(t_0) \\ 0 & \cdots & q(t_0) & q(t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q(t_0) & \cdots & q(t_{N-1}) & q(t_N) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, выборка \mathbf{f} , содержащие значения сингулярной функции оператора свертки, удовлетворяет уравнению $\mathbf{S} \mathbf{f} = \lambda \mathbf{f}$, где λ – собственное число \mathbf{S} , модуль λ – сингулярное число σ матрицы \mathbf{T} .

Значения \mathbf{f} можно найти итерационно используя флип-метод, т.е. подавая нормированный и развернутый во времени выходной сигнал системы на ее вход. Как правило, после нескольких итераций, процесс сходится к главному сингулярной функции. Полученная функция может быть использована для идентификации.

Это обстоятельство следует из рассмотрения системы уравнений, применительно к нашему случаю имеющей вид

$$\mathbf{F}\mathbf{q} = \lambda \mathbf{f}, \quad \mathbf{F} = h \begin{pmatrix} f(t_N) & 0 & \cdots & 0 \\ f(t_{N-1}) & f(t_N) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(t_0) & f(t_1) & \cdots & f(t_N) \end{pmatrix}. \quad (3.5.3)$$

Из уравнения видно, что крайние значения сингулярной функции связаны между собой так $hf(t_N)q(t_0) = \lambda f(t_0)$.

Если зажать начальные значения сингулярных функций некоторым общим условием нормировки, то хвостовые их части "высекают" спектр (т.е. пропорциональны сингулярным числам). Флип-метод формирует главную сингулярную функцию, отвечающую максимальному сингулярному числу оператора свертки. Уравнение (3.5.3) позволяет однозначно найти $\mathbf{q} = \lambda \mathbf{F}^{-1}\mathbf{f}$.

Заметим, что по условиям задачи матрица \mathbf{F} треугольная, что делает ее особенно удобной для применения численных методов линейной алгебры.

Рекуррентный алгоритм поиска отсчетов $q(t)$ импульсной весовой характеристики по отсчетам $f(t)$ сингулярной функции оператора свертки выглядит так

$$q(t_0) = \frac{\lambda f(t_0)}{h f(t_N)}, \quad q(t_i) = \frac{\lambda f(t_i)/h - \sum_{j=0}^{i-1} q(t_j)f(t_{N-i+j})}{f(t_N)}. \quad (3.5.4)$$

Нормируем $f(t_N)=1$, тогда формулы упрощаются

$$q(t_0) = \frac{\lambda}{h} f(t_0), \quad q(t_i) = \frac{\lambda}{h} f(t_i) - \sum_{j=0}^{i-1} q(t_j)f(t_{N-i+j}). \quad (3.5.5)$$

В процессе рекурсий ошибки алгоритма накапливаются к хвосту импульсной весовой характеристики, что можно использовать для контроля устойчивости вычислений.

Плохо обусловленные задачи – не новость в специальной литературе, но каковы бы ни были методы регуляризации, всегда имеется предел плохой обусловленности, при котором в численном решении уравнений нельзя получить ни одного верного знака. Именно этот уникальный случай, рассматриваемый, нередко, как досадное недоразумение, которого стараются избежать, привлекает теперь наше внимание.

Вместо "решения" нерешаемых уравнений $\mathbf{P} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{R}$ их следует разделить на информативную первую и малоинформативную вторую части

$$\mathbf{P} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{R}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.5.6)$$

Здесь и далее используем обозначения матриц и вектора решения, типичные для задач метода наименьших квадратов (МНК), \mathbf{P} – симметрична. Обобщенное взвешенное псевдорешение уравнения МНК

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + \mathbf{W} (\mathbf{P}_1 \mathbf{W})^+ (\mathbf{R}_1 - \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\theta}_0),$$

дает решение, минимизирующее $\| \mathbf{W}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) \|^2$, т.е. наиболее близкое к вектору притяжения $\boldsymbol{\theta}_0$, содержащему априорную оценку искомых параметров. Попытка найти псевдорешение непосредственно по указанной формуле приводит к необходимости псевдообращать произведение $\mathbf{P}_1 \mathbf{W}$, что плохо по двум причинам.

Во-первых, умножение на \mathbf{W} нарушает симметрию матрицы метода наименьших квадратов \mathbf{P} и неоправданно сужает выбор численных средств. Во-вторых, умножение \mathbf{P}_1 на матрицу весов способно ухудшить и без того плохую обусловленность задачи: за качество взвешенных оценок приходится платить серьезным увеличением нагрузки на вычислитель. При хорошей организации вычислений матрица весов используется только там, где она действительно нужна, не отражаясь на расчете, если система уравнений хорошо обусловлена. В противном случае также не следует спешить с умножением \mathbf{P}_1 на \mathbf{W} . Лучше обратить невырожденный блок матрицы \mathbf{P}_1 не после, а до умножения его на дисбалансирующий фрагмент весовой матрицы.

Рассмотрим предпосылки к построению численного алгоритма. На первом этапе цель вычислений может состоять в формировании наращиваемого левым углом невырожденного квадратного блока \mathbf{O} симметричной матрицы \mathbf{P} , сопровождаемом перестановкой строк \mathbf{P} , \mathbf{R} (и столбцов \mathbf{P} , иначе она потеряет симметрию). Перестановка исключает из рассмотрения плохо обусловленные уравнения, группируемые своими коэффициентами в нижней части матриц, так что

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{D} \\ \text{-----} \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{pmatrix}.$$

Наращиваемый блок нужно представить в виде произведения двух сомножителей $\mathbf{O} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, где \mathbf{L} – нижнетреугольная матрица. Если преобразование доведено до конца, в том смысле, что блок \mathbf{O} охватывает собой всю матрицу \mathbf{P} , то алгоритм заканчивается стандартно решением двух систем с треугольными матрицами

$$\mathbf{L}\mathbf{X} = \mathbf{R}, \quad \mathbf{L}^T \boldsymbol{\theta} = \mathbf{X},$$

что соответствует формуле $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}$.

Вычислительный метод должен учитывать случай, когда размер относительно хорошо обусловленного блока \mathbf{O} меньше размерности задачи. Тогда наступает черед псевдообращения произведения $\mathbf{P}_1\mathbf{W}$, где согласно принятым обозначениям $\mathbf{P}_1 = (\mathbf{O} \mid \mathbf{D})$, матрицу весов также сепарируем на блоки $\mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)$, так что

$$\mathbf{P}_1\mathbf{W} = (\mathbf{L}\mathbf{L}^T \mid \mathbf{D}) \mathbf{W} = \mathbf{L} (\mathbf{L}^T \mathbf{W}_1 \mid \mathbf{L}^{-1}\mathbf{D} \mathbf{W}_2).$$

произведение $\mathbf{L}^T \mathbf{W}_1$ – невырожденная верхнетреугольная матрица.

Предположим, что мы отыскали ортогональную матрицу \mathbf{H} , например, методом Хаусхолдера, такую, что умножение на нее аннулирует остаточный блок $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{W}_2$, т. е. $(\mathbf{P}_1\mathbf{W}\mathbf{H})\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{L}(\mathbf{G} | \mathbf{0})\mathbf{H}^{-1}$, причем \mathbf{G} – теперь уже невырожденная нижнетреугольная матрица.

Псевдообращение произведения $\mathbf{P}_1\mathbf{W} = (\mathbf{P}_1\mathbf{W}\mathbf{H})\mathbf{H}^{-1}$ сведется к обычной инверсии и перестановкам невырожденных компонент \mathbf{L} , \mathbf{G} , \mathbf{H}^{-1} , таким образом $(\mathbf{P}_1\mathbf{W})^+ = \mathbf{H}(\mathbf{G}^{-1} | \mathbf{0})^T \mathbf{L}^{-1}$.

Искомое решение предстанет в виде

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + \mathbf{P}_w^+ (\mathbf{R}_1 - \mathbf{P}_1\boldsymbol{\theta}_0) = \boldsymbol{\theta}_0 + \mathbf{W}\mathbf{H} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{P}_1\boldsymbol{\theta}_0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приведенная выше схема – не более, чем план вычислений, который надо еще реализовать конкретными действиями. Первой фазой выбран алгоритм триангуляризации $\mathbf{O}=\mathbf{L}\mathbf{L}^T$. Метод Холецкого порождает семейство алгоритмов, объединенных общей идеей. В нашем случае итогом вычислений должна стать не треугольная, а трапециевидная матрица разложения \mathbf{P} , несущая в себе помимо \mathbf{L} информацию о $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{D}$, где \mathbf{L}^{-1} в явном виде не вычисляется. Для экономии в таких случаях матрицу \mathbf{P} наращивают дополнительно вектором, подлежащим умножению на \mathbf{L}^{-1} . Обычно это \mathbf{R} , но здесь еще и $\mathbf{P}\boldsymbol{\theta}_0$ или разность $\mathbf{R} - \mathbf{P}\boldsymbol{\theta}_0$. Распространенная модификация метода Холецкого формирует нижнетреугольную матрицу \mathbf{L} на месте \mathbf{P} , столбец за столбцом. Такой подход не позволяет планировать перестановки, столь важные при решении вырожденных задач. Поэтому далее будет рассмотрен иной вариант, который занят итерационным уточнением всей диагонали \mathbf{L} . На каждом шаге рекурсии можно, очевидно, опереться на любую строку и столбец \mathbf{P} .

Столь же итерационно, забегая вперед, можно рассчитывать добавочный вектор в \mathbf{P} , помещаемый обычно в нижнюю строку. Его элементы, образующие $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}$, дают прогноз падения невязки МНК на шаге алгоритма.

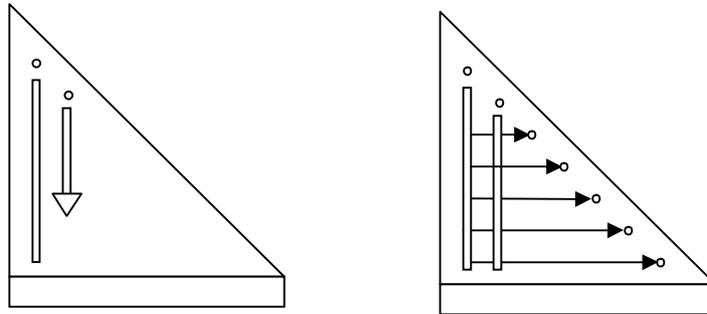


Рис. 3.5.1. Размещение результатов численного метода.

Горизонтальные стрелки на рисунке 3.5.1., обозначающие заявленные прогностические действия вдоль диагонали, следует отразить вертикально вниз на дополнительную строку, и тогда общая схема вычислений будет полна. Каноническая схема алгоритма Холецкого, нацеленного на обработку убывающих по высоте столбцов, имеет вид

$$\mathbf{L}_{kk} = \sqrt{\mathbf{P}_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{L}_{kj}^2}, \quad \mathbf{L}_{ik} = (\mathbf{P}_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{L}_{ij} \mathbf{L}_{kj}) / \mathbf{L}_{kk},$$

где $k=2 \dots n$, старт $k=1$ с $\mathbf{L}_{11} = \sqrt{\mathbf{P}_{11}}$ и $\mathbf{L}_{i1} = \mathbf{P}_{i1} / \mathbf{L}_{11}$, $i=k+1 \dots n+1$.

Рисунок 3.5.2 поясняет содержимое трех блоков трапециевидной структуры, которая имеет высоту матрицы \mathbf{P} , расширенной строкой \mathbf{R}^T .

Наращиваемая вниз лента столбцов позволяет итерационно вычислять квадраты положительных диагональных элементов, пусть на первом шаге $\mathbf{L}_{ii}^2 = \mathbf{P}_{ii}$ (совпадают с диагональю) и далее $\mathbf{L}_{ii}^2 = \mathbf{L}_{ii}^2 - \mathbf{L}_{i,k-1}^2$ для всех $i=k \dots n$.

Забегаящий вперед расчет синхронизован с коррекцией строки \mathbf{R}^T так, что элементы $\mathbf{R}_i = (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{k-1} \mathbf{L}_{i k-1})/\mathbf{L}_{ii}$. Вычисленные впрок, они дают прогноз падения невязки МНК, помогающий выбрать и переставить в позицию k ведущие строку и столбец \mathbf{P} и элемент \mathbf{R} .

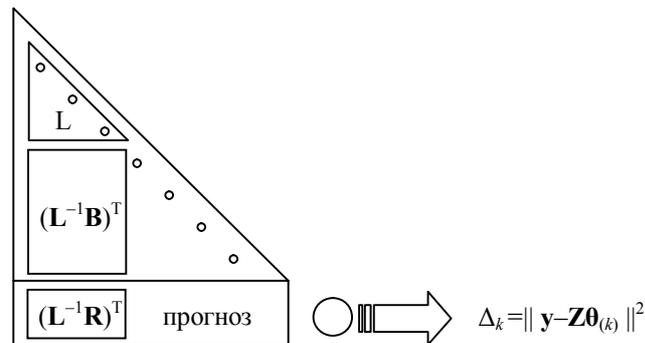


Рис. 3.5.2. Содержимое блоков трапецевидной структуры.

Для продолжения итераций нужно сбрасывать делители при всех несостоявшихся конкурентах элементов \mathbf{L}_{kk} и \mathbf{R}_k , т. е. $\mathbf{R}_j = \mathbf{R}_j \mathbf{L}_{jj}$ для $j=k+1..n$. Этой фазы можно избежать, более аккуратно обращаясь с памятью вычислителя. Невязку метода наименьших квадратов с матрицами $\mathbf{P}=\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T$, $\mathbf{R}=\mathbf{y}\mathbf{Z}^T$ обозначим на шагах итерации как $\Delta_k = \|\mathbf{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\theta}_{(k)}\|^2$, начальное значение ее максимума рассчитывается как $\Delta_0 = \|\mathbf{y}\|^2$, его следует вынести как дополнительный элемент расширенной диагонали и уменьшать итерационно на выбранную величину $\Delta_k = \Delta_{k-1} - \mathbf{R}_k^2$.

Заключительная фаза метода. Если процесс триангуляризации завершился вычислением разложением $\mathbf{P}=\mathbf{L}\mathbf{L}^T$, по месту хранения участвующего в итерациях вектора \mathbf{R} оказывается произведение $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}$, так что совсем несложно будет решить систему $\mathbf{L}^T\boldsymbol{\theta} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}$ и получить ответ невырожденной задачи. Если по той или иной причине триангуляризация останавливается, в блоках итоговой трапецевидной матрицы $\mathbf{T}=(\mathbf{L}^T | \mathbf{L}^{-1}\mathbf{D})$ выдается обширная информация для последующего анализа.

Смысл последующих численных операций состоит в том, чтобы упростить ортогональными преобразованиями с матрицей \mathbf{H} взвешенную при помощи \mathbf{W} трапецию $\mathbf{TW}=(\mathbf{L}^T\mathbf{W}_1 | \mathbf{L}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{W}_2)$, так что $\mathbf{TWH} = (\mathbf{G} | \mathbf{0})$, где от нуля отличен только нижний треугольник \mathbf{G} .

Матрица ортогональных преобразований Хаусхолдера, аннулирующая правый блок, имеет вид

$$\mathbf{H} = \left(\mathbf{E} - 2 \frac{\mathbf{U}_1\mathbf{U}_1^T}{\mathbf{U}_1^T\mathbf{U}_1}\right) \left(\mathbf{E} - 2 \frac{\mathbf{U}_2\mathbf{U}_2^T}{\mathbf{U}_2^T\mathbf{U}_2}\right) \dots \left(\mathbf{E} - 2 \frac{\mathbf{U}_k\mathbf{U}_k^T}{\mathbf{U}_k^T\mathbf{U}_k}\right),$$

где \mathbf{U}_i – опорные векторы преобразований Хаусхолдера, алгоритм составления которых подробно описан в [76, с. 58].

Реализация триангуляризации матрицы не ограничена указанными преобразованиями, можно привлекать также преобразования Гивенса и другие модифицированные алгоритмы.

Расчет завершается по формуле

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + \mathbf{P}_w^+ (\mathbf{R}_1 - \mathbf{P}_1\boldsymbol{\theta}_0) = \boldsymbol{\theta}_0 + \mathbf{WH} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{P}_1\boldsymbol{\theta}_0) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $(\mathbf{P}_1\mathbf{W})^+ = (\mathbf{L}\mathbf{TW})^+ = (\mathbf{TW})^+\mathbf{L}^{-1}$, итоги можно подвести иначе, по формуле

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + \mathbf{P}_w^+ (\mathbf{R}_1 - \mathbf{P}_1\boldsymbol{\theta}_0) = \boldsymbol{\theta}_0 + \mathbf{W} (\mathbf{TW})^+ \begin{pmatrix} \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{P}_1\boldsymbol{\theta}_0) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

привлекая для псевдоинверсии взвешенной трапецевидной матрицы более простой в алгоритмическом отношении метод Гревилля.

3.6. Выводы

В науке нередко бывает, что одни направления ее развиваясь питают собой другие. В начале прошлого столетия шведский математик Эрик Фредгольм обратил внимание на сходство между интегральным уравнением и системой линейных алгебраических уравнений.

На этой основе он создал теорию настолько успешную, что это вызвало пристальный интерес на семинарах Давида Гильберта и, позднее, отразилось в работах этой школы. Во второй половине столетия интенсивно совершенствуются вычислительные методы линейной алгебры, выдвинувшей сингулярные числа матриц в качестве показателей, широко используемых в задачах редукции. Неудивительно, что вслед появляются сингулярные числа, но теперь уже, передаточных функций динамических систем. Таким образом, мы видим, что через подпитку рабочими идеями со смежных областей знаний, развитие идет и теперь.

Задачи линейной алгебры связаны преимущественно с решением уравнений и с поиском собственных чисел и собственных векторов. Дискретные частотные характеристики (ДЧХ) линейных динамических систем возникают при финитном управлении, когда время существования системы ограничено. Линейные динамические системы входных сигналов по форме не повторяют. Непринципиально, впрочем, как мы рассматриваем выходной сигнал, в прямом или инверсном времени. Так как динамическая система сигнал искажает, инвертируем выходную зависимость.

Можно провести такой натурный эксперимент с реальным объектом и убедиться, что итерации подачи сигнала с входа на выход сходятся на выходе к сигналу, повторяющему входной по форме.

Перед нами собственная функция динамической системы. Но каков этот сигнал, как он аналитически описывается? Оказывается, что ответ связан с базисным набором сигналов ДЧХ.

Заключение

Линейной динамической системе можно сопоставить большое количество линейных операторов. Исследование их общих свойств составляет предмет специальных дисциплин, таких как спектральная теория операторов и др. Возможности аналитического изучения ограничены в связи с высокой сложностью возникающих при этом математических задач.

Отсюда ясна полезность предлагаемого в книге флип-метода как удобного инструмента исследования в области, богатой практическими применениями, такими, как идентификация систем. Положительным качеством флип-метода является его индифферентность к наличию математического описания системы, которое используется в самом общем виде только на этапе планирования итерационного эксперимента.

На конечном интервале времени главная сингулярная функция играет, пожалуй, большую роль в описании системы, чем импульсная весовая и переходная характеристики. Это новая и весьма перспективная характеристика. Классическая АЧХ, это график амплитудных коэффициентов усиления простых гармоник. Смысл обсуждаемого формализма сводится к тому, что ДЧХ лежит на АЧХ (коэффициенты усиления круговых гармоник расположены на ней).

Каждая система имеет свой спектр и свой базис, определяемый профилем частотной характеристики. Базис становится общим для всех динамических систем только при переходе к абстракции – бесконечному интервалу. Отметим, что дискретные спектры, обыденность физических систем, описываемых на микроскопическом уровне. Спектральные линии Бальмера сидят на характеристике, которая в теории управления принадлежит двойному интегратору. Это естественное обобщение дискретизированного “закона Ньютона” изначально найдено экспериментальным путем.

Билл Гейтс, обладающий несомненным чутьем в области новых технологий, предпринял значительные усилия для изменения облика сети: выкупил права и разместил в ней знаменитые фейнмановские лекции по физике. Это пример положительного изменения окружающей нас реальности, появления принципиально новых сетевых носителей информации. Бумажных книг не будет. Через 10-15 лет их просто не станет. Они останутся лишь в том виде, в каком сейчас существуют грампластинки и кассеты. "Печатный труд" так или иначе уступит место электронному архиву.

В СКАЙНЕТ, математической сети автора mathscinet.ru, можно регистрировать блоги и журналы с математическим содержанием. Это некоторая альтернатива текстовым серверам lib.ru, proza.ru, aldebaran.ru и т.п., ограниченным в функционале представления данных. В математической сети можно проводить математические эксперименты. В ней отражена рассматриваемая в книге задача, более того, это ближайшее будущее всей мировой паутины, поскольку математика – общая интересная всем дисциплина.

Следует учитывать, что не все сети преодолели языковой барьер, общение происходит на разных языках. Локальный (несетевой) сервис предлагается Scinet Math. Вообще Скайнетов по миру много и они очень и очень работоспособны. В Америке это база данных (робот, сервер) Американского математического общества, созданного еще в 1888 в Нью-Йорке по инициативе Томаса Фиске. В качестве образца послужило Лондонское математическое общество, работа которого произвела большое впечатление на будущего первого научного секретаря.

Сугубо прагматически научные сети отличаются друг от друга набором сервисов, которые интересны для пользователя. В математической сети упор сделан на исполняемые с листа алгоритмы и на отображение математической анимации и графиков. Существуют ресурсы, в том числе и google.com, экспериментирующие с редакторами текстов on line, но в сочетании с математикой предложение ново даже для международной арены.

Библиография

1. Адамян В.М., Аров Д.З., Крейн М.Г. Аналитические свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура–Такаги // Матем. сб. 1971. Т. 86. Вып.1. – С. 34–75.
2. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами, – М.: Наука. 1976. – 424 с.
3. Андреев Ю. Н. Дифференциально-геометрические методы в теории управления // Автоматика и телемеханика. 1982. №10. – С.5–46.
4. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab. – СПб.: Наука, 2001. – 286 с.
5. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. – М.: МЦНМО. 2000. – 32 с.
6. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа. 1998. – 574 с.
7. Балберин В. В., Мироновский Л. А. Сбалансированные модели скалярных систем // Электронное моделирование. 1988. №5. – С. 6–10.
8. Барабанов А.Е., Первозванский А.А. Оптимизация по равномерно-частотным показателям (H-теория) // Автоматика и телемеханика. 1992. №9. – С.3–32.
9. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач. – М.: Высшая школа. 2002. – 214 с.
10. Балонин Н.А. Новый курс теории управления движением. – СПб.: Изд-во С.–Петербург. ун-та, 2000. – 160 с.
11. Балонин Н.А. Использование элементов искусственного интеллекта в адаптивном управлении с идентификацией // Труды конф. Диагностики, информатика и метрология–95 (ДИМ-95). – СПб.: 1995. – С. 153–154.

12. Балонин Н.А. Новый идентификационный TOOLBOX с анимационной графикой к математическому пакету MATLAB // Труды конф. Диагностика, информатика, метрология, экология, безопасность–96 (ДИМЭБ-96). – СПб.: 1996. С 32–34.

13. Балонин Н.А. Анимационная графика в инженерных задачах //Труды конф. Диагностика, информатика, метрология, экология, безопасность – 97 (ДИМЭБ–97). – СПб.: 1997. – С. 247.

14. Балонин Н.А. Автоматизация процесса размещения спектра и собственных векторов в модальном синтезе // Труды конф. Диагностика, информатика, метрология, экология, безопасность – 98 (ДИМЭБ–98), – СПб.: 1998. – С. 124.

15. Балонин Н.А. Новые информационные технологии контроля и диагностики знаний // Труды пятой межд. научно-практ. конф. Новые информационные технологии в практике работы правоохранительных органов, – СПб.: 1998 г. – С. 36–38.

16. Балонин Н.А. Генетические алгоритмы в задачах управления динамическими объектами // Proc. of the Second Int. Conf. on Problems of Dynamic Objects Logic-Linguistic Control (DOLLC'99). St-Petersburg, 1999. – P. 7–10.

17. Балонин Н.А., Бураков М.Б., Городецкий А.Е., и др. Управление в условиях неопределенности. – СПбГТУ.: 2002. – 398 с.

18. Балонин Н. А., Габитов Е. А. Численные алгоритмы идентификации параметров систем в режиме нормального функционирования // Автоматика и телемеханика. 1997. № 2. – С. 140–146.

19. Балонин Н.А., Мироновский Л.А. Флип-метод определения сингулярных функций ганкелева оператора и оператора свертки // Автоматика и телемеханика. 1999. № 11. – С. 3–18.

20. Балонин Н.А., Мироновский Л.А. Линейные операторы динамической системы // Автоматика и телемеханика. 2000. № 11. – С. 57–68.

21. Балонин Н.А., Мироновский Л.А. Спектральные характеристики линейных систем на ограниченном интервале времени // Автоматика и телемеханика. 2002. № 6. – С. 3–8.

22. Балонин Н.А., Мироновский Л.А. Экспериментальный подход к решению задач оптимального управления. Труды 2 Межд. научн. конф. “Методы и средства управления технологическими процессами”, Саранск, 1997. – С. 28–31.

23. Балонин Н.А., Мироновский Л.А. Компьютерное моделирование и контроль динамических систем // Труды конф. Проблемы сбора и передачи информации. – Пушкин, 1997. – С. 276.

24. Балонин Н. А., Мироновский Л. А. Компьютерное моделирование операторов линейных динамических систем // Proc. of the Second Int. Conference «Tools for Mathematical Modeling». St-Petersburg, 1999. – P. 229–230.

25. Балонин Н. А., Мироновский Л. А. Флип-метод определения сингулярных функций // Труды межд. конференции по адаптивным системам SPAS99. – СПб.: 1999. – С. 278–281.

26. Балонин Н. А., Мироновский Л. А. Управление с минимальным расходом топлива и задача о гольфе // Труды конф. по теории колебаний и управления, посвященной 100-летию Б.В. Булгакова. –М.: 2000. – С. 55–57.

27. Балонин Н.А., Мироновский Л.А. Компьютерные модели линейных операторов динамической системы // Информационно управляющие системы. 2002. № 1. – С. 24–28.

28. Балонин Н.А., Мироновский Л.А. Матрицы Адамара нечетного порядка // Информационно управляющие системы. 2006. № 3. – С. 46–50.

29. Балонин Н.А., Мироновский Л.А. Канонические формы динамических систем. Методические указания. – СПб.: ГААП, 1998. – 54 с.

30. Балонин Н.А., Попов О.С. Синтез систем модального управления на основе мер модального доминирования // Изв. РАН. Техническая кибернетика. 1992. № 6. – С. 89–93.

31. Балонин Н.А., Попов О.С. Идентификация параметров систем в режиме их нормального функционирования // Автоматика и телемеханика. 1992. № 8. – С. 98–103.

32. Балонин Н.А., Попов О.С. Условия параметрической идентифицируемости // В кн. Поньрко С.А, Попов О.С., Ястребов В.С. Адаптивные системы для исследования океана. – СПб.: Судостроение. 1993. – С. 131–138.

33. Балонин Н.А., Попов О.С. Параметрический синтез системы управления // В кн. Поньрко С.А, Попов О.С., Ястребов В.С. Адаптивные системы для исследования океана. – СПб.: Судостроение. 1993. – С. 131–138.

34. Балонин Н.А., Сироткин Е.Я. Программно-аппаратная реализация адаптивной системы управления // В кн. Поньрко С.А, Попов О.С., Ястребов В.С. Адаптивные системы для исследования океана. – СПб.: Судостроение. 1993. – С. 151–161.

35. Балонин Н.А., Попов О.С. Критерии идентифицируемости линейных стационарных и нестационарных динамических систем // Приборостроение. 1994. № 1. – С. 22–27.

36. Балонин Н.А., Попов О.С., Гусев С.А. Элементы искусственного интеллекта в адаптивном управлении // Автоматика и телемеханика. 1994. № 4. – С. 114–123.

37. Балонин Н.А., Попов О.С., Сироткин Е.Я. Построение многосвязных систем модального управления // Приборостроение. 1986. № 10. – С. 24–27.

38. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. – М.: Наука. 1983. – 336 с.

39. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука. 1969. – 368 с.
40. Бессонов А.А. Загашвили Ю.В. Маркелов А.С. Методы и средства идентификации динамических объектов. – М.: Энергоатомиздат. 1989. – 280 с.
41. Бритов Г.С., Мироновский Л.А. Критерии избыточности динамических систем // Техническая кибернетика 1980. №1. – С. 149–155.
42. Броун В. М. Анализ линейных инвариантных во времени систем – М.: Машиностроение. 1966. – 435 с.
43. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. – М.: ГИИЛ. 1947. – 408 с.
44. Веников В.А., Веников Т.В. Теория подобия и моделирования. – М.: Высшая школа, 1986. – 323 с.
45. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2000. – 400 с.
46. Воеводин В.В. Линейная алгебра. – М.: Наука. 1980. – 400 с.
47. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. – М.: Наука. 1985. – 352 с.
48. Глушаков С., Жакин И., Хачиров Т. Математическое моделирование. Mathcad 2000. Matlab 5.3. АСТ. 2001. – 540 с.
49. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Компьютер в математическом исследовании. – СПб.: Питер. 2001. – 324 с.
50. Голуб Дж., Лоун Ч.В. Матричные вычисления. – М.: Мир. 1999. – 548 с.
51. Гроп Д. Методы идентификации систем. – М.: Мир. 1979. – 302 с.
52. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. – М.: Мир. 1970. – 328 с.
53. Дезоер Ч., Видьясагар М. Системы с обратной связью: вход-выходные соотношения. – М.: Наука. 1983. – 280 с.

54. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир. 1988. – 440 с.
55. Дьяконов В.П. MATLAB 6/6.1/6.5 + SIMULINK 4/5 в математике и моделировании. – М.: Солон-Пресс. 2003. – 576 с.
56. Есипов А.А., Сазонов Л.И., Юдович В.И. Практикум по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Вузовская книга. 2001. – 396 с.
57. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем (Метод пространства состояний). – М.: Наука. 1970. – 704 с.
58. Задорожный Д.Ю., Кузьмин А.Б. Математические методы диагностирования технических систем // Техническая кибернетика. 1991. № 1. – С. 184–205.
59. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. – М.: Наука. 1975. – 320 с.
60. Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений. – М.: Наука. 1984. – 192 с.
61. Икрамов Х. Д. Численные методы для симметричных линейных систем. Прямые методы. – М.: Наука, 1988. – 287 с.
62. Имаев Д.Х. и др. Анализ и синтез систем управления. Учебн. пособие ЛЭТИ. – СПб-Сургут: 1997. – 197с.
63. Калиткин Н. Н. Численные методы. – М.: Наука. 1978. – 512.
64. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Мир. 1971. – 400.
65. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука. 1976. – 577 с.
66. Кинг Н. Тонг. Теория механических колебаний. – М.: Изд. Машиностроительной лит. 1963. – 352 с.
67. Кетков Ю., Кетков А., Шульц М. MATLAB 6.x: программирование численных методов. – СПб.: БХВ-Петербург. 2004. – 662 с.

68. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. – М.: МЦНМО. 1999. – 960 с.
69. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1984. – 832 с.
70. Краснов М.Л. Интегральные уравнения.– М.: Наука, 1975. – 304 с.
71. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. – М.: Наука, 1973. – 190 с.
72. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. – М.: Фазис: ВЦ РАН, 2000. – 412 с.
73. Кухтенко А.И. Теория алгебраических инвариантов в теории автоматического управления // Кибернетика и вычислительная техника. – 1978. Вып. 39. – С. 3–16.
74. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1982. – 270 с.
75. Латышев А.В. Применение методов идентификации для диагностирования непрерывных объектов // Автоматика и телемеханика. 1984. № 12. – С. 118–123.
76. Лоусон Ч., Хэнсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. – М.: Наука. 1986. – 230 с.
77. Матвеев А.С., Якубович В.А. Абстрактная теория оптимального управления. – СПб.: Изд-во СПб ун-та. 1994. – 364с.
78. Мироновский Л. А. Функциональное диагностирование динамических систем. – Москва–Санкт–Петербург. Изд. МГУ–ГРИФ. – 256 с.
79. Мироновский Л.А. Моделирование конечномерных систем // Учеб. пособ. –Л.: ЛИАП, 1988. – 78с.
80. Мироновский Л.А. Инварианты математических моделей // Учеб. пособ. – СПб.: ЛИАП, 1991. – 42с.
81. Мироновский Л.А. Взаимосвязь параллельной и сбалансированной канонических форм //Электронное моделирование. 1989. № 6. – С. 150–157.

82. Мироновский Л.А. Ганкелев оператор и ганкелевы функции линейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1992. № 9. – С. 73–86.

83. Мирошников А.Н., Румянцев С.Н. Моделирование систем управления технических средств транспорта. // Учебное издание ГЭТУ. – СПб.: Элмор, 1999. – 224с.

84. Михайлов В.Б. Численно-аналитические методы решения сверхжестких дифференциально-алгебраических систем уравнений. – СПб.: Наука, 2005. – 234с.

85. Мэтьюз Дж., Финк К. Численные методы. Использование MATLAB. – М.–СПб.–Киев: Изд. дом «Вильямс», 2001. – 720с.

86. Ноден П., Китте К. Алгебраическая алгоритмика (с упражнениями и решениями). – М.: Мир, 1999. – 719 с.

87. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. – М.: Мир. 1991. – 367 с.

88. Осинкин С.А., Балонин Н.А. Экспериментальный синтез дискретного входного сигнала для терминального управления линейной системой // Труды 3-й межд. конф. Методы и средства управления технологическими процессами. Саранск, 1999. – С. 238–242.

89. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. – М.: Мир. 1983. – 383 с.

90. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. – М.: Мир. 1988. – 412 с.

91. Пеллер В.В. Операторы Ганкеля и их приложения. – М.: НИЦ “РХД”, 2005. – 1077 с.

92. Первозванский Л.А. Курс теории автоматического управления // Учеб. пособ. – М.: Наука. 1986. – 616с.

93. Пешель М. Моделирование сигналов и систем. – М.: Мир. 1981. – 360 с.

94. Полянин А. Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения. – М.: Факториал. 1998. – 412 с.
95. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука. 1983. – 392 с.
96. Попов О.С., Балонин Н.А., Сироткин Е.Я. Идентификация параметров объекта в линейных адаптивных системах управления // Приборостроение. 1985. № 12. – С. 28–30.
97. Попов О.С., Балонин Н.А., Гусев С.А. Двухканальный идентификатор параметров динамической системы // Приборостроение. 1990. № 1. – С. 90–92.
98. Портер У. Современные основания общей теории систем. – М.: Наука, 1971. – 555 с.
99. Прасолов А.В. Аналитические и численные методы исследования динамических процессов. – СПб.: Изд-во С.–Петербург. ун-та, 1995. – 148 с.
100. Прасолов А.В. Обратная задача для линейной стационарной системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22. № 3. – С. 430–434.
101. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение. – М.: Мир. 1984. – 265 с.
102. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. – М.: Наука. 1978. – 552 с.
103. Сотников С.Н., Балонин Н.А. Методы анализа, синтеза и диагностики в технических процессах при помощи генетических алгоритмов // Труды 3-й межд. конф. Методы и средства управления технологическими процессами. – Саранск, 1999. – С. 28–31.
104. Сотников С.Н., Балонин Н.А. Генетические алгоритмы в задачах моделирования, управления и диагностики // Труды 3-й межд. научн.–техн. конф. Управление в технических системах – XXI век. – Ковров, 2000. – С. 187–189.

105. Сотников С.Н., Балонин Н.А., Мироновский Л.А. Поиск сингулярных функций линейных систем на ограниченном интервале времени с помощью распределенного алгоритма эволюционных вычислений // Сб. докладов 8-й Научной сессии аспирантов ГУАП. – СПб.: 2005. – С. 77–81.

106. Суевалов Л. Ф. Справочник по расчетам судовых автоматических систем. –2-е изд.. –Л.: Судостроение. 1989. – 408 с.

107. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение. – М.: Машиностроение. 1972. – 564.

108. Тихонов А.Н., Арсенин В.я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

109. Толчеев В.О., Ягодкина Т.В. Методы идентификации одномерных линейных динамических систем. – М.: МЭИ. 1997. –108с.

110. Уилкинсон Дж., Райнш К. Справочник алгоритмов на языке алгол, линейная алгебра. – М.: Машиностроение. 1976. – 390.

111. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир. 1989. – 655.

112. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир. 1975. – 680.

113. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. – М.: Мир. 1986. – 243 с.

114. Arbib M.A., Manes E.G. Foundation of system theory: Hankel matrices // J. Comput. and Syst. Sci. 1980. – Vol. 20. №. 3. – P. 330–378.

115. Balonin N.A., Gusev S.V. Experiments with the regularized adaptive control algorithms, Proc. of the Second Russian-Swedish Control Conference. Russia, Saint-Petersburg, 1995. – P. 70–72.

116. Balonin N.A., Mironovsky L.A., Petrova X.Y. Finding singular functions of the convolution operator // Proc. of Conference on Oscillations and Chaos, Saint-Petersburg, 2000. V.3. – P. 414–417.

117. Balonin N.A., Mironovskiy L.A. Solving optimization problems by system adjoint operator simulation // Proc. of Int. Conf. Control of Oscillations and Chaos. Saint Petersburg, Russia. Aug. 1997. V.3. – P. 553–556.

118. Balonin N. A., Mironovsky L. A. The Linear Operators of Dynamic System // Proc. of the Second Int. Conf. Control of Oscillations and Chaos. Saint Petersburg, Russia. 1999. – P. 27–30.

119. Balonin N.A. Animation graphics for dynamic and intellectual systems modeling. The 5–th National Conference on Artificial Intellect-96, Kazan, 1996. V.3. – P. 449–454.

120. Balonin N.A. Animated cartoons 2.5D for motion simulation, Proc. of the First Int. Conference on Problems of Dynamic Objects Logic-Linguistic Control. Saint-Petersburg, Russia. 1997. – P. 7–10.

121. Chao C., Lin H., Milor L. Optimal testing of VLSI analogue circuits // IEEE Trans. Computer-aided design, Vol.16, January 1997. – P. 58-77.

122. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solutions to standart H_2 and H_∞ control problems. 1989. V. AC-34. №. 8. – P. 831–847.

123. Francis B.A. A course in H_∞ control theory. Lecture notes in control and information science. Springer Verlag. 1987. V. 88. – 157 p.

124. Francis B.A., Doyle J.C. Linear control theory with on H_∞ optimality criterion. A survey // SIAM J. of Control and Optimization. July, 1987. V.23, №. 4. – P. 815–844.

125. Glover K. All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems // Intern. J. Control. 1984. V. 39. №. 6. – P. 1115–1193.

126. Gu. D.W., Tsai M.C. Postlethwaite L. A frame approach to the H_∞ superoptimal solution // IEEE Ttans. Automatic Control. 1990. V. AC-35. №. 7. P. 829–834.

127. Kharinov M.V. Permutative and Hidden Matrix Symmetry in Some Applications of Artificial Intelligence. Proc. of 2th Int. Conference “Tools for Mathematical Modeling”, St-Petersburg, 1999. – P. 67–68.

128. Lindermeir W., Graeb H., Antreich K. Analogue testing by characteristic observation inference // IEEE Trans. Computer-aided design, Vol.18, 1999. – P.13537–1368.

129. Maciejowski J.M. Balanced realizations in system identification // Proc. of the 7th IFAC Symp. Identification and Parameter Estimation, York, UK. 1995. – P. 287–292.

130. Maciejowski J.M., Ober R.J., McGinnie B.P. Balanced parametrizations in time-series identification // Proc. of the 29th IEEE Conf. on Decision and Control, Hawaii. 1990. – P 108–123.

131. Moonen M., Ramos J.A. Subspace algorithm for balanced state space system identification // IEEE Trans. Automatic Control. 1993. №. 38. – P. 1727–1729.

132. Ober R. Balanced parametrization on classes of linear systems // SIAM J. of Control and Optimisation. 1991. V. 29, №. 6. – P. 1251–1287.

133. Samar R., Postlethwaite I., Wei Gu D. Model reduction with balanced realizations // Int. J. Control. 1995. V.62. №. 1. – P. 33–64.

134. Wey C.-L. Built-in-self-test structure for analogue circuit fault diagnosis //IEEE Trans. Computer-aided design, Vol.39, N3, January 1990. – P. 517–521.

135. Wilson D.A. Convolution and Hankel operator norm for linear systems // IEEE Trans. Automatic Control.1989. V. AC-34. №. 1. – P. 94–97.

136. Yang C.D., Huang K.Y., Yeh F.B. On computing nonlinear Hankel norm // Proc. of the 13th IFAC World Congress, San Francisco. 1996. – P. 407–412.