

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет  
аэрокосмического приборостроения»  
ФГАОУ ВО ГУАП

На правах рукописи



Бурков Артём Андреевич

**МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ  
СТАБИЛЬНОЙ И ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНОЙ РАБОТЫ  
СИСТЕМ МАССОВОЙ МЕЖМАШИННОЙ СВЯЗИ**

Специальность 2.2.15 —  
«Системы, сети и устройства телекоммуникаций»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, профессор  
Тюрликов Андрей Михайлович

Санкт-Петербург — 2023

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	5
<b>Глава 1. Использование методов теории информации и методов теории множественного доступа при исследовании систем массовой межмашинной связи</b> . .	13
1.1 Особенности систем массовой межмашинной связи, развитие основных направлений исследований, методы обеспечения стабильной и энергоэффективной работы . . . . .	13
1.2 Основные характеристики систем случайного множественного доступа и анализ условий стабильности . . . . .	21
1.3 Понятие спектральной эффективности для систем со случайным множественным доступом . . . . .	25
1.4 Постановка задач минимизации энергозатрат в системах массовой межмашинной связи . . . . .	29
<b>Глава 2. Энергоэффективность стабильных систем с потенциально неограниченным числом пользовательских устройств на базе алгоритма типа АЛОНА</b> . . . . .	33
2.1 Вводные замечания . . . . .	33
2.2 Базовая модель системы с потенциально неограниченным числом пользовательских устройств и шумами канала . . . . .	34
2.3 Энергоэффективность системы без наличия повторных передач .	35
2.4 Энергоэффективность для стабильной системы с повторными передачами . . . . .	40
2.5 Нижние границы энергоэффективности системы без наличия повторных передач . . . . .	48
2.6 Нижние границы энергоэффективности для стабильной системы с повторными передачами . . . . .	51

2.7	Примеры численных расчетов задач минимизации энергозатрат при передаче в системах с потенциально неограниченным числом пользовательских устройств . . . . .	53
2.8	Анализ влияния дополнительных ограничений по средней задержке на энергоэффективность . . . . .	57
2.9	Выводы по главе . . . . .	62
<b>Глава 3. Методы гибридной обратной связи в системах с потенциально неограниченным числом пользовательских устройств . . . . .</b>		
		<b>66</b>
3.1	Вводные замечания . . . . .	66
3.2	Выбор методов гибридной обратной связи для снижения энергозатрат в стабильных системах случайного множественного доступа . . . . .	66
3.3	Модель системы случайного доступа с учётом применения методов гибридной обратной связи . . . . .	73
3.4	Энергоэффективность стабильных систем случайного доступа при использовании методов гибридной обратной связи . . . . .	81
3.5	Выводы по главе . . . . .	89
<b>Глава 4. Методы разрешения коллизий с использованием преамбул в системах с потенциально неограниченным числом пользовательских устройств . . . . .</b>		
		<b>92</b>
4.1	Вводные замечания . . . . .	92
4.2	Модель системы случайного доступа с учётом применения методов разрешения коллизий с использованием преамбул . . . . .	93
4.3	Алгоритмы случайного множественного доступа на основе методов разрешения коллизий с использованием преамбул . . . . .	95
4.4	Определение условий стабильности системы при использовании разработанных алгоритмов . . . . .	106
4.5	Анализ средней задержки при стабильной работе системы . . . . .	113
4.6	Исследование влияния ограничений по числу преамбул на условия стабильности и среднюю задержку . . . . .	118

4.7 Энергоэффективность стабильных систем случайного доступа при использовании разработанных алгоритмов . . . . .	126
4.8 Выводы по главе . . . . .	132
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>135</b>
<b>Список сокращений . . . . .</b>	<b>137</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>138</b>
<b>Приложение А. Акт об использовании от ООО «Цифра» . . . . .</b>	<b>151</b>
<b>Приложение Б. Акт об использовании от АО «Концерн «Гранит-Электрон» . . . . .</b>	<b>152</b>
<b>Приложение В. Акт об использовании от ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения»</b>	<b>154</b>
<b>Приложение Г. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ . . . . .</b>	<b>156</b>

## Введение

В рамках разворачивающегося в настоящее время стандарта связи 5G, а также при разработке следующего поколения 6G активно рассматриваются сценарии Интернета вещей (Internet of Things, IoT). При этом некоторые из наиболее важных требований для таких систем не могут быть выполнены полностью в рамках текущих версий сетей. Дальнейшее развитие систем передачи данных к 2030 году повлечет за собой новые, более жесткие требования, как к беспроводной связи, так и к Интернету вещей в частности. С учётом требований, предъявляемых к системам (скорость передачи, задержка и т. д.), различают следующие типы IoT: критический IoT; широкополосный IoT; промышленный IoT; массовый IoT.

В работе рассматривается сценарий массовой межмашинной связи (Massive Machine-Type Communication, mMTC), который является основным сценарием передачи данных в системах массового IoT. В mMTC предполагается работа огромного числа простых устройств (например: датчики температуры, давления, освещенности и счетчики в технологии «умный дом»), которые редко передают малые объемы данных и, как правило, используют автономные источники питания. Основными требованиями к сценарию mMTC являются: 1) Наличие большого (потенциально не ограниченного) количества устройств; 2) Стабильная работа сети при требуемой суммарной интенсивности появления сообщений в системе. Под стабильной работой подразумевается наличие конечной средней задержки в системе при её длительном времени работы; 3) Низкое энергопотребление, которое подразумевает сокращение расходов энергии, как в режиме ожидания, так и при передаче данных. Целью данного требования является повышение срока службы устройства от автономного источника питания без дополнительного обслуживания.

При дальнейшем развитии сетей количество устройств в сценариях mMTC будет порядка миллиона на квадратный километр. Из-за большого количества устройств в рассматриваемом сценарии невозможно использовать методы планирования и расписания для доступа к общему ресурсу канала. Поэтому предполагается использование методов случайного множественного доступа. При потенциально неограниченном числе устройств большинство алгоритмов случайного множественного доступа не обеспечивают стабильной работы си-

стемы. Это проявляется в том, что задержка при передаче данных в системе неограниченно возрастает с течением времени её работы.

В настоящее время системы связи не могут поддерживать постоянно возрастающие к ним требования, поэтому необходима модернизация существующих подходов при проектировании сетей. Первым путем является совершенствование методов модуляции и демодуляции, а также согласованных с ними методов помехоустойчивого кодирования. Например, использование новых кодово-модуляционных схем или применение методов комбинирования помехоустойчивого кодирования и повторных передач, например, таких как гибридная решающая обратная связь. Второй путь — изменение подходов к планированию и распределению ресурсов, то есть модификация методов случайного доступа, в том числе и изменение алгоритмов разрешения конфликтов в системе.

Исторически исследования алгоритмов множественного доступа велись в двух направлениях: теория информации множественного доступа (англ. multiple user information theory) и теория случайного множественного доступа (англ. random multiple-access theory). В течение долгого времени эти направления развивались независимо друг от друга, вследствие чего вопросы стабильности и энергоэффективности вместе не исследовались.

Таким образом, актуальной является задача исследования методов снижения затрат энергии, необходимой для обеспечения стабильной работы систем случайного множественного доступа с потенциально неограниченным числом пользовательских устройств. При рассмотрении данного вопроса необходимо совместное применение методов анализа из теории информации множественного доступа и теории случайного множественного доступа. В результате предполагается получение актуальных оценок нижних границ и границ достижимости для затрат энергии в системах случайного множественного доступа с потенциально бесконечным числом пользовательских устройств при стабильной работе системы. Данные границы позволят оценить возможности потенциального развития систем массовой межмашинной связи.

В направлении теории случайного множественного доступа рассматривается случайное число пользовательских устройств, передающих данные по общему каналу связи. Основное внимание уделяется процессам случайного поступления сообщений в систему, проводится анализ стабильности систем и

задержек, определяемых коллизией пользовательских сообщений, но игнорируется влияние шумов в общем канале связи.

Основные результаты в области теории случайного множественного доступа были получены Б.С. Цыбаковым, R. Gallager, В. А. Михайловым, А.И. Ляховым, А.М. Тюрликовым. Проблема обеспечения стабильности в системах случайного множественного доступа с потенциально неограниченным числом пользовательских устройств была сформулирована в работах Б.С. Цыбакова, В. А. Михайлова и J. Carpanakis еще в 1978 году. Впервые решение данной проблемы было предложено на основе древовидного алгоритма. В последние годы активно рассматривались подходы к расширению области стабильности систем, но это делалось в отрыве от вопросов затрат энергии. Приложение методов этой теории к системам массовой межмашинной связи присутствует в работах А.И. Парамонова, А.Е. Кучерявого, Т.М. Татарниковой.

В работах J. Choi проводились исследования с точки зрения изменения алгоритма случайного множественного доступа для повышения вероятности доставки. Рассматривались следующие основные подходы: применение неортогонального множественного доступа; применение метода разрешения коллизий с использованием преамбул за счет внедрения фазы исследования. Данные модификации применялись к алгоритмам типа ALOHA. Исследования проводились с точки зрения теории случайного множественного доступа. Однако в ключевых работах с использованием преамбул рассматривается система с потерями, что снимает проблемы обеспечения стабильности системы, но возникают необратимые потери сообщений.

В направлении теории информации множественного доступа, в отличие от теории случайного множественного доступа, не рассматривается процесс случайного появления сообщений в системе, и для фиксированного числа пользовательских устройств, передающих по общему каналу связи, исследуется влияние шумов канала или наложения сигналов пользователей на скорость передачи в системе.

Основные результаты в области теории случайного множественного доступа были получены Ю. Полянским и O. Ordentlich и основываются на методах кодового разделения при фиксированном числе пользовательских устройств.

Также исследование вопросов применения методов гибридной обратной связи в системах случайного доступа было представлено в работах G. Caire. Исследования проводились в области теории информации множественного до-

ступа. Число пользовательских устройств в системе рассматривалось конечным и известным, а основной целью исследования был анализ максимума спектральной эффективности без учета энергоэффективности.

Первые попытки объединить подходы теории случайного множественного доступа и теории случайного множественного доступа при учете потребления энергии были предприняты в работах Ю. Полянского и О. Ordentlich. Авторы рассмотрели сценарий с большим количеством пользователей в сети, при этом только некоторое подмножество из них осуществляют передачу, а доставка на базовую станцию должна быть успешной с требуемой вероятностью. Количество передающих устройств в рамках модели предполагалось постоянным и известным. Рассматривались несколько алгоритмов для множественного доступа, включая ALOHA, и анализировались границы достижимости отношения энергии на бит к спектральной плотности мощности шума. Граница достижимости означает не конкретное решение, а только тот факт, что такое решение существует. Описанные в работах модели не допускают повторной передачи сообщений, которые не были доставлены успешно. Ввиду наличия потерь в их модели не возникало проблемы, связанной с обеспечением стабильной работы системы.

**Объектом исследования** являются стабильные системы случайного множественного доступа, описывающие сценарии массовой межмашинной связи с потенциально неограниченным числом пользовательских устройств.

**Предметом исследования** являются затраты энергии, необходимые для обеспечения стабильной работы систем случайного множественного доступа с потенциально неограниченным числом пользовательских устройств при фиксированной спектральной эффективности.

**Целью** диссертационной работы является разработка новых моделей систем случайного множественного доступа для определения затрат энергии, необходимой для обеспечения стабильной работы при потенциально неограниченном числе пользовательских устройств, и методов, позволяющих снизить эти затраты при фиксированной спектральной эффективности.

Для достижения поставленной цели были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Определение особенностей систем массовой межмашинной связи, основных характеристик, используемых в рамках их анализа, а также



- возможных путей обеспечения стабильной и энергоэффективной работы таких систем.
2. Разработка базовой модели системы для определения затрат энергии, необходимой для обеспечения стабильной работы при потенциально неограниченном числе пользовательских устройств и анализ энергоэффективности типового алгоритма случайного множественного доступа в рамках этой модели.
  3. Модификация модели системы случайного доступа с учетом возможности использования методов гибридной обратной связи и анализ влияния применения этих методов на энергоэффективность в системах случайного множественного доступа.
  4. Изменение базовой модели системы для учета применения методов разрешения коллизий с использованием преамбул и разработка алгоритма случайного множественного доступа, который позволит уменьшить энергозатраты по сравнению с типовым алгоритмом АЛОНА.
  5. Оценка потенциальных возможностей повышения энергоэффективности в стабильных системах массовой межмашинной связи за счет дополнительной обработки данных на базовой станции и изменения алгоритма случайного множественного доступа.

**Научная новизна:**

1. Введены новые модели систем, отражающие основные особенности различных сценариев массовой межмашинной связи и характеризующиеся тем, что рассматривается потенциально неограниченное число пользовательских устройств.
2. В рамках введенных моделей сформулированы и решены оптимизационные задачи для вычисления границ достижимости затрат энергии, отличающейся от ранее известных тем, что учитываются условия обеспечения стабильной работы системы.
3. Получены новые нижние границы для затрат энергии на бит, учитывающие влияние повторных передач. Определено необходимое увеличение затрат энергии на передачу для обеспечения стабильной работы систем с потенциально неограниченным числом пользовательских устройств, по сравнению с пределом Шеннона для случая, когда в системе имеется один источник и один получатель.

4. Впервые исследовано влияние применения методов гибридной обратной связи на затраты энергии в стабильных системах случайного множественного доступа и проведено сравнение с системой на базе алгоритма ALOHA.
5. Предложен новый класс алгоритмов случайного множественного доступа, основанный на методе разрешения коллизий за счет использования преамбул. Разработан алгоритм из этого класса и проведен анализ условий стабильности и характеристик энергоэффективности.

**Теоретическая значимость** работы заключается в уточнении нижних границ для затрат энергии систем случайного множественного доступа при гарантированной доставке сообщений и потенциально неограниченном числе пользовательских устройств; формулировке оптимизационных задач для определения границ достижимости затрат энергии в системах массовой межмашинной связи; получении выражений для оценки нижних границ затрат энергии при использовании гибридной обратной связи в системах случайного доступа; получении замкнутых выражений для оценки нижних границ затрат энергии для предложенного алгоритма разрешения конфликтов, основанного на методе разрешения коллизий за счет использования преамбул.

**Практическая значимость** работы заключается в получении оценок нижних границ и границ достижимости для систем случайного множественного доступа с потенциально неограниченным числом пользовательских устройств, которые позволяют определить потенциальные возможности алгоритмов случайного доступа на этапе проектирования.

**Внедрение результатов диссертационной работы.** Результаты работы были использованы в рамках научно-исследовательских работ: «Разработка алгоритмов передачи данных в системах IoT с учетом ограничений на сложность устройств», «Исследование и разработка алгоритмов случайного множественного доступа с ограничением на время передачи», «Разработка и прототипирование решения по защите авторских прав на основе цифровых водяных знаков», «Пространственно-временные стохастические модели беспроводных сетей с большим количеством пользователей». Кроме того, результаты работы использованы в учебном процессе кафедры инфокоммуникационных технологий и систем связи в Санкт-Петербургском государственном университете аэрокосмического приборостроения и в ОКР АО «Концерн «Гранит-Электрон» (г. Санкт-Петербург).

**Методология и методы исследования.** Для получения результатов диссертационной работы использовались методы теории вероятностей и математической статистики, теории случайных процессов, общесистемный анализ, методы теории информации, методы теории произвольного множественного доступа, методы численного анализа и методы имитационного моделирования.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Введены модели систем массовой межмашинной связи с потенциально неограниченным числом пользовательских устройств и получены границы достижимости затрат энергии при передаче.
2. Для стабильной работы систем случайного доступа на базе АЛОНА при потенциально неограниченном числе пользовательских устройств требуется увеличение затрат энергии на бит не менее чем на 4,32дБ по сравнению с пределом Шеннона.
3. Показано, что использование методов гибридной решающей обратной связи в стабильных системах случайного доступа позволяет уменьшить затраты энергии на бит не более чем на 2,5дБ по сравнению с базовым алгоритмом при любой спектральной эффективности.
4. На основе метода разрешения коллизий с использованием преамбул разработан алгоритм случайного множественного доступа, который позволяет уменьшить затраты энергии по сравнению с алгоритмом типа АЛОНА, но не более чем на 1,5дБ при спектральной эффективности 0,1 бит/с/Гц.

**Достоверность.** Достоверность полученных результатов подтверждена результатами моделирования и аналитических расчётов. Результаты, полученные в ходе выполнения исследования, не противоречат ранее известным результатам в областях теории информации множественного доступа и теории случайного множественного доступа.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и симпозиумах в период с 2017 по 2021 гг.: научных сессия ГУАП (2017-2021 гг.); конференции «The 9th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems (ICUMT2018)»; конференция «10th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems(ICUMT2019)»; конференции «2018 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF2018)»; конференция «2019 Wave Electronics and its

Application in Information and Telecommunication Systems (ICUMT2019)»; конференции «XVI International Symposium Problems of Redundancy in Information and Control Systems (REDUNDANCY2019)»; конференции «2020 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF2020); конференция 2021 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF2021) и конференции «Обработка, передача и защита информации в компьютерных системах: Первая Всероссийская научная конференция».

**Соответствие диссертации паспорту научной специальности.** Диссертационная работа соответствует пунктам 1, 3, 6 и 8 паспорта научной специальности 2.2.15. Системы, сети и устройства телекоммуникаций. В работах, опубликованных в соавторстве, соискателю принадлежит основная роль при решении задач.

**Личный вклад.** Все результаты, представленные в тексте диссертационной работы, получены автором лично.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 23 печатных изданиях, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 10 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 7 — в тезисах докладов. По теме исследования получено 1 свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ.

**Структура и объём работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав и заключения, изложена на 156 страницах машинописного текста, содержит 27 рисунков и 9 таблиц, список литературы содержит 129 наименований.

# Глава 1. Использование методов теории информации и методов теории множественного доступа при исследовании систем массовой межмашинной связи

## 1.1 Особенности систем массовой межмашинной связи, развитие основных направлений исследований, методы обеспечения стабильной и энергоэффективной работы

В рамках разворачивающегося в настоящее время стандарта связи 5G, а также при разработке следующего поколения 6G активно рассматриваются сценарии Интернета вещей (IoT) [1–9]. Однако некоторые из наиболее важных требований не могут быть полностью выполнены в рамках текущих версий сетей. Дальнейшее развитие систем передачи данных к 2030 году повлечёт за собой новые, более жёсткие требования, как к беспроводной связи, так и к Интернету вещей в частности.

С учётом требований, предъявляемых к системам (скорость передачи, задержка и т. д.), различают следующие типы IoT [10–13]:

- критический IoT;
- широкополосный IoT;
- промышленный IoT;
- массовый IoT (massive IoT).

Критический IoT рассматривается для задач работы критически важных приложений и предназначен для срочной связи в пределах требуемой задержки. Здесь значение термина "критический" не ограничивается определением «риска для жизни», а также охватывает риски сбоя работы коммунальных услуг, создания угрозы для работы предприятия, возникновения значительных потерь в бизнесе и др. Надежность здесь определяется как вероятность успешной доставки данных в течение заданного промежутка времени. Работа такой системы предполагается в рамках сверхнадежной межмашинной связи с низкими задержками (Ultra-Reliable Low Latency Communication, URLLC). Типичные критически важные варианты использования IoT включают в себя: работу автономных транспортных средств, общение и управление мобильными роботами, удаленную хирургию, автоматизацию промышленных процессов и многие дру-

гие. Для решения задач в данном типе связи необходимо уменьшать задержку в сети и повышать надежность доставки. Предполагается, что в рамках развития будущих стандартов связи, возникнет сценарий критической массовой межмашинной связи (massive Machine Type communication, mMTC), совмещающий в себе особенности сценариев URLLC и mMTC.

Широкополосный IoT предполагает работу системы с высокими скоростями, низкой задержкой при увеличении срока службы устройств от одного заряда батареи и высокой точностью позиционирования пользовательского устройства. Требования к задержке и надёжности доставки в данном сценарии ниже, чем в критическом IoT. Однако предполагается, что устройства в такой сети могут быть разнородными, следовательно, модели трафика иногда сильно отличаются от типичного. Например, шаблоны трафика могут быть более интенсивными и/или периодическими, а требования к сроку службы батареи, охвату сигнала и позиционированию устройств могут быть более сложными, чем в простых сценариях IoT. Работу данной системы как правило рассматривают в рамках сценария расширенной мобильной широкополосной связи (enhanced Mobile Broadband, eMBB).

Промышленный IoT направлен на обеспечение плавной интеграции сотовой связи в проводную промышленную инфраструктуру, используемую для автоматизации в режиме реального времени. Как правило, в рамках данного сценария предполагается взаимодействие, как беспроводных сетей, так и проводных. Предполагается, что за счет их комбинации можно повысить охват сети с сохранением высокой скорости передачи. Повышение охвата основывается на использовании беспроводной сети связи, в том числе и для подвижных объектов производства. Сохранение высоких скоростей передачи основывается на сохранении части ключевой сети, базирующейся на проводных технологиях. Ввиду особенностей требований в таких сценариях, как правило, работу беспроводных устройств рассматривают в рамках URLLC.

Массовый IoT предполагается для работы огромного числа простых устройств, которые редко передают малые объемы данных, как правило, работающих на аккумуляторных батареях. Данная система работает в рамках сценария массовой межмашинной связи (mMTC). Этот сценарий описывает системы сбора данных с большим количеством маломощных конечных устройств (таких как датчики), которые периодически передают небольшой объем данных. Примерами массового Интернета вещей являются датчики температуры,

давления, освещённости и счётчики в технологии «умный дом». Объём передаваемых данных невелик, но количество IoT-устройств очень велико [9; 14–19]. Основными требованиями к этому сценарию являются [20–23]:

- большое количество устройств;
- стабильная работа сети при высокой суммарной интенсивности появления сообщений в системе;
- низкое энергопотребление (с целью повышения срока службы устройства от автономного источника питания без дополнительного обслуживания);
- доставка сообщений с заданной надёжностью (однако требования в данном случае ниже, чем в сценариях URLLC);
- ограничение по средней задержке (однако данные требования ниже, чем у ранее рассмотренных систем IoT).

В рамках работы будет рассматриваться сценарий массовой межмашинной связи. При дальнейшем развитии систем Интернета вещей количество IoT-устройств будет порядка миллиона на квадратный километр, и каждое из устройств будет периодически передавать небольшой объём данных [9; 24–32]. Из-за большого количества устройств в данном сценарии невозможно использовать методы планирования и расписания для доступа к общему ресурсу канала. Поэтому в его рамках предполагается использование методов произвольного доступа [33–36].

Для поддержки возникающих требований к системам массовой межмашинной связи необходимо улучшение существующих подходов при проектировании сетей. Первым путем для этого является совершенствование методов модуляции и демодуляции, а также согласованных с ними методами помехоустойчивого кодирования. Например, использование новых кодово-модуляционных схем или применение методов комбинирования помехоустойчивого кодирования и повторных передач, таких как гибридная решающая обратная связь (ГРОС). Вторым путём является изменение подходов к планированию и распределению ресурсов, то есть модификация методов случайного доступа, в том числе и изменение алгоритмов разрешения конфликтов в системе.

Алгоритмы множественного доступа могут быть классифицированы следующим образом (см. рисунок 1.1).

**Детерминированные методы разделения ресурса канала** между пользователями могут применяться при конечном числе пользовательских

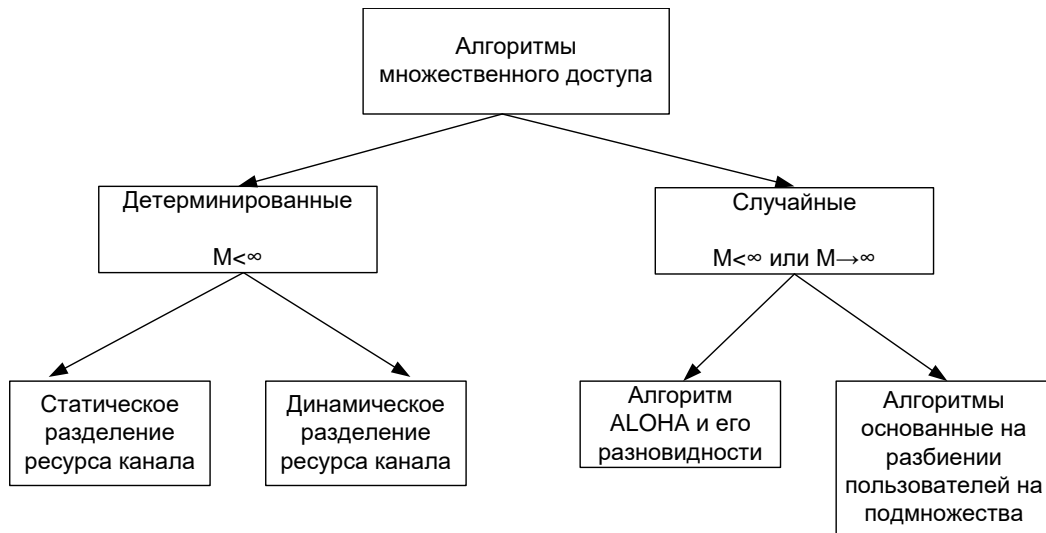


Рисунок 1.1 — Классификация алгоритмов множественного доступа

устройств ( $M < \infty$ ), авторизованных в системе. Данные методы разделяются на два направления. Первое, это *статическое разделение ресурса канала*. В данном направлении разделение ресурса канала жёстко определено и, как правило, не меняется в течение работы системы. Такое разделение может быть основано на нескольких принципах:

- *Разделение по времени*. Время работы системы делится между пользователями. Пользователь может передавать только в отведённые ему промежутки времени.
- *Разделение по частоте*. Полоса канала разбивается на независимые подканалы. За каждым пользователем закреплён выделенный ему подканал, в котором он может передавать свои данные.
- *Кодовое разделение*. Создается специальный набор кодовых книг. Коды в книгах составлены так, что при наложении сообщений из разных книг, они могут быть восстановлены. За каждым пользователем закрепляется своя кодовая книга. При передаче данных пользователь использует выданную ему кодовую книгу.

Второе направление подразумевает *динамическое разделение ресурса канала*. В данном направлении разделение ресурса канала является динамическим и может зависеть от потребностей пользователя в ресурсе канала. Простым примером является алгоритм доступа по запросу. В данном алгоритме базовая станция опрашивает каждого пользователя по очереди, о наличии у него готового к передаче сообщения. Если получен положительный ответ от пользователя, то ему отдаётся весь ресурс канала на отправку данных. Затем базовая станция



продолжает опрос. Как правило, при такой структуре системы предполагается, что время, затрачиваемое на запрос, меньше времени передачи сообщения.

**Случайные методы разделения ресурса канала** (случайный доступ) могут быть применены как в случае конечного числа пользовательских устройств ( $M < \infty$ ), так и при потенциально бесконечном числе пользователей ( $M \rightarrow \infty$ ). Данные методы можно разделить на два больших подкласса:

- Первый подкласс — алгоритм АЛОНА и его разновидности. Основной принцип работы алгоритмов в данном подклассе основывается на попытках передачи сообщения в канал с некоторой вероятностью. Все абоненты и их вероятности отправки сообщения равны между собой. Пользователи принимают решение о передаче сообщения в окне случайно и независимо.
- Второй подкласс — алгоритмы, основанные на разбиении множества пользовательских устройств на некоторые подмножества. В данном случае абоненты могут быть не равны. Например, пользователи с данными более высокого приоритета могут иметь более высокую вероятность для передачи. К данному классу относится, например, древовидный алгоритм. Основной принцип которого основывается на формировании двоичного дерева разрешения конфликтов. При конфликте строится двоичное дерево разрешения конфликта, и каждый пользователь в корне или узле выбирает потомка для повторной передачи. Если потомка выбрал один пользователь, то этот потомок становится листом с успехом, если его никто не выбрал, то пустым листом. Абоненты, не попавшие в конфликт, откладывают отправку своих сообщений до его разрешения (когда все листья дерева будут содержать или успешные передачи и/или пустые окна).

Как отмечалось ранее, ввиду большого числа устройств, применение детерминированных методов доступа в сценариях массовой межмашинной связи не применимо. Поэтому в рамках сценария mMTC рассматриваются только случайные методы доступа.

Направления исследований и развития алгоритмов случайного доступа приведено на рисунке 1.2 [37].

Теория множественного доступа традиционно развивалась в двух направлениях: *теория информации множественного доступа* (ТИМД, англ. термин multiple user information theory [37–40]) и *теория случайного множественного*

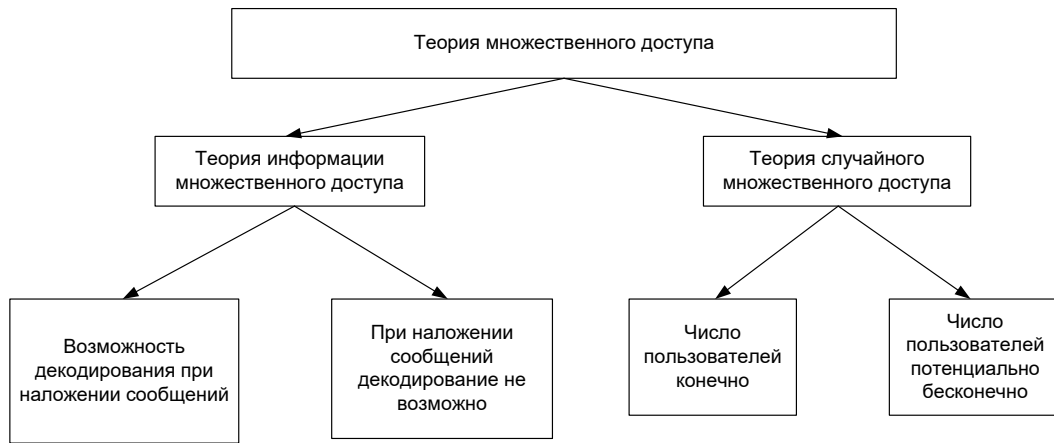


Рисунок 1.2 — Направления исследований систем случайного множественного доступа

*доступа* (ТСМД, другое название — теория алгоритмов разрешения коллизий, англ. термин random multiple-access theory [41—43]).

В направлении ТИМД уделяется внимание различным моделям шума и помехам множественного доступа, но не учитывается процесс случайного появления сообщений в системе. Оно делится на два подкласса. В первом рассматривались аспекты, связанные с возможностями декодирования сообщений из их смеси при наложении сигналов в канале. Во втором предполагалось, что декодирование при наложении сигналов пользователей (коллизии) невозможно, но рассматриваются различные модели каналов.

Основные результаты в области теории случайного множественного доступа, были получены Ю. Полянским и О. Ordentlich и основываются на методах кодового разделения, при фиксированном числе пользовательских устройств.

В направлении ТСМД наоборот, упор был сделан на процессы случайного поступления сообщений в систему, проводится анализ стабильности систем и задержек, определяемых коллизией пользовательских сообщений, но игнорируются другие аспекты канала связи. Здесь развитие шло двумя путями:

- *Первый путь.* Число пользователей рассматривается как конечное и, как правило, задаётся максимальное количество пользователей ( $M_{max}$ ) в системе. Есть два сценария:
  - число активных пользователей ( $M_a$ ) в окне всегда одинаково и соответствует максимальному ( $M_a = M_{max}$ );
  - число активных пользователей в окне случайно, но ограничено сверху максимальным ( $M_a \leq M_{max}$ ).

- *Второй путь.* Число пользователей в системе предполагается потенциально бесконечным, а процесс появления сообщений у пользователя описывается некоторым случайным процессом ( $M_{max} \rightarrow \infty$ ).

Основные результаты в области теории случайного множественного доступа, были получены Б.С. Цыбаковым, R. Gallager, В. А. Михайловым, А.И. Ляховым, А.М. Тюрликовым. Проблема обеспечения стабильности в системах случайного множественного доступа с потенциально неограниченным числом пользовательских устройств была сформулирована в работах Б.С. Цыбакова, В. А. Михайлова и J. Carpetanakis еще в 1978 году. Впервые решение данной проблемы было предложено на основе древовидного алгоритма [44–46]. В последние годы активно рассматривались подходы к расширению области стабильности систем, но это делалось в отрыве от вопросов затрат энергии. Приложение этих теорий к системам массовой межмашинной связи присутствуют в работах А.И. Парамонова, А.Е. Кучерявого, Т.М. Татарниковой.

В работах J. Choi проводились исследования с точки зрения изменения алгоритма случайного множественного доступа для повышения вероятности доставки. Рассматривались такие ключевые методы как: применение неортогонального множественного доступа [47–50]; применение метода разрешения коллизий с использованием преамбул за счет внедрения фазы исследования [51–54]. Данные модификации применялись к алгоритмам типа АЛОНА. Исследования проводились с точки зрения теории случайного множественного доступа. Однако в ключевых работах с использованием преамбул рассматривается система с потерями, что снимает проблемы обеспечения стабильности системы, но возникают необратимые потери сообщений.

Из рисунка 1.2 можно отметить, что в течение долгого времени теория информации множественного доступа и теория случайного множественного доступа разрабатывались независимо друг от друга [37; 55]. Это было отмечено еще в работе [55], но так продолжалось еще долгое время.

Первые попытки объединить подходы и учесть энергопотребление были предприняты в работах [56], а так же [57] и [58].

В работе [56] рассматривался алгоритм АЛОНА при бесконечном числе пользовательских устройств, и анализировалась максимальная скорость передачи для такой системы, в канале с аддитивным белым гауссовским шумом и не возможностью восстановления данных при коллизии в канале. Таким образом, работа объединяла направление ТСМД с потенциально бесконечным

числом пользователей и ТИМД с каналом где декодирование при коллизии не возможно (см. 1.1).

В работах [57] и [58] авторы рассматривали сценарий с фиксированным количеством пользователей, при этом только случайное количество из них имеет готовое к передаче сообщение ( $M_a \leq M_{max}$ ), и доставка сообщения на базовую станцию должна быть успешной с некоторой заданной вероятностью. Предполагается, что при наложении сообщений имеется возможность их декодирования с некоторой вероятностью. Авторы рассматривают несколько алгоритмов множественного доступа, в том числе АЛОНА, и выводят границы достижимости отношения энергии на бит к спектральной плотности мощности шума. Граница достижимости означает не конкретное решение, а только тот факт, что такое решение существует. Определение термина достижимость подробно обсуждается в [59]. Модели [57] [58] не допускают повторную передачу сообщений, которые не были успешно доставлены. Ввиду наличия потерь в их модели не возникает вопросов с обеспечением стабильной работы системы. Работы объединяли в себе направление ТСМД при конечном числе пользователей и ТИМД при возможности декодирования данных при коллизии в канале.

С учётом изложенного ранее, остаётся открытым вопрос исследования методов повышения спектральной эффективности стабильных систем и снижение энергозатраты при передаче данных при потенциально неограниченном числе пользовательских устройств. Также актуально получение оценок для нижних границ затрат энергии в системах случайного множественного доступа с потенциально бесконечным числом пользовательских устройств при стабильной работе системы и конечной задержке. Поэтому в работе будет проведено исследование нижних границ для мощности сигнала и затрачиваемой энергии на бит при совместном применении теории информации и методов разрешения конфликтов. Так же будет рассмотрены вопросы эффективности применения методов гибридной обратной связи и алгоритма разрешения конфликтов, на основе метода разрешения коллизий с использованием преамбул, в целях уменьшения нижних границ затрат энергии.

## 1.2 Основные характеристики систем случайного множественного доступа и анализ условий стабильности

При анализе систем случайного множественного доступа в рамках изучения алгоритмов разрешения коллизии (теория случайного множественного доступа) рассматриваются характеристики системы, которые будут описаны в данном подразделе.

Для начала сформулируем определение понятия алгоритма случайного множественного доступа.

**Определение 1.1.** *Алгоритм случайного множественного доступа — это совокупность правил в соответствии с которыми пользовательские устройства, с готовыми для передачи сообщениями, принимают решение об отправке сообщения в каждом временном отрезке работы системы, так же в него входит алгоритм разрешения конфликта.*

Прежде чем описать основные характеристики систем случайного множественного доступа введём базовую модель системы, в рамках которой будут сформулированы данные характеристики.

Рассмотрим модель системы случайного доступа, предложенную Галлагером [60]:

- Все сообщения всех пользователей имеют одинаковую длину, а время передачи одного сообщения принимается за единицу времени (окно). Всё время работы системы разделено на окна, и пользователи могут начать передачу только в начале очередного окна (окна не закреплены ни за одним пользовательским устройством).
- В каждом окне может произойти одно из 3 событий:
  - В окне передаёт только 1 пользовательское устройство которому сообщается, что сообщение успешно доставлено получателю (событие "Успех");
  - Два или более пользовательских устройства передают в окне, тогда приемник не получает информации о содержимом передаваемых пакетов (событие "Конфликт");
  - Никто не передаёт в окне (событие "Пусто").

- В конце окна все пользовательские устройства достоверно узнают, какое событие произошло в канале.

При анализе систем случайного доступа, как правило, рассматриваются две ключевые характеристики. Это средняя задержка в системе и предельная интенсивность входного потока, до которой система стабильна.

**Определение 1.2. Задержка в системе** — это случайная величина, соответствующая интервалу от момента появления сообщения у пользовательского устройства до момента успешной передачи данного сообщения пользователем.

Существует два подхода к определению задержки, это виртуальная и актуальная задержки [61].

**Определение 1.3. Актуальная средняя задержка.** Все пакеты в системе пронумерованы с начала работы системы натуральными числами. Система работает некоторое время. Обозначим через  $d_i$  — задержку для  $i$ -го сообщения в системе. Тогда актуальная задержка  $\bar{D}_a$  определяется как

$$\bar{D}_a \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k d_i}{k}. \quad (1.1)$$

**Определение 1.4. Виртуальная средняя задержка.** В случайном момент времени  $t$  в систему добавляется целевое пользовательское устройство (\*) с готовым к передаче сообщением. Обозначим через  $d_*$  — задержку для целевого пользовательского устройства. Тогда под виртуальной средней задержкой  $\bar{D}_v$  подразумевается следующее

$$\bar{D}_v = \limsup_{t \rightarrow \infty} M[d_*]. \quad (1.2)$$

**Замечание 1.1.** При Пуассоновском входном потоке значения актуальной и виртуальной задержек совпадают, то есть  $\bar{D}_a = \bar{D}_v$  (см. доказательство в работе [61]).

Пусть на вход нашей системы поступает входной поток сообщений в единицу времени  $\Lambda$ . Дадим определение критической интенсивности входного потока.

**Определение 1.5.** Следуя работе [41], определим **критическую интенсивность входного потока**  $\Lambda_{кр}$  для системы случайного множественного

доступа с повторными передачами как максимальную интенсивность входного потока  $\Lambda$ , при которой средняя задержка в системе конечна:

$$\Lambda_{кр} = \sup \{ \Lambda : \bar{D}(\Lambda) < \infty \},$$

где  $\bar{D}(\Lambda)$  — средняя задержка.

**Замечание 1.2.** Если в системе отсутствуют повторные передачи, то такая система случайного доступа будет работать с потерями. В таком случае она всегда будет являться стабильной. Для таких систем важной характеристикой является вероятность доставки, в англоязычных работах используется термин *Packet Delivery Ratio (PDR)*, и определяется как число успешно доставленных сообщений на общее число отправок. Так же часто встречается смежная характеристика — вероятность потери, соответствующая термину *Packet Loss Ratio (PLR)*, связанная с предыдущей как  $PLR = 1 - PDR$ .

Дополнительной характеристикой системы является среднее число сообщений в системе на единицу времени.

**Определение 1.6.** Среднее число сообщений в системе  $\bar{N}$  может быть определено следующим образом. Пусть система работает  $t$  единиц времени, а число сообщений находящихся в системе в каждый момент времени  $i$  обозначим как  $N_i$ . Тогда можно записать следующее

$$\bar{N} \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^t N_k}{t}. \quad (1.3)$$

**Замечание 1.3.** Средняя задержка и среднее число сообщений в системе связаны теоремой Литтла при условии, что  $\Lambda < \Lambda_{кр}$  следующим выражением [62]:

$$\bar{N}(\Lambda) = \bar{D}(\Lambda)\Lambda. \quad (1.4)$$

Под стабильной работой подразумевается наличие конечной средней задержки в системе при её длительном времени работы (т.е. число сообщений в очереди на передачу остается конечным). Основная проблема — это обеспечение стабильной работы систем случайного множественного доступа при

потенциально неограниченном числе пользовательских устройств. При исследовании условий стабильности систем случайного доступа могут использоваться различные методы анализа.

Первым из таких методов, используемых в работе, является теория Марковских цепей. Пусть работа системы может быть описана последовательностью  $\xi_t$ , где  $t = 0, 1, 2, \dots$ , которая задаёт Марковскую цепь и принимает значения из множества  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . Если данная Марковская цепь является [63]:

- *неприводимой*, то есть из любого состояния цепи можно попасть в другое, при этом не обязательно за один шаг;
- *апериодической*, если возврат в состояние происходит через случайное количество шагов;
- *однородной*, то есть переходные вероятности не меняются во времени.

Тогда, если существует такое значение  $Z > 0$ , что при любых  $n > Z$  средний снос Марковской цепи  $M[\xi_{t+1} - \xi_t | \xi_t = n] < 0$ , тогда Марковская цепь с бесконечным числом состояний является эргодической, а значит система — стабильной. В противном случае — неустойчивой (нестабильной), т.е. с течением времени  $\xi_t$  начинает неограниченно возрастать [63; 64].

Второй применяемый в работе метод — это регенерирующие случайные процессы. Пусть работа системы может быть описана некоторыми циклами работы (сеансами), таким образом, что работа системы в каждом цикле регенерации не зависит от предыдущих. Обозначим через  $\mathcal{C}_i$  — количество событий на  $i$ -том цикле регенерации,  $\mathcal{T}_i$  — длина  $i$ -го цикла регенерации. Исходя из написанного ранее, значения  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots$  являются независимыми, так же как и  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots$ . Пусть  $c(t)$  — количество событий за время работы системы  $t$ . Тогда среднее число событий, то есть среднее количество сообщений покидающих систему, а следовательно — критическую интенсивность входного потока можно определить как следующий предел [65; 66]:

$$\Lambda_{\text{кр}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c(t)}{t} = \frac{M[\mathcal{C}]}{M[\mathcal{T}]}, \quad (1.5)$$

где  $M[\mathcal{C}]$  — среднее количество сообщений, успешно переданных в течение цикла регенерации,  $M[\mathcal{T}]$  — средняя длительность цикла регенерации.



### 1.3 Понятие спектральной эффективности для систем со случайным множественным доступом

При анализе систем с точки зрения теории информации множественного доступа, как правило, рассматривается не интенсивность входного потока (сообщений/окно), а такая характеристика, как спектральная эффективность системы (бит/с/Гц). В данном подразделе подробнее рассмотрим данное понятие, как для непрерывного по времени, так и для дискретного по времени каналов.

В рамках исследования систем в области теории информации, как правило, идет анализ их эффективности в условиях канала с шумом, который может повредить сообщение в ходе передачи. При изучении методов разрешения конфликтов обычно предполагается, что шума в канале нет, а повреждение сообщений вызвано только их коллизией. Прежде чем рассматривать спектральную эффективность для алгоритмов случайного доступа, опишем анализ данной характеристики для систем со статическим распределением ресурса канала между пользователями, что исключает возникновение коллизии между сообщениями пользовательских устройств. В таком случае на передачу сообщения будет влиять только шум канала. Существуют различные модели шумов канала, в работе будет рассматриваться канал с аддитивным белым гауссовским шумом.

Гауссовский канал для пользовательского устройства в системе без конфликтов может быть описан следующим образом [67]

$$Y_i = X_i + Z_i, \quad (1.6)$$

где  $Y_i$  — выход канала при передаче  $i$ -го сигнала,  $X_i$  — вход канала при передаче  $i$ -го сигнала,  $Z_i$  — шум в канале при передаче  $i$ -го сигнала из распределения Гаусса (нормальное распределение) с дисперсией  $Q$  ( $Z \sim \mathcal{N}(0, Q)$ ).

Введём понятие отношения сигнал/шум (signal-to-noise ratio, SNR), которое в работе будет обозначаться как  $\gamma$ . Если пользовательским устройством передавался сигнал с мощностью  $P$ , то отношение сигнал шум будет определено как  $\gamma = \frac{P}{N}$  [67].

Если рассматривается непрерывный по времени канал, то пользовательский сигнал передаётся в течение времени  $t$  в некоторой полосе частот  $W$ .

Пропускная способность  $C$  для такого канала определяется в соответствии с формулой Шеннона для непрерывного канала [67]:

$$C = W \log_2(1 + \gamma), \quad (1.7)$$

где  $W$  — полоса частот при передаче.

Пропускная способность  $C$ , вычисляемая по выражению (1.7), измеряется в *бит/с*. Спектральная эффективность для непрерывного по времени канала измеряется в *бит/с/Гц*, обозначим данную характеристику через  $\eta$ . Тогда с учётом пропускной способности  $C$ , предел для спектральной эффективности может быть определен как  $\eta = \frac{W \log_2(1 + \gamma)}{W} = \log_2(1 + \gamma)$ .

Если рассматривается дискретный по времени канал, то сообщение передаваемой пользователем представляет собой набор из  $n$  отсчётов сигнала и содержит  $k$  бит информации. Если как и раньше сигнал передаётся в течение времени  $T$  в некоторой полосе частот  $W$ , то в соответствии с теоремой Котельникова число отсчётов должно быть в 2 раза больше частоты, а следовательно число отсчётов будет  $n = 2WT$  [67].

Для дискретного канала пропускная способность вычисляется по следующей формуле:

$$C = \frac{1}{2} \log_2(1 + \gamma). \quad (1.8)$$

Пропускная способность, вычисляемая по формуле (1.8), имеет размерность *бит/отсчёт*. Для дискретного канала спектральная эффективность измеряется в тех же величинах (*бит/отсчёт*), обозначим данную характеристику через  $\rho$ . С учётом пропускной способности для дискретного по времени канала предел спектральной эффективности определяется как  $\rho = C = \frac{1}{2} \log_2(1 + \gamma)$ .

**Замечание 1.4.** Согласно теореме Шеннона (прямая теорема кодирования) существует такая кодово-модуляционная схема  $A$  со скоростью  $R$  такая, что вероятность ошибки декодирования  $P_e$  может быть сколь угодно мала ( $P_e(A, n, k, P) \rightarrow 0$ ), если выполняется неравенство:

$$R < C. \quad (1.9)$$

Если неравенство (1.9) не выполняется, то согласно теореме Шеннона (обратная теорема кодирования) вероятность ошибки декодирования ( $P_e(A, n, k, P) \rightarrow 1$ ) [67].

Теперь рассмотрим переход к спектральной эффективности для системы с простым алгоритмом случайного доступа типа АЛОНА, когда число активных пользователей в системе известно. Как известно критическая интенсивность для данного алгоритма  $\Lambda_{кр} = e^{-1}$  сообщений/окно. При этом для стабильных систем случайного множественного доступа интенсивность выходного потока равна интенсивности входного потока  $\Lambda_{вых} = \Lambda$ .

Если рассматривать непрерывный по времени канал, то каждое сообщение передаваемое в такой системе, как и раньше, представляет собой сигнал, которой длиться  $t$  времени и занимает полосу  $W$ . На вход поступает поток сообщений с интенсивностью  $\Lambda < \Lambda_{кр}$ .

Дадим определение спектральной эффективности для такой системы.

**Определение 1.7.** *Спектральная эффективность для системы случайного доступа с непрерывным по времени каналом и интенсивностью входного потока  $\Lambda$ , при которой система работает стабильно, может быть вычислена как*

$$\eta \triangleq \frac{\Lambda R}{W}, \quad (1.10)$$

где  $\eta$  — спектральная эффективность бит/с/Гц,  $\Lambda$  — интенсивность входного потока при которой система работает стабильно,  $R$  — скорость при передаче одного сообщения бит/с,  $W$  — полоса пропускания сообщений Гц.

Тогда для рассматриваемой в примере системы при непрерывном по времени канале, с учётом (1.7) и  $\Lambda_{кр} = e^{-1}$ , спектральная эффективность  $\eta$  ограничена сверху выражением:

$$\eta = \frac{e^{-1} W \log_2(1 + \gamma)}{W} = e^{-1} \log_2(1 + \gamma). \quad (1.11)$$

Если рассматривать дискретный по времени канал, то каждое сообщение передаваемой в такой системе, как и для случая с одним пользователем, представляет собой последовательность из  $n = 2WT$  отсчётов и несет в себе  $k$  бит информации. Как и в случае с непрерывным каналом, на вход поступает поток сообщений с интенсивностью  $\Lambda < \Lambda_{кр}$ . Дадим определение спектральной эффективности для рассматриваемой системы с дискретным по времени каналом.

**Определение 1.8.** *Спектральная эффективность для системы случайного доступа с дискретным по времени каналом и интенсивностью входного потока  $\Lambda$ , при которой система работает стабильно, может быть вычислена как*

$$\rho \triangleq \frac{\Lambda k}{n}, \quad (1.12)$$

где  $\rho$  — спектральная эффективность [бит/отсчёт],  $\Lambda$  — интенсивность входного потока, при которой система работает стабильно,  $k$  — количество бит информации в одном сообщении [бит],  $n$  — количество отсчётов в одном сообщении [отсчёты].

Тогда для рассматриваемой в примере системы при дискретном по времени канале, с учётом (1.8) и  $\Lambda_{кр} = e^{-1}$ , спектральная эффективность  $\rho$  ограничена сверху выражением:

$$\rho = \frac{e^{-1}}{2} \log_2(1 + \gamma). \quad (1.13)$$

Результаты описанные ранее давно известны. Однако оценки, полученные в рамках данных рассуждений, будут сильно завышены. Это связано с тем, что при анализе с использованием формулы Шеннона из классической теории информации, предполагается, что длины сообщений и отсчётов стремятся к бесконечности, при фиксированной скорости кода ( $k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, R = \frac{k}{n}$ ). Но в рамках сценария mMTC в системах IoT передаваемые сообщения имеют короткие длины. Для учёта малых длин сообщений при анализе и уточнения границ может быть использовано следующее утверждение.

**Утверждение 1.1.** *Существует кодово-модуляционная схема, для которой вероятность ошибки декодирования при заданных параметрах отношения сигнал/шум  $\gamma$ , числе отсчётов в сигнале  $n$  и числе информационных бит  $k$ , определяется по формуле*

$$p_e(n, k, \gamma) = Q \left( \frac{n \frac{1}{2} \log_2(1 + \gamma) + \frac{1}{2} \log_2 n - k}{\sqrt{n \frac{\gamma}{2} \frac{\gamma + 2}{(\gamma + 1)^2} \log_2 e}} \right). \quad (1.14)$$

*Доказательство.* Из работы [57] следует, что для фиксированной длины  $n$  и фиксированной вероятности ошибки  $\varepsilon$  существует код, мощность которого

или размер  $M$  могут быть вычислены с использованием следующей формулы:

$$\log_2 M = nC - \sqrt{nV}Q^{-1}(\epsilon) + \frac{1}{2}\log_2 n \quad (1.15)$$

где  $C = \frac{1}{2}\log_2(1 + \gamma)$ ,  $V = \frac{\gamma}{2} \frac{\gamma+2}{(\gamma+1)^2} (\log_2 e)^2$ ,  $\gamma$  — это отношение сигнал/шум,  $Q^{-1}$  это обратная Q-функции. Можно отметить, что  $\log_2 M$  — это количество информационных символов  $k$ . Тогда из (1.15) следует формула (1.14), что и требовалось доказать.

Пример вычислений вероятностей ошибки по формуле (1.14) приведён на рисунке 1.3. Как видно, с ростом числа бит в сообщении поведение значений полученных по формуле (1.14), стремиться к результатам, полученным по формуле Шеннона и представленным в соответствии с замечанием 1.4 для дискретного канала при бесконечных длинах.

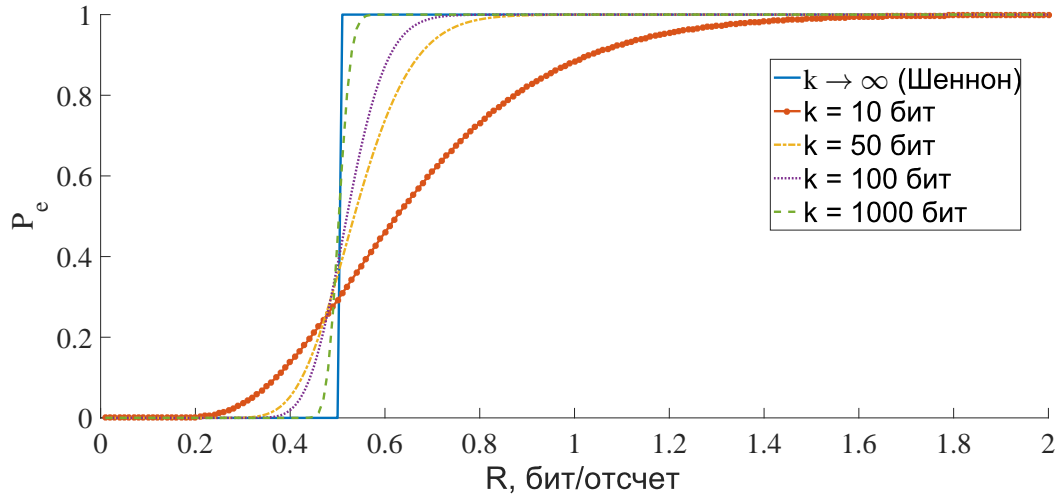


Рисунок 1.3 — Вероятность ошибки декодирования при различных длинах сообщений

Используя утверждение 1.1, можно уточнить границы для спектральной эффективности  $\rho$  при коротких длинах сообщений.

#### 1.4 Постановка задач минимизации энергозатрат в системах массовой межмашинной связи

В работе будет рассматриваться типовой сценарий массовой межмашинной связи. Имеется большое количество автономных пользовательских устройств и одна базовая станция. Уровень затухания в канале между базовой

станцией и всеми пользовательскими устройствами одинаков. Пользовательские устройства могут передавать данные на базовую станцию и получать служебные сообщения от базовой станции. У пользовательских устройств в произвольные моменты времени возникают небольшие фрагменты данных одинаковой длины, которые устройство должно передать на базовую станцию. Задаётся общая интенсивность появления данных на пользовательских устройствах. Для этого сценария есть два варианта работы системы:

- *Первый вариант.* В системе не предусмотрено наличие канала обратной связи. В этом случае пользовательское устройство передаёт сообщение один раз и удаляет его независимо от успешности передачи. Важной характеристикой для такого варианта является коэффициент успешной доставки пакетов (PDR), который может быть установлен в соответствии с требованиями сценария.
- *Второй вариант.* В системе имеется канал обратной связи, и пользовательское устройство повторяет передачу, согласно некоторому алгоритму, до тех пор, пока не получит подтверждение от базовой станции, что данные были успешно получены от этого пользовательского устройства. Для такой системы важной характеристикой является значение интенсивности появления сообщений, до которой система стабильна.

В дальнейшем под первым вариантом сценария будет подразумеваться система без повторных передач, а под вторым вариантом — система с повторными передачами.

Ввиду некоторых конструктивных особенностей сетей передачи, может возникнуть необходимость ограничить мощность сигнала передачи данных от пользовательского устройства. Это, например, может быть вызвано условиями контролируемых организаций. В этом сценарии уменьшение мощности передаваемого сигнала эквивалентно уменьшению отношения сигнал/шум для достижения желаемой производительности системы. Как отмечалось ранее, в системах IoT большинство устройств могут получать питание от автономного источника. Поэтому возникает вопрос об увеличении времени работы устройства без дополнительного обслуживания (замены аккумулятора или подзарядки). В описанном сценарии увеличение времени работы пользовательского устройства сводится к задаче снижения потребления энергии на бит во время передачи данных.

Соответственно, для обоих сценариев можно рассматривать две задачи минимизации.

- *Первая задача.* Минимизация отношения сигнал/шум  $SNR$ . Фактически, это минимизация мощности сигнала передачи для заданных параметров: длины передаваемого сообщения в битах, интенсивности входного потока, вероятности доставки сообщений и мощности шума.
- *Вторая задача.* Минимизация потребления энергии на бит  $\frac{E_b}{N_0}$ . Фактически, это минимизация потребления энергии для передачи сообщения с фиксированными параметрами: длина передаваемого сообщения в битах, интенсивность входного потока, вероятность доставки пакетов и мощность шума, спектральная плотность.

Характеристика  $\frac{E_b}{N_0}$  — это энергия сигнала, приходящаяся на один бит передаваемого сообщения ( $E_b$ ) к энергетической спектральной плотности шума ( $N_0$ ) (в работе для краткости изложения будет использоваться термин — ‘энергия на бит’), и является ключевым показателем энергоэффективности цифровых систем передачи данных. Если зафиксирована спектральная эффективность, то система с меньшим значением  $\frac{E_b}{N_0}$  обеспечит более длительную работу от автономного источника питания (см. например [57]). При решении второй задачи (минимизация потребления энергии на бит  $\frac{E_b}{N_0}$ ) в рамках систем с обратной связью необходимо учитывать количество повторных передач сообщения, отправляемого пользовательским устройством. Следует отметить, что показатель  $\frac{E_b}{N_0}$  позволяет сравниваться с другими результатами исследований в данной предметной области, но не дает возможности учесть расходы системы в режиме ожидания. Поэтому все проводимые в диссертационной работе исследования энергоэффективности относятся только к процессу передачи данных.

Как правило, в работах, посвященных произвольному множественному доступу в системах с mMTC, рассматриваются алгоритм ALOHA и его модификации [68–70].

В рамках анализа будет предполагаться, что аддитивный белый гауссовский шум будет иметь единичную дисперсию  $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ . Отсюда можно сделать следующее замечание:

**Замечание 1.5.** *Поскольку дисперсия шума в рассматриваемых моделях систем равна 1 (по аналогии с работами Ю. Полянского), то отношение сигнал/шум в размах равно  $\frac{P}{1} \frac{[Bamm]}{[Bamm]}$ . Таким образом, численное значение мощности*

*сигнала  $P$  в ваттах совпадает с отношением сигнал/шум в размах. В дальнейшем под  $P$  будет подразумеваться  $SNR$  в размах.*

При рассмотрении и анализе систем в рамках работы будет использоваться допущение о том, что число пользователей с готовыми к передаче сообщениями известно. Данное допущение позволяет облегчить теоретический анализ стабильности системы. Однако во многих реальных сценариях это допущение некорректно. Как правило, на практике количество пользователей неизвестно и должно быть оценено базовой станцией, а затем отправлено новым пользователям; после чего пользователи могут наблюдать за каналом, чтобы обновлять свои оценки, см., например, [53; 71—80]. Известно, что оценка числа пользователей не меняет условий устойчивости, например, см. [81].



## Глава 2. Энергоэффективность стабильных систем с потенциально неограниченным числом пользовательских устройств на базе алгоритма типа АЛОНА

### 2.1 Вводные замечания

Как отмечалось ранее, в течение долгого времени теория информации множественного доступа и теория случайного множественного доступа разрабатывались независимо друг от друга. Первые попытки объединить подходы и учесть энергопотребление были предприняты в работах [56], а так же [57] и [58].

В работе [56] рассматривался алгоритм АЛОНА при бесконечном числе пользовательских устройств и анализировалась максимальная скорость передачи для такой системы в канале с аддитивным белым гауссовским шумом и невозможностью восстановления данных при коллизии в канале. Однако при анализе использовалась теорема Шеннона, которая предполагает передачу с кодами бесконечной длины, что не соответствует реальным длинам сообщений в сценариях массовой межмашинной связи.

В работах [57] и [58] авторы рассматривали сценарий с фиксированным количеством пользователей, а доставка сообщения на базовую станцию должна быть успешной с некоторой заданной вероятностью. Авторы рассматривают несколько алгоритмов множественного доступа, в том числе АЛОНА, и выводят границы достижимости отношения энергии на бит к спектральной плотности мощности шума. Граница достижимости означает не конкретное решение, а только тот факт, что такое решение существует. Модели в работах не допускают повторную передачу сообщений. Так как в их модели присутствуют потери сообщений, то нет проблемы обеспечения стабильной работы системы.

В данном разделе будут рассматриваться системы на базе алгоритма случайного доступа АЛОНА. Работа данной системы предполагается как с наличием возможности повторных передач, так и без наличия повторных передач. Предполагается потенциально неограниченное число пользовательских устройств в системе. Для системы описывается ряд допущений. В отличие от работы [56] будет рассмотрен анализ АЛОНА при конечных длинах сообщений с использованием утверждения 1.1. В рамках анализа сформулированы задачи

минимизации мощности сигнала и энергии на бит с учётом наличия/отсутствия повторных передач. Главным отличием от работ [57] и [58], является наличие потенциально неограниченного числа пользовательских устройств и учёт числа повторных передач сообщения пользователем при анализе затрат энергии на бит и стабильной работе системы.

## 2.2 Базовая модель системы с потенциально неограниченным числом пользовательских устройств и шумами канала

Рассматривается система случайного множественного доступа. В канале присутствует аддитивный белый гауссовский шум (АБГШ). Для этой системы сделаем ряд допущений (похожая система допущений приводилась в работах [82–84]).

**Допущение 2.1.** *В системе есть одна базовая станция и множество пользовательских устройств. Количество сообщений, появляющихся в системе каждую единицу времени (окно), распределено по закону Пуассона с параметром  $\Lambda$  [сообщений/окно]. Каждое сообщение содержит  $k$  бит информации. Используя кодово-модуляционную схему  $A$ , на основе  $k$  битов генерируется сигнал, содержащий  $n$  отсчётов.*

**Допущение 2.2.** *Существует потенциально бесконечное количество пользовательских устройств (в таком случае пользовательские устройства и сообщения эквивалентны). Пользовательское устройство с готовым к отправке сообщением будет называться активным.*

**Допущение 2.3.** *Пользовательские устройства и базовая станция имеют синхронизацию как по отсчётам, так и по окнам. Окно — это время, необходимое для передачи одного сообщения, которое длится  $n$  отсчётов. Временные интервалы пронумерованы, и окно с номером  $t$  соответствует временному интервалу  $[t, t + 1)$ .*

**Допущение 2.4.** *Рассматривается дискретный по времени канал связи с аддитивным белым гауссовским шумом (гауссовский канал множественного*

доступа), определяемый как  $Y = \sum_{i=1}^{K_t} X_i + Z$  где  $Y$  — выходной сигнал канала;  $K_t$  — количество пользовательских устройств, передающих сигнал на канал в окне с номером  $t$ , являющееся случайной величиной);  $X_i$  — сигнал  $i$ -го пользовательского устройства;  $Z$  — аддитивный белый гауссовский шум, а  $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ . Сигналы, передаваемые пользовательскими устройствами, содержат  $n$  отсчётов и ограничение максимальной энергии каждого сигнала  $X_i = nP$  [57; 58].

**Допущение 2.5.** Рассматриваются такие кодово-модуляционные схемы  $A$ , что при наложении пользовательских сигналов ни одно из сообщений не может быть успешно декодировано.

Описанная модель системы характеризуется следующим набором параметров:  $\Lambda$  [сообщения/слот],  $k$  [биты],  $n$  [отсчёты],  $P$  [разы] или  $\frac{E_b}{N_0}$  [энергия / бит]. Ранее было введено понятие спектральной эффективности  $\rho$  для дискретного по времени канала, определяемое как:

$$\rho \triangleq \frac{\Lambda k}{n}. \quad (2.1)$$

Это значение характеризует среднее количество битов, переданных на отсчёт (для интенсивностей входного потока, при которых система работает стабильно).

Далее с учётом описанной модели будет показан анализ системы, как с гарантированной доставкой сообщений, так и с потерями. Будут сформулированы и описаны задачи минимизации мощности сигнала ( $P$ ) и потребления энергии на бит  $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$  при коротких длинах сообщений.

### 2.3 Энергоэффективность системы без наличия повторных передач

Рассмотрим систему, работающую в режиме без подтверждений (повторные передачи сообщения отсутствуют), причем каждое пользовательское устройство, у которого есть сообщение, передаёт его в начале следующего окна. В работе рассматривается только вероятность доставки  $PDR$  и будем её обозначать как  $P_d$ .

Пусть для данной системы задано количество информационных бит  $k$ , которые должны быть переданы пользовательским устройствам, требуемая вероятность доставки  $P_d$  и требуемая спектральная эффективность  $\rho$ .

Добавим к общей модели следующее допущение (аналогичное допущение вводилось в работе [85]):

**Допущение 2.6.** *Пользовательское устройство передаёт сообщение в начале следующего окна сразу после появления сообщения и покидает систему, не дожидаясь подтверждения.*

**Замечание 2.1.** *Если в окне передавало больше одного пользовательского устройства, то сообщения накладываются и не могут быть успешно декодированы (см. допущение 2.5).*

Как отмечалось ранее, основным параметром системы является вероятность доставки. По аналогии с определениями актуальной и виртуальной задержки в работе [61], дадим следующие два определения для вычисления вероятности доставки (по аналогии с актуальной и виртуальной задержками, см. 1.2):

**Определение 2.1.** *Актуальное значение вероятности доставки. Все сообщения в системе пронумерованы, и алгоритм работает некоторое время. Затем общее количество успешно доставленных сообщений делится на общее количество сообщений, которые были отправлены в течение заданного периода времени:*

$$P_{\text{дост},\phi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_{\text{дост}}(T)}{N(T)},$$

где  $T$  — время работы системы;  $N_{\text{дост}}(T)$  — количество сообщений, успешно доставленных за время  $T$ ;  $N(T)$  — количество сообщений, отправленных за время  $T$ .

**Определение 2.2.** *Виртуальное значение вероятности доставки. Система работает бесконечно долгое время  $T$ . В случайный момент времени добавляется целевое (помеченное) пользовательское устройство и определяется вероятность, с которой его сообщение будет успешно доставлено:*

$$P_{\text{дост},\epsilon} = \lim_{T \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \begin{array}{l} \text{Сообщение целевого пользователя, добавленного} \\ \text{в момент времени } T, \text{ успешно доставлено} \end{array} \right\}$$

В [61] было показано, что добавление целевого пользовательского устройства в систему с входным Пуассоновским потоком не нарушает сам входной поток и его характеристики. Также как и в случае с задержкой при входном Пуассоновском потоке, оба определения вероятности доставки сообщения дают одно и то же значение, то есть  $P_{\text{дост},\text{ф}} = P_{\text{дост},\text{в}}$ .

Далее в работе для анализа и решения описанной задачи минимизации будет использовано определение 2.2 для нахождения значения вероятности доставки сообщения, которое обозначим как  $P_d$ , то есть  $P_d = P_{\text{дост},\text{в}}$ .

**Замечание 2.2.** Известно, что отношение сигнал/шум (т.е. мощности сигнала, см. замечание 1.5)  $P$  и энергия на бит  $\frac{E_b}{N_0}$  связаны следующим выражением:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{n P}{2k}. \quad (2.2)$$

В третьем разделе в рамках описания спектральной эффективности было введено утверждение 1.1. С учётом сформулированной ранее модели системы отметим следующее замечание.

**Замечание 2.3.** Третий аргумент в выражении (1.15) это отношение сигнал шум. Но с учётом замечания 1.5 в данную формулу можно подставить мощность сигнала, тогда  $\gamma = P$ . Также можно считать и для энергии на бит  $\frac{E_b}{N_0}$ , в этом случае с учётом замечаний 1.5 и 2.2 (формула (2.2))  $\gamma = \frac{2k}{n} \frac{E_b}{N_0}$ .

С учётом всего изложенного ранее проанализируем вероятности доставки для задачи минимизации мощности передаваемого сигнала. Запишем и докажем следующее утверждение.

**Утверждение 2.1.** Если задано количество отсчётов  $n$ , количество бит  $k$ , передаваемых пользовательским устройством, и некоторое значение мощности сигнала  $P$ , то существует кодово-модуляционная схема, для которой выполняется следующее равенство:

$$P_d = e^{-\rho \frac{n}{k}} (1 - p_e(k, n, \gamma)), \quad (2.3)$$

$$\text{где } p_e(n, k, \gamma) = Q \left( \frac{n^{\frac{1}{2}} \log_2(1+\gamma) + \frac{1}{2} \log_2 n - k}{\sqrt{n^{\frac{\gamma}{2}} \frac{\gamma+2}{(\gamma+1)^2} \log_2 e}} \right), \text{ а } \gamma = P.$$

*Доказательство* В соответствии с определением 2.2 добавим целевое пользовательское устройство с готовым к передаче сообщением в произвольное окно с номером  $t$ . Тогда вероятность того, что сообщение целевого пользовательского устройства будет успешно доставлено, определяется двумя событиями. Первое, в окне не должны передавать другие абоненты (см. допущение 2.5), а значит, в окне  $t$  у других пользователей не должны появиться сообщения (см. допущение 2.6). Второе, сообщение целевого пользователя должно быть успешно декодировано с учётом АБГШ в канале (см. допущение 2.4). В соответствии с этим, вероятность доставки вычисляется следующим образом:

$$P_d = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \begin{array}{l} \text{в окне } t \text{ не появилось} \\ \text{ни одного пользователя} \\ \text{кроме целевого} \end{array} \right\} \Pr \left\{ \begin{array}{l} \text{сообщение целевого пользователя} \\ \text{успешно декодировано} \end{array} \right\}$$

Используя формулу вероятности появления  $i$  сообщений при Пуассоновском входном потоке с параметром  $\Lambda$  (см. допущение 2.1), можно записать:

$$\Pr \left\{ \begin{array}{l} i \text{ пользователей} \\ \text{появилось в системе} \end{array} \right\} = \frac{(\Lambda)^i}{i!} e^{-\Lambda}.$$

Тогда с учётом того, что  $\Lambda = \frac{\rho n}{k}$

$$\Pr \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ пользователей} \\ \text{появилось в системе} \end{array} \right\} = e^{-\Lambda} = e^{-\rho \frac{n}{k}}.$$

Пусть существует некоторая функция  $P_e(A, n, k, P)$ , которая позволяет определить вероятность ошибки декодирования для заданных параметров  $A$ ,  $P$ ,  $n$  и  $k$ , тогда:

$$\Pr \left\{ \begin{array}{l} \text{сообщение успешно} \\ \text{декодировано} \end{array} \right\} = 1 - P_e(A, n, k, P).$$

Вероятность доставки в этом случае может быть записана как:

$$P_d = e^{-\rho \frac{n}{k}} (1 - P_e(A, n, k, P)). \quad (2.4)$$

В формуле (2.4) заменяем вероятность ошибки при фиксированной кодово-модуляционной схеме  $A P_e(A, n, k, P)$  на границу достижимости из определения 1.1  $p_e = (n, k, \gamma)$ , тогда получим выражение (2.3), и учитывая замечание 2.3  $\gamma = P$ , получим соответствующее утверждение. Что и требовалось доказать.

С учётом утверждения 2.1 можно сформулировать *первую задачу минимизации*:

$$\begin{aligned} &\text{given : } k, \rho, P_d \\ &\text{minimize : } P \text{ in } n \\ &\text{subject to:} \\ &P_d = e^{-\rho \frac{n}{k}} (1 - p_e(k, n, \gamma)), \\ &\text{где } p_e(n, k, \gamma) = Q \left( \frac{n \frac{1}{2} \log_2(1+\gamma) + \frac{1}{2} \log_2 n - k}{\sqrt{n \frac{\gamma}{2} \frac{\gamma+2}{(\gamma+1)^2} \log_2 e}} \right), \text{ а } \gamma = P \end{aligned} \quad (2.5)$$

Решением данной задачи будет минимальное значение мощности сигнала  $P$ , при котором достигается требуемая вероятность доставки сообщения  $P_d$  для заданного количества передаваемых бит  $k$  и требуемой спектральной эффективности  $\rho$ .

Прежде чем рассмотреть следующую оптимизационную задачу сформулируем и докажем следующее утверждение.

**Утверждение 2.2.** *Если задано количество отсчётов  $n$ , количество бит  $k$ , передаваемых пользователем, и некоторое значение  $\frac{E_b}{N_0}$ , то существует кодово-модуляционная схема, для которой выполняется следующее равенство:*

$$\begin{aligned} &P_d = e^{-\rho \frac{n}{k}} (1 - p_e(k, n, \gamma)), \\ &\text{где } p_e(n, k, \gamma) = Q \left( \frac{n \frac{1}{2} \log_2(1+\gamma) + \frac{1}{2} \log_2 n - k}{\sqrt{n \frac{\gamma}{2} \frac{\gamma+2}{(\gamma+1)^2} \log_2 e}} \right), \text{ а } \gamma = \frac{2k}{n} \frac{E_b}{N_0}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

*Доказательство.* Доказательство данного утверждения, аналогично доказательству утверждения 2.1, за исключением того, что в соответствии с замечанием 2.3  $\gamma = \frac{2k}{n} \frac{E_b}{N_0}$ .

Из утверждения 2.2 можно сформулировать *вторую задачу минимизации* (уменьшение затрат энергии на бит для заданного количества передаваемых бит в сообщении и требуемой спектральной эффективности) следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \text{given : } k, \rho, P_d \\
& \text{minimize : } \frac{E_b}{N_0} \text{ in } n \\
& \text{subject to:} \\
& P_d = e^{-\rho \frac{n}{k}} (1 - p_e(k, n, \gamma)), \\
& \text{где } p_e(n, k, \gamma) = Q\left(\frac{n \frac{1}{2} \log_2(1+\gamma) + \frac{1}{2} \log_2 n - k}{\sqrt{n \frac{\gamma}{2} \frac{\gamma+2}{(\gamma+1)^2} \log_2 e}}\right), \text{ а } \gamma = \frac{2k}{n} \frac{E_b}{N_0}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

## 2.4 Энергоэффективность для стабильной системы с повторными передачами

Рассмотрим систему, в которой пользовательское устройство передаёт своё сообщение по некоторому алгоритму, пока оно не будет успешно доставлено. В отличие от ранее рассмотренной системы с потерями, вероятность доставки в данном случае равна 1, однако возникает вопрос о критической интенсивности входного потока, до которой данная система стабильна.

С учётом определения 1.5 и выражения (2.1), критическая спектральная эффективность определяется как [83]:

$$\rho_{\text{кр}} \triangleq \frac{\Lambda_{\text{кр}} k}{n} \tag{2.8}$$

Добавим в модель системы допущение 2.6\* (отличное от допущения для системы с потерями, аналогичное допущение вводилось в работе [86]):

**Допущение 2.6\*.** *К началу окна  $t$  все пользовательские устройства и базовая станция знают, сколько пользователей имеют готовые к передаче сообщения. Обозначим это число через  $M_t$ . Каждое пользовательское устройство передаёт свое сообщение с вероятностью  $p = \frac{G}{M_t}$ , где  $G$  — параметр алгоритма ( $0 < G \leq 1$ ), до тех пор, пока оно не будет успешно доставлено.*

**Замечание 2.4.** *Если в окне было отправлено ровно одно сообщение, то оно успешно декодируется с вероятностью  $P_{\text{dec}}$  и покидает систему. В противном случае оно остаётся в системе. Если несколько пользователей отправляют сообщения в один временной интервал, все сообщения не будут успешно доставлены и останутся в системе (см. допущение 2.5).*



**Замечание 2.5.** Аналогично предыдущей системе определим вероятность успешного декодирования как  $P_{dec} = 1 - P_e(A, n, k, P)$ , где  $P_e(A, n, k, P)$  — вероятность ошибки декодирования из-за АБГШ в канале для заданных  $k, A, n$  и  $P$  (см. допущение 2.4).

Сформулируем следующее утверждение.

**Утверждение 2.3.** Если задано количество отсчётов  $n$ , количество битов  $k$ , передаваемых пользователем, и некоторое значение  $P$ , тогда критическую спектральную эффективность можно найти как решение уравнения:

$$\rho_{кр} = \frac{k}{n} e^{-1} (1 - p_e(k, n, \gamma)), \quad (2.9)$$

$$\text{где } p_e(n, k, \gamma) = Q\left(\frac{n^{\frac{1}{2}} \log_2(1+\gamma) + \frac{1}{2} \log_2 n - k}{\sqrt{n^{\frac{\gamma}{2}} \frac{\gamma+2}{(\gamma+1)^2} \log_2 e}}\right), \text{ а } \gamma = P.$$

*Доказательство.* Последовательность  $M_t$  (см. допущение 2.6\*) образует цепь Маркова, неприводимую, апериодическую и однородную. Используя критерий Фостера (см., например, [87]), можно показать, что эта цепь Маркова эргодична и, следовательно,  $D < \infty$ . Работа системы описывается следующим рекуррентным уравнением:

$$M_{t+1} = M_t - I(\text{Успех} | M_t > 0) + V_t, \quad (2.10)$$

где  $M_{t+1}$  — число пользовательских устройств в окне  $t + 1$ ,  $M_t$  — число пользовательских устройств в окне  $t$ ,  $V_t$  — число новых пользовательских устройств, у которых появилось сообщение, распределено по закону Пуассона с параметром  $\Lambda$  (см. допущения 2.1 и 2.2),  $I(\text{Успех} | M_t > 0)$  — индикаторная функция определяемая как:

$$I(\text{Успех} | M_t > 0) = \begin{cases} 1, & \text{если } M_t > 0 \text{ и произошёл успех} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}. \quad (2.11)$$

Вычислим «условный средний снос»  $M[M_{t+1} - M_t | M_t = m]$ , где  $m > 0$ . Перепишем (2.10) перенеся  $M_t$  в левую часть

$$M_{t+1} - M_t = -I(\text{Успех} | M_t > 0) + V_t. \quad (2.12)$$

Возьмём условное математическое ожидание от правой и левой части (2.12):

$$M [M_{t+1} - M_t | M_t = m] = M [-I(\text{Успех} | M_t = m)] + M [V_t | M_t = m]. \quad (2.13)$$

Вычислим  $M [-I(\text{Успех} | M_t = m)]$ , в соответствии с определением индикаторной функции и учитывая, что  $m > 0$ :

$$\begin{aligned} M [-I(\text{Успех} | M_t = m)] &= 1 \Pr \{ \text{произошёл успех} \} + 0 \Pr \{ \text{иначе} \} = \\ &= \Pr \{ \text{произошёл успех} \}. \end{aligned}$$

Передача в системе будет успешной тогда и только тогда, когда это единственное передаваемое сообщение, и оно успешно декодировано:

$$\Pr \left\{ \begin{array}{l} \text{произошёл} \\ \text{успех} \end{array} \right\} = \Pr \left\{ \begin{array}{l} \text{Вероятность} \\ \text{передачи} \\ \text{одним} \\ \text{пользователем} \end{array} \right\} \Pr \left\{ \begin{array}{l} \text{сообщение} \\ \text{успешно} \\ \text{продекодировано} \end{array} \right\} \quad (2.14)$$

Если в начале временного интервала  $t$  в системе имеется  $M$  пользователей, то вероятность передачи равна  $G/M$  (см. допущение 2.6\*). Можно записать:

$$\Pr \left\{ \begin{array}{l} \text{Вероятность передачи} \\ \text{одним пользователем} \end{array} \right\} = M \frac{G}{M} \left( 1 - \frac{G}{M} \right)^{M-1}.$$

С учётом замечания 2.5, а так же формулы (1.14), по аналогии с доказательством утверждения 2.1:

$$\Pr \left\{ \begin{array}{l} \text{сообщение успешно} \\ \text{продекодировано} \end{array} \right\} = 1 - p_e(n, k, \gamma)$$

С учётом написанного ранее:

$$M [-I(\text{Успех} | M_t = m)] = M \frac{G}{M} \left( 1 - \frac{G}{M} \right)^{M-1} (1 - p_e(n, k, \gamma)). \quad (2.15)$$

Найдем  $M [V_t | M_t = m]$ . В соответствии со свойствами Пуассоновского распределения:

$$M[V_t | M_t = m] = \Lambda. \quad (2.16)$$

Тогда с учётом (2.15) и (2.16) можно записать (2.13) как:

$$\mathbb{M}[M_{t+1} - M_t | M_t = m] = \Lambda - M \frac{G}{M} \left(1 - \frac{G}{M}\right)^{M-1} (1 - p_e(n, k, \gamma)).$$

Рассмотрим предел среднего сноса при большом числе пользовательских устройств ( $m \rightarrow \infty$ ):

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{M}[M_{t+1} - M_t | M_t = m] &= \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \Lambda - \lim_{m \rightarrow \infty} M \frac{G}{M} \left(1 - \frac{G}{M}\right)^{M-1} (1 - p_e(n, k, \gamma)). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Отметим, что  $\lim_{m \rightarrow \infty} \Lambda = \Lambda$ , так как не зависит от  $m$ . Также легко можно показать, что  $\lim_{m \rightarrow \infty} M \frac{G}{M} \left(1 - \frac{G}{M}\right)^{M-1} (1 - p_e(n, k, \gamma)) = -Ge^{-G}(1 - p_e(n, k, \gamma))$ . Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{M}[M_{t+1} - M_t | M_t = m] &= \\ &= \Lambda - Ge^{-G}(1 - p_e(n, k, \gamma)). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Из формулы (2.18) и определения 1.5 следует  $\Lambda_{\text{кр}} = Ge^{-G}(1 - p_e(n, k, \gamma))$ . С учётом (2.8)  $\frac{n}{k} \rho_{\text{кр}} = Ge^{-G}(1 - p_e(n, k, \gamma))$ , откуда вытекает выражение

$$\rho_{\text{кр}} = \frac{k}{n} Ge^{-G}(1 - p_e(n, k, \gamma)). \quad (2.19)$$

С учётом замечания 2.3  $\gamma = P$ . Стоит отметить, что для алгоритма с повторными передачами при минимизации  $P$  можно найти значение  $G$ , которое максимизирует спектральную эффективность, определяемую из (2.19). Как следует из записи (2.19) от  $G$  зависит только часть выражения  $(Ge^{-G})$ , поэтому для максимизации  $\rho_{\text{кр}}$  необходимо решить следующую оптимизационную задачу:

$$G_{\text{opt}} = \max_G Ge^{-G}$$

Хорошо известно, что решение этой оптимизационной задачи  $G_{\text{opt}} = 1$  [41]. Учётом этого мы получим  $\rho_{\text{кр}} = \frac{k}{n} e^{-1}(1 - p_e(n, k, \gamma))$ , где  $\gamma = P$ , что и требовалось доказать.

Используя утверждение 2.3 можно сформулировать *третью задачу минимизации*:

$$\begin{aligned}
 &\text{given : } k, \rho_{\text{кр}} \\
 &\text{minimize : } P \text{ in } n \\
 &\text{subject to:} \\
 &\rho_{\text{кр}} = \frac{k}{n} e^{-1} (1 - p_e(k, n, \gamma)), \\
 &\text{где } p_e(n, k, \gamma) = Q \left( \frac{n^{\frac{1}{2}} \log_2(1+\gamma) + \frac{1}{2} \log_2 n - k}{\sqrt{n^{\frac{\gamma}{2}} \frac{\gamma+2}{(\gamma+1)^2} \log_2 e}} \right), \text{ а } \gamma = P
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Рассмотрим ту же систему, но с точки зрения минимизации потребления энергии на бит. В отличие от решения проблемы с точки зрения мощности сигнала, необходимо учитывать среднее количество отправок сообщения  $S$ , совершённое пользовательским устройством до его успешной доставки.

Из написанного ранее следует:

**Следствие 2.1.** *Так как стабильная работа системы обеспечивается при  $\rho < \rho_{\text{кр}}$ , то для рассматриваемой цепи Маркова существует стационарное распределение вероятностей, т.е.*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pr \{M_t = i\} = \pi_i, \tag{2.21}$$

где  $\pi_i$  — стационарная вероятность того, что в системе находится  $i$  пользователей.

Поскольку мы рассматриваем систему с повторными передачами, то эти передачи влияют на энергию, потребляемую пользовательским устройством на передачу одного бита информации. Если передача сообщения повторяется в среднем  $S$  раз, то средняя энергия, затраченная на его отправку, с учётом допущения 2.4 определяется как  $nPS$ . Тогда среднее количество затраченной энергии на бит можно рассчитать по формуле (см. также [57; 58]):

$$\frac{E_b}{N_0} \triangleq \frac{P nS}{2k}. \tag{2.22}$$

Следующая лемма показывает, как определить среднее число  $S$  передач, необходимых для успешной передачи одного сообщения.

**Лемма 2.1.** В стабильной системе (т. е. когда  $\rho < \rho_{Thr}$ ) среднее количество передач на одно сообщение пользовательского устройства (обозначается  $S$ ) для заданного набора параметров  $k, n, G$  можно получить как:

$$S = \frac{kG(1 - \pi_0)}{\rho n}. \quad (2.23)$$

где  $\pi_0$  — вероятность того, что в системе 0 активных пользователей.

**Замечание 2.6.** Прежде чем доказывать лемму, заметим, что значение спектральной эффективности  $\rho$  также влияет на распределение числа активных пользователей в системе, то есть на  $\pi_0$ .

*Доказательство.* Среднее число повторных передач  $S$  можно определить, как следующий предел:

$$S = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N'(T)}{N(T)}, \quad (2.24)$$

— время работы системы,  $N'(T)$  — число отправленных за время  $T$  сообщений включая как успешно, так и не успешно доставленные,  $N(T)$  — число успешно доставленных за время  $T$  сообщений.

Выражение (2.24) может быть записано как:

$$S = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\frac{N'(T)}{T}}{\frac{N(T)}{T}} = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N'(T)}{T}}{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N(T)}{T}}. \quad (2.25)$$

Стоит отметить, что для  $\Lambda < \Lambda_{кр}$  [64]:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N(T)}{T} = \lambda. \quad (2.26)$$

Отметим, что  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N(T)}{T} = \lambda$  — это среднее число передаваемых в канал сообщений в единицу времени, включая как успешные так и не успешные передачи. Покажем, как можно вычислить среднее число передаваемых в канал сообщений на основе стационарного распределения Марковской цепи:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N'(T)}{T} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i j \Pr \left\{ \begin{array}{l} \text{передавало } j \\ \text{пользователей} \end{array} \middle| M = i \right\} \pi_i. \quad (2.27)$$

В соответствии с допущением 2.5 и замечанием 2.4 значение  $\Pr \left\{ \begin{array}{l} \text{передавало } j \\ \text{пользователей} \end{array} \middle| M = i \right\}$  определяется как:

$$\Pr \left\{ \begin{array}{l} \text{передавало } j \\ \text{пользователей} \end{array} \middle| M = i \right\} = C_i^j (q(i))^j (1 - p(i))^{i-j}, \quad (2.28)$$

где  $p(i) = \frac{G}{i}$  — вероятность передачи пользовательским устройством сообщения в канал при условии, что в системе  $i$  активных пользователей (см. допущение 2.6\*).

С учётом (2.28) выражение (2.27) может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N'(T)}{T} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i j C_i^j (p(i))^j (1 - p(i))^{i-j} \pi_i = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \sum_{j=0}^i j C_i^j (p(i))^j (1 - p(i))^{i-j} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Математическое ожидание случайной величины распределенной по биномиальному закону с параметрами  $i$  и  $p(i)$ , то есть среднее число успехов в  $i$  экспериментах, где успех происходит с вероятностью  $p(i)$  [88], следовательно:

$$\sum_{j=0}^i j C_i^j p(i)^j (1 - p(i))^{i-j} = i p(i) \quad (2.30)$$

С учётом того, что  $p(i) = \frac{G}{i}$  можно переписать выражение (2.29):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N'(T)}{T} = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \pi_i \sum_{j=1}^i j C_i^j \left( \frac{G}{i} \right)^j \left( 1 - \frac{G}{i} \right)^{i-j} \right). \quad (2.31)$$

Заметим, что при любом значении  $i$  в соответствии с (2.30):

$$\sum_{j=1}^i j C_i^j \left( \frac{G}{i} \right)^j \left( 1 - \frac{G}{i} \right)^{i-j} = i \frac{G}{i} = G. \quad (2.32)$$

Тогда выражение (2.31) можно записать следующим образом:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N'(T)}{T} = \sum_{i=1}^{\infty} G \pi_i = G \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i. \quad (2.33)$$

Так как:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1. \quad (2.34)$$

Выражение (2.33) с учётом (2.34) можно записать в следующем виде:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N'(T)}{T} = G(1 - \pi_0). \quad (2.35)$$

Если выполняется условие, что  $\Lambda < \Lambda_{\text{кр}}$ , тогда из выражений (2.25), (2.26) и (2.35) следует, что среднее число передач вычисляется по следующей формуле:

$$S = \frac{G(1 - \pi_0)}{\Lambda}. \quad (2.36)$$

Учитывая (2.1) получим выражение  $S = \frac{kG(1-\pi_0)}{\rho n}$ , что и требовалось доказать.

**Утверждение 2.4.** *Если задано количество отсчётов  $n$ , количество бит  $k$ , передаваемых пользователем, и некоторое значение  $\frac{E_b}{N_0}$ , тогда критическую спектральную эффективность можно найти как решение уравнения относительно  $\rho_{\text{кр}}$ :*

$$\rho_{\text{кр}} = \frac{k}{n} G e^{-G} (1 - p_e(k, n, \gamma)), \quad (2.37)$$

$$\text{где } p_e(n, k, \gamma) = Q\left(\frac{n^{\frac{1}{2}} \log_2(1+\gamma) + \frac{1}{2} \log_2 n - k}{\sqrt{n^{\frac{\gamma}{2}} \frac{\gamma+2}{(\gamma+1)^2} \log_2 e}}\right), \text{ а } \gamma = 2 \frac{E_b}{N_0} \frac{\rho_{\text{кр}}}{G}.$$

*Доказательство.* В соответствии с формулой (2.22) и полученным средним числом передач  $S$  (см. лемма 2.1) можно записать следующее:

$$\begin{aligned} \frac{E_b}{N_0} &\triangleq \frac{PnS}{2k} = \frac{Pn k G (1 - \pi_0)}{2k \rho n} = \\ &= \frac{PG(1 - \pi_0)}{2\rho}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Тогда

$$P = 2 \frac{E_b}{N_0} \frac{\rho_{\text{кр}}}{G(1 - \pi_0)}. \quad (2.39)$$

Ясно, что если  $\rho \uparrow \rho_{\text{кр}}$ , то  $\pi_0 \downarrow 0$ , то из леммы 2.1 следует:

$$\lim_{\rho \uparrow \rho_{\text{кр}}} S = \frac{kG}{n\rho_{\text{кр}}}. \quad (2.40)$$

Используя формулы (2.38) и (2.40), можем заключить, что

$$\lim_{\rho \uparrow \rho_{\text{кр}}} P = 2 \frac{E_b}{N_0} \frac{\rho_{\text{кр}}}{G}. \quad (2.41)$$

Принимая во внимание значение  $P$  из выражения (2.41) и замечание 2.3, отметим, что в данном случае с учётом повторных передач  $\gamma = P = 2 \frac{E_b}{N_0} \frac{\rho_{кр}}{G}$ . Учитывая выражение (2.19) из доказательства утверждения 2.3 (отметим, что в данном случае найти значение  $G$  максимизирующее спектральную эффективность сложнее, чем при рассмотрении мощности передаваемого сигнала) и написанное ранее, получим запись (2.37), что и требовалось доказать.

В соответствии с утверждением 2.4 можно сформулировать *четвёртую задачу минимизации* (при заданном количестве передаваемых информационных бит  $k$  и требуемой максимальной спектральной эффективности  $\rho_{кр}$  необходимо определить (среднее) минимальное значение  $\frac{E_b}{N_0}$  и количество отсчётов  $n$ , при которых система устойчива):

$$\begin{aligned}
 & \text{given : } k, \rho_{кр} \\
 & \text{minimize : } \frac{E_b}{N_0} \text{ in } n \\
 & \text{subject to:} \\
 & \rho_{кр} = \frac{k}{n} G e^{-G} (1 - p_e(k, n, \gamma)), \\
 & \text{где } p_e(n, k, \gamma) = Q \left( \frac{n^{\frac{1}{2}} \log_2(1+\gamma) + \frac{1}{2} \log_2 n - k}{\sqrt{n^{\frac{\gamma}{2}} \frac{\gamma+2}{(\gamma+1)^2} \log_2 e}} \right), \text{ а } \gamma = 2 \frac{E_b}{N_0} \frac{\rho_{кр}}{G}
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

## 2.5 Нижние границы энергоэффективности системы без наличия повторных передач

В подразделе 2.3 рассматривались две постановки задачи по минимизации: для мощности сигнала ( $P$ ) и энергии на бит  $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$  в системе без наличия повторных передач. При анализе использовалась граница достижимости для вероятности ошибки декодирования при заданном числе отсчётов  $n$ , числе передаваемых бит в сообщении  $k$  и  $P$  или  $\frac{E_b}{N_0}$ . В данном подразделе определим нижнюю границу для затрат  $P$  и  $\frac{E_b}{N_0}$  для системы без повторов.

Для этого рассмотрим следующий предельный переход:

- число передаваемых бит  $k \rightarrow \infty$ ;
- число отсчётов  $n \rightarrow \infty$ ;
- при этом скорость кодово-модуляционной схемы определяется как  $R = \frac{k}{n}$



**Утверждение 2.5.** В соответствии с замечанием 1.5  $\gamma = P$ . Тогда согласно теореме Шеннона (прямая теорема кодирования) существует такая кодово-модуляционная схема  $A$  со скоростью  $R$ , такая, что вероятность ошибки декодирования  $P_e$  может быть сколь угодно мала ( $P_e(A, n, k, P) \rightarrow 0$ ), если выполняется неравенство:

$$R < \frac{1}{2} \log_2 (1 + P). \quad (2.43)$$

Если неравенство (2.43) не выполняется, то согласно теореме Шеннона (обратная теорема кодирования) вероятность ошибки декодирования ( $P_e(A, n, k, P) \rightarrow 1$ ).

Введём следующее утверждение.

**Утверждение 2.6.** Существует такая кодово-модуляционная схема со скоростью  $R$ , такая, что вероятность доставки определяется как

$$P_d = e^{-\frac{\rho}{R}}, \quad (2.44)$$

где  $R < \frac{1}{2} \log_2 (1 + P)$

*Доказательство.* Согласно утверждению 2.1 (см. доказательство формула (2.4)) с учётом предельного перехода ( $k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, R = \frac{k}{n}$ ) получим:

$$P_d = e^{-\frac{\rho}{R}} (1 - P_e(A, n, k, P)). \quad (2.45)$$

Исходя из замечания 2.5 и (2.45):

$$P_d = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty \\ R = \frac{k}{n}}} e^{-\frac{\rho}{R}} (1 - P_e(A, n, k, P)) = \begin{cases} e^{-\frac{\rho}{R}}, & \text{если выполняется (2.43)} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}. \quad (2.46)$$

Из (2.46) следует утверждение 2.6, что и требовалось доказать.

**Утверждение 2.7.** Пусть заданы спектральная эффективность  $\rho$  и вероятность доставки  $P_d$ , тогда минимальное значение  $R$  вычисляется как

$$R > 2^{-\frac{2\rho}{\ln(P_d)}} - 1. \quad (2.47)$$

*Доказательство.* Выберем значение  $R$ , которое удовлетворяет неравенству (2.43) и выразим из него  $P$  проведя ряд преобразований:

$$\begin{aligned} R < \frac{1}{2} \log_2 (1 + P) &\Rightarrow 2R < \log_2 (1 + P) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2^{2R} < 1 + P \Rightarrow P > 2^{2R} - 1. \end{aligned} \quad (2.48)$$

С другой стороны, для обеспечения вероятности доставки  $P_d$  должно выполняться равенство (2.44) из утверждения 2.6. С учётом этого определим необходимое значение скорости  $R$ :

$$P_d = e^{-\frac{\rho}{R}} \Rightarrow \ln(P_d) = -\frac{\rho}{R} \Rightarrow R = -\frac{\rho}{\ln(P_d)}. \quad (2.49)$$

Подставив результат (2.49) в (2.48) получим формулу (2.47), что и требовалось доказать.

Утверждение 2.7 позволят определить нижнюю границу для мощности сигнала в системе без повторных передач при заданной спектральной эффективности  $\rho$  и вероятности доставки  $P_d$ .

Теперь введём утверждение для вычисления нижней границы затрат энергии на бит  $\frac{E_b}{N_0}$  в системе без повторных передач.

**Утверждение 2.8.** Пусть заданы спектральная эффективность  $\rho$  и вероятность доставки  $P_d$ , тогда минимальное значение  $P$  вычисляется как

$$\frac{E_b}{N_0} > \frac{2^{-\frac{2\rho}{\ln(P_d)}} - 1}{-\frac{2\rho}{\ln(P_d)}}. \quad (2.50)$$

*Доказательство.* Из выражения (2.2) следует, что  $P = 2^{\frac{k}{n} \frac{E_b}{N_0}}$ . Учитывая это и предельный переход ( $k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, R = \frac{k}{n}$ ) утверждение 2.6 для  $\frac{E_b}{N_0}$  может быть переписано как:

$$P_d = e^{-\frac{\rho}{R}}, \quad (2.51)$$

где

$$R < \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + 2R \frac{E_b}{N_0} \right). \quad (2.52)$$

Выразим  $\frac{E_b}{N_0}$  из (2.52):

$$\begin{aligned} R < \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + 2R \frac{E_b}{N_0} \right) &\Rightarrow 2^{2R} < \frac{E_b}{N_0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{E_b}{N_0} > \frac{2^{2R}}{1+2R} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Принимая в расчёт то, что должна обеспечиваться вероятности доставки  $P_d$ , следовательно, аналогично доказательству утверждения 2.7 (см. формулу (2.49)  $R = -\frac{\rho}{\ln(P_d)}$ ). Подставив в (2.53) получим выражение (2.8), что и требовалось доказать.

## 2.6 Нижние границы энергоэффективности для стабильной системы с повторными передачами

В подразделе 2.4 рассматривались две постановки задачи по минимизации для мощности сигнала ( $P$ ) и энергии на бит  $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$  в системе с повторными передачами. Как отмечалось ранее, при анализе  $P$  повторные передачи не влияют на мощность сигнала при решении задачи минимизации. Однако при анализе энергии на бит, повторные передачи оказывают влияние на энергозатраты. Ранее, при анализе использовалась граница достижимости для вероятности ошибки декодирования. В данном подразделе аналогично подразделу 2.5 рассмотрим предельный переход  $(k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, R = \frac{k}{n})$  и определим нижнюю границу для затрат  $P$  и  $\frac{E_b}{N_0}$  для системы с повторными передачами.

**Утверждение 2.9.** При заданном предельном значении спектральной эффективности  $\rho_{кр}$  минимальное значение  $P$  определяется как

$$P > 2^{\frac{2\rho}{e^{-1}}} - 1 \quad (2.54)$$

*Доказательство.* Согласно утверждению 2.3 с учётом предельного перехода  $(k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, R = \frac{k}{n})$  получим:

$$\rho_{кр} = Re^{-1} (1 - p_e(k, n, P)), \quad (2.55)$$

Исходя из замечания 2.5 и (2.55):

$$\rho_{кр} = Re^{-1} (1 - p_e(n, k, P)) = \begin{cases} \frac{1}{2} \log_2 (1 + P) e^{-1} - \varepsilon, & \text{если выполняются (2.43)} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (2.56)$$

где  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Из выражения (2.56) следует, что при выполнении неравенства (2.43) можно записать следующее неравенство:

$$\rho_{\text{кр}} < \frac{1}{2} \log_2 (1 + P) e^{-1}. \quad (2.57)$$

Выразив из (2.57)  $P$ :

$$\begin{aligned} \rho_{\text{кр}} < \frac{1}{2} \log_2 (1 + P) e^{-1} &\Rightarrow \frac{2\rho_{\text{кр}}}{e^{-1}} < \log_2 (1 + P) \Rightarrow \\ \Rightarrow 2^{\frac{2\rho_{\text{кр}}}{e^{-1}}} < 1 + P &\Rightarrow P > 2^{\frac{2\rho_{\text{кр}}}{e^{-1}}} - 1 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Результат (2.58) соответствует неравенству (2.54), что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим утверждение о нижней границе затрат энергии на бит в системе с повторными передачами.

**Утверждение 2.10.** При заданном предельном значении спектральной эффективности  $\rho_{\text{кр}}$  минимальное значение  $\frac{E_b}{N_0}$  с учётом повторных передач определяется как

$$\frac{E_b}{N_0} > \frac{\left(2^{\frac{2\rho_{\text{кр}}}{G e^{-G}}} - 1\right) G}{2\rho_{\text{кр}}} \quad (2.59)$$

*Доказательство.* С учётом выражения (2.41) в доказательстве утверждения 2.4 и выражения (2.19) из доказательства утверждения 2.3 можно записать следующее неравенство:

$$\rho_{\text{кр}} < \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + 2 \frac{E_b}{N_0} \frac{\rho_{\text{кр}}}{G}\right) G e^{-G}. \quad (2.60)$$

Выразим  $\frac{E_b}{N_0}$  из (2.60):

$$\begin{aligned} \rho_{\text{кр}} < \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + 2 \frac{E_b}{N_0} \frac{\rho_{\text{кр}}}{G}\right) G e^{-G} &\Rightarrow \frac{2\rho_{\text{кр}}}{G e^{-G}} < \log_2 \left(1 + 2 \frac{E_b}{N_0} \frac{\rho_{\text{кр}}}{G}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow 2^{\frac{2\rho_{\text{кр}}}{G e^{-G}}} < 1 + 2 \frac{E_b}{N_0} \frac{\rho_{\text{кр}}}{G} &\Rightarrow \frac{E_b}{N_0} > \frac{G \left(2^{\frac{2\rho_{\text{кр}}}{G e^{-G}}} - 1\right)}{2\rho_{\text{кр}}} \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

## 2.7 Примеры численных расчетов задач минимизации энергозатрат при передаче в системах с потенциально неограниченным числом пользовательских устройств

В данном подразделе рассмотрим некоторые численные примеры решения задач поставленных в подразделах 2.3 и 2.4, а так же результаты расчётов нижних границ из подразделов 2.3 и 2.6.

На рисунках 2.1 и 2.2 представлены графики, полученные решением задач минимизации для системы без повторных передач (задачи 1 и 2) при заданной вероятности доставки  $P_d = 0,9$  и некоторых спектральных эффективностях ( $\rho = 0,1$  и  $\rho = 0,12$ ). Графики, отмеченные в легенде как «перерасчет», означают, что задача минимизации была решена по одному из параметров и пересчитана во второй параметр в соответствии с формулой (2.2). Например, на рисунке 2.1 была решена задача 2 для соответствующих параметров и получено значение  $\frac{E_b}{N_0}$ , которое за тем было пересчитано в мощность сигнала  $P$  в соответствии с отношением (2.2). Нижние границы получены в соответствии с выражениями (2.47) (на рис. 2.1) и (2.8) (на рис. 2.2).

Из приведённых зависимостей следует, что в случае увеличения требуемой вероятности доставки, полученные значения границ достижимости, будут также увеличиваться. При этом решение задачи минимизации по мощности сигнала не даёт решения задачи минимизации по потреблению энергии на бит и наоборот. С ростом  $k$  эти различия убывают.

Как видно из графиков, с увеличением количества передаваемых информационных бит в сообщении граница достижимости стремятся к нижней границе. При  $k \rightarrow \infty$  результаты будут эквивалентны. Однако как отмечалось ранее, в системах массовой межмашинной связи в рамках Интернета вещей длина передаваемых сообщений невелика. В соответствии с этим при малых длинах сообщений сформулированные задачи позволяют точнее оценивать предел уменьшения энергозатрат в таких системах. Поставленные ранее задачи можно изменить, минимизируя один из параметров при некотором ограничении на другой (например, ограничить число отсчётов), но такие решения будут лежать выше полученных границ.

На рисунках 2.3 и 2.4 показаны графики, полученные в результате решения всех сформулированных задач минимизации. Результаты представлены при

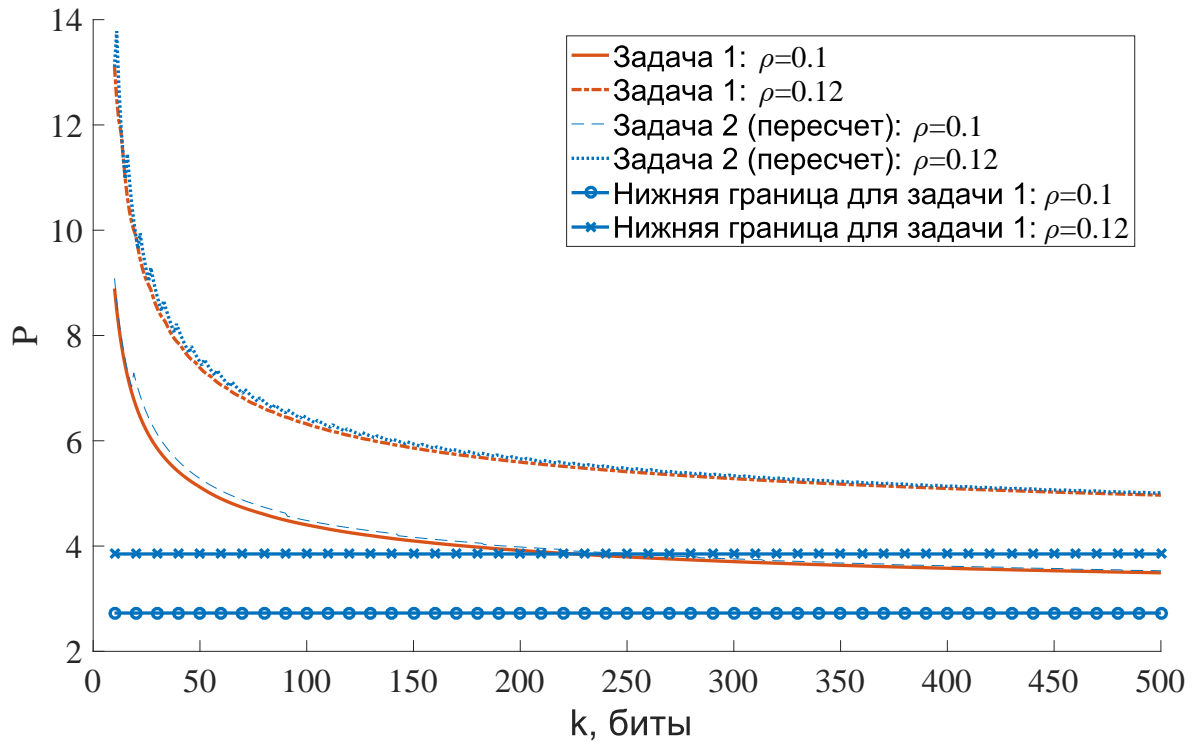


Рисунок 2.1 — Границы достижимости и нижние границы для мощности сигнала  $P$  от  $k$  для задач 1 и 2 при  $P_d=0,9$

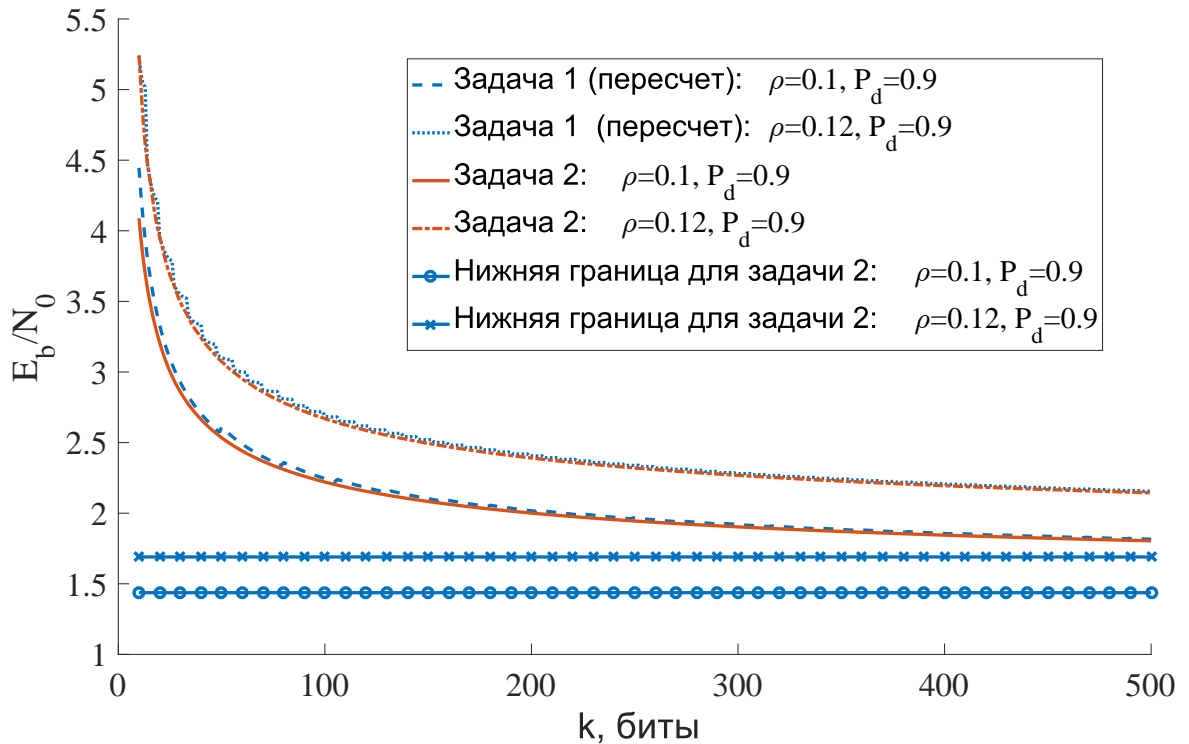


Рисунок 2.2 — Границы достижимости и нижние границы для энергии на бит  $\frac{E_b}{N_0}$  от  $k$  для задач 1 и 2 при  $P_d=0,9$

количестве информационных бит  $k = 50[\text{бит}]$ . Вероятность доставки  $P_d$  для системы без повторов равна 0,65, это значение было выбрано из соображений

удобства шкалы на графиках (для близкого расположения значений и сохранения приемлемого масштаба). Значения с пометкой «пересчет» как и раньше, означает, что задача минимизации решалась по одному из параметров и пересчитывалась для второго параметра в соответствии с:

- формула (2.2) для задач 1 и 2;
- формула (2.41) для задач 3 и 4.

Как отмечалось ранее, при решении задачи для системы с повторными передачами по мощности сигнала  $P_d$  оптимальный (минимизирующий значения при решении задачи) параметр системы  $G$  равен 1. Однако при решении этой задачи по энергии на бит  $\frac{E_b}{N_0}$ , значения этого параметра оказываются ниже 1 и стремятся к данному значению при повышении требуемой спектральной эффективности  $\rho$ . Поэтому, оптимизация параметра  $G$  даёт выигрыш для задачи потребления энергии на бит в системах с повторными передачами. Если этот параметр равен 1 в обеих задачах (задача 3 и 4), их решения дают одинаковые результаты.

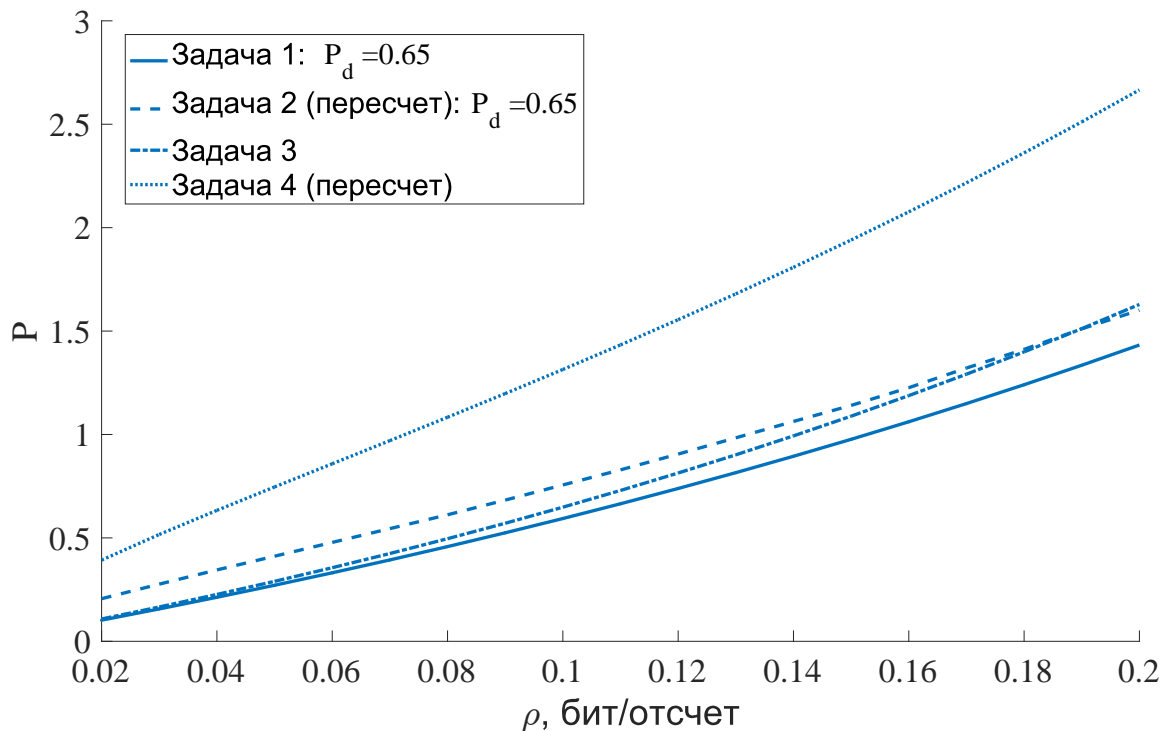


Рисунок 2.3 — Границы достижимости для мощности сигнала  $P$  для всех задач от спектральной эффективности  $\rho$  при числе информационных бит  $k = 50$

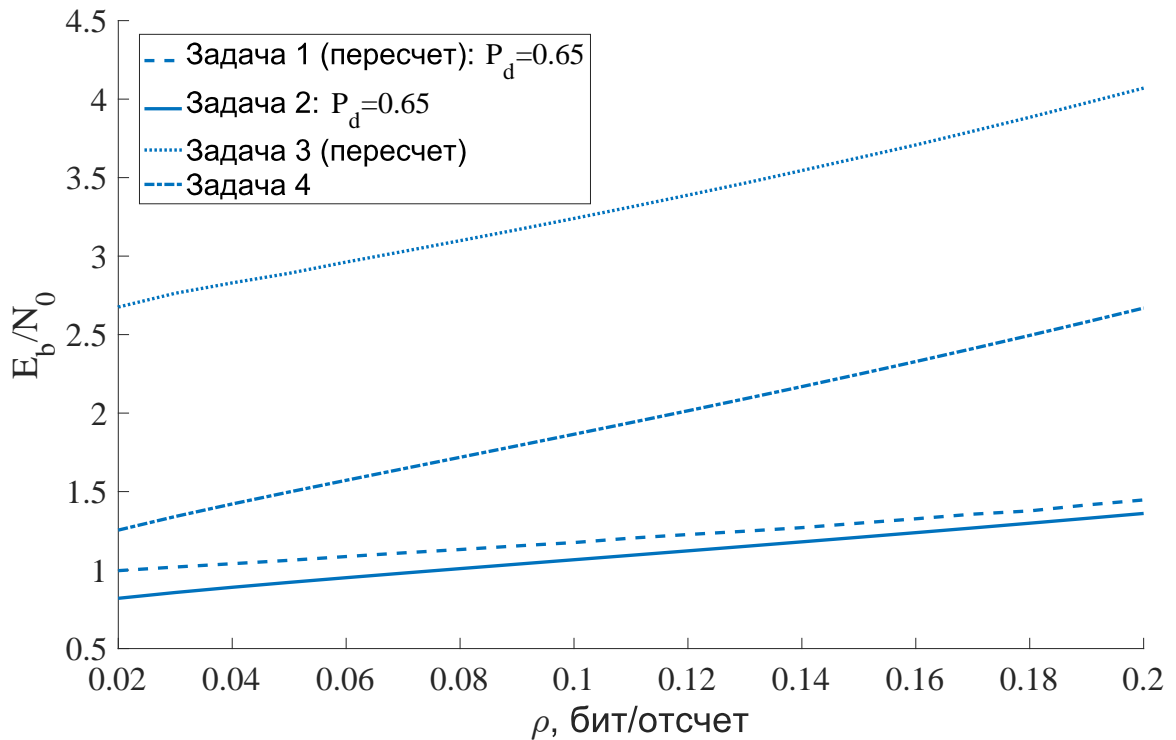


Рисунок 2.4 — Границы достижимости для энергии на бит  $\frac{E_b}{N_0}$  для всех задач от спектральной эффективности  $\rho$  при числе информационных бит  $k = 50$

Также можно отметить, что из графиков видно, что разница между прямым решением задачи и пересчётом из решения смежной задачи растёт с увеличением спектральной эффективности.

На рисунке 2.5 представлены следующие результаты: верхние границы для спектральной эффективности рассматриваемой системы с повторными передачами при параметре  $G = 1$  и  $G_{opt}$  от энергии на бит; границы достижимости при для спектральной эффективности рассматриваемой системы с повторными передачами при параметре  $G = 1$  и  $G_{opt}$  от энергии на бит; результаты расчёта верхней границы для спектральной эффективности системы с одним пользователем по формуле Шеннона, а так же граница затрат энергии на бит, определяемая пределом Шеннона. Как видно из представленных результатов применение алгоритма случайного множественного доступа типа ALOHA уменьшает значения спектральной эффективности, которая может быть достигнута при одинаковых значениях затрат энергии на бит, по сравнению с системой для одного пользователя. Полученные результаты показывают, что для обеспечения устойчивой работы в системе случайного доступа при  $G = 1$  требуется увеличить затраты энергии на бит не менее чем на 4,32дБ по сравнению с пределом Шеннона (для одного источника и одного получателя). При этом изменение



параметра  $G$  может позволить увеличить полученные границы, однако значения средней задержки в системе при этом могут вырасти.

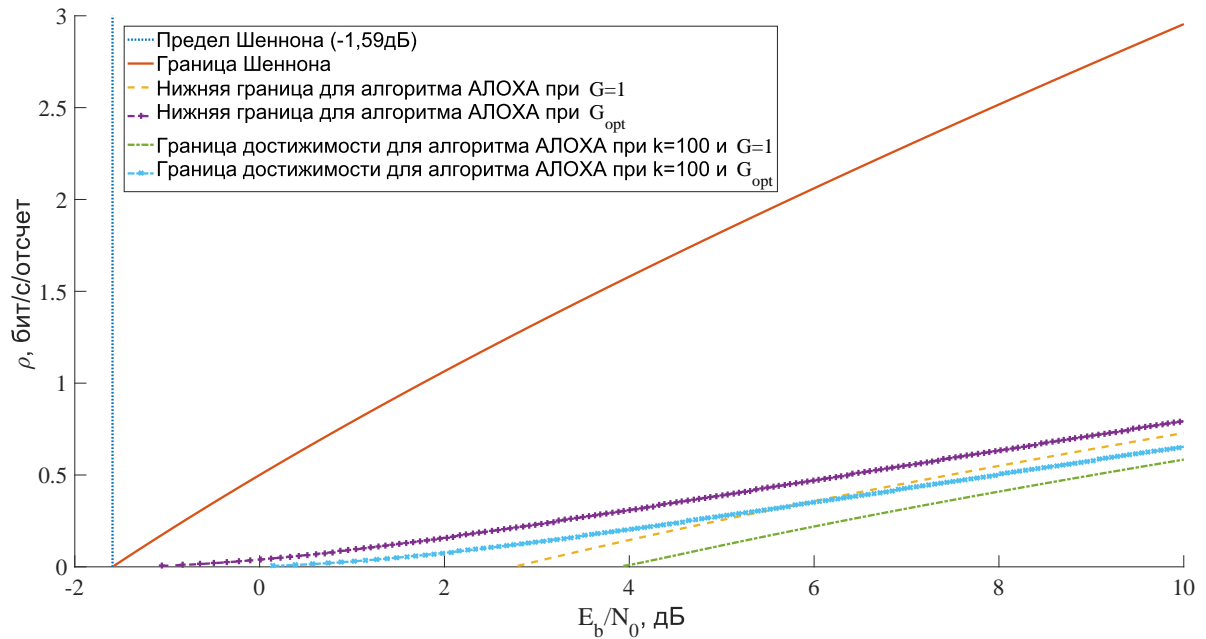


Рисунок 2.5 — Верхние границы и границы достижимости для спектральной эффективности системы случайного доступа с повторными передачами и для системы с одним пользователем

## 2.8 Анализ влияния дополнительных ограничений по средней задержке на энергоэффективность

В предыдущем подразделе были приведены примеры численного решения сформулированных задач. Было отмечено, что задачи могут быть переформулированы с введением дополнительных ограничений. В текущем подразделе рассмотрим такой подход, введя ограничение на задержку в системе. Данный подход будет показан на примере системы без повторных передач при минимизации энергии на бит (так как при рассмотрении аналогичной задачи по мощности сигнала, решение будет вырожденным). Введение такого ограничения для системы с повторными передачами возможно, однако ввиду случайного процесса передачи (пользователь отправляет сообщение с некоторой вероятностью) и возможных повторных отправок, расчёт такой задачи минимизации является трудновычислимым.

Пусть установлен предел максимальной задержки  $d$  [отсчётов] при отправке сообщения. Следуя рассмотренному алгоритму и системе допущений, ограничение на задержку вносит ограничение на количество отсчётов  $n$  в окне. Поскольку пользовательское устройство начинает передачу только в начале следующего окна, то с момента появления сообщения у пользователя до момента, когда его передача будет завершена, пройдет не более  $2n$  окон, где  $n$  - количество отсчётов в окне:

$$n \leq \frac{d}{2} \quad (2.61)$$

Учитывая утверждение 2.2 и ограничение (2.61) при заданных значениях  $k$ ,  $\rho$ ,  $P_d$ , необходимо решить следующую задачу (аналогично формулировке второй задачи, но с учётом нового ограничения):

$$\begin{aligned} & \text{given : } k, \rho, P_d \\ & \text{minimize : } \frac{E_b}{N_0} \text{ in } n \\ & \text{subject to:} \\ & \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq n \leq \frac{d}{2} \\ (e^{-\rho \frac{n}{k}} (1 - p_e(k, n, \gamma))) \geq P_d \end{array} \right. \quad . \quad (2.62) \end{aligned}$$

где  $p_e(n, k, \gamma) = Q\left(\frac{n \frac{1}{2} \log_2(1+\gamma) + \frac{1}{2} \log_2 n - k}{\sqrt{n \frac{\gamma}{2} \frac{\gamma+2}{(\gamma+1)^2} \log_2 e}}\right)$ , а  $\gamma = \frac{2k}{n} \frac{E_b}{N_0}$

Далее будет приведён ряд аргументов, на основании которых дополнительно будет указан путь к численному решению этой задачи.

Непосредственно из определения функции  $p_e(k, n, \gamma)$  [57], справедливо следующее. Функция  $p_e(k, n, \gamma)$  при заданных значениях параметров  $k$  и  $n$  монотонно убывает с увеличением  $\frac{E_b}{N_0}$  (т.к.  $\gamma = \frac{2k}{n} \frac{E_b}{N_0}$ ) и  $\lim_{\frac{E_b}{N_0} \rightarrow \infty} \left(p_e\left(k, n, \frac{2k}{n} \frac{E_b}{N_0}\right)\right) = 0$ .

Пусть зафиксированы  $k$ ,  $n$ ,  $\rho$ ,  $P_d$ . Для  $\frac{E_b}{N_0}$  введём следующее уравнение:

$$P_d - e^{-\rho \frac{n}{k}} (1 - p_e(k, n, \gamma)) = 0. \quad (2.63)$$

Рассмотрим уравнение (2.63) в предположении, что  $\frac{E_b}{N_0} \rightarrow \infty$  при этом, как написано ранее  $p_e(k, n, \gamma) = 0$ . С учётом этого уравнение (2.63) принимает следующий вид:

$$P_d - e^{-\rho \frac{n}{k}} = 0 \quad (2.64)$$

Уравнение (2.64) при фиксированных значениях  $k$ ,  $\rho$ ,  $P_d$  имеет следующее решение по  $n$ , которое будет максимальным:

$$n_{max} = -\frac{k \ln(P_d)}{\rho} \quad (2.65)$$

Поскольку функция  $e^{-\rho \frac{n}{k}}$  уменьшается от параметра  $n$ . Для  $n > n_{max}$  неравенство  $P_d > e^{-\rho \frac{n}{k}}$  допустимо, но вероятность доставки в системе окажется ниже, чем требуется. Следовательно, для любого значения  $\frac{E_b}{N_0}$  уравнение (2.63) не имеет решения, если  $n > n_{max}$ .

Поскольку значение  $e^{-\rho \frac{n}{k}}$  при фиксированных  $k$ ,  $n$ ,  $\rho$  является постоянным и  $(1 - p_e(k, n, \gamma))$  монотонно возрастающая функция от параметра  $\frac{E_b}{N_0}$ , то верно следующее. Функция  $e^{-\rho \frac{n}{k}} (1 - p_e(k, n, \gamma))$  монотонно возрастает от параметра  $\frac{E_b}{N_0}$  при фиксированных  $k$ ,  $n$ ,  $\rho$ .

Непосредственно из написанного ранее следует обоснованность того факта, что если  $n < n_{max}$ , уравнение (2.63) имеет один корень.

**Замечание 2.7.** В соответствии с написанными выше рассуждениями уравнение (2.63) может быть легко решено численно при заданных  $k$ ,  $n$ ,  $\rho$ ,  $P_d$ .

Определим некоторую функцию  $f(k, n, \rho, P_d)$ . Для заданных  $k$ ,  $n$ ,  $\rho$ ,  $P_d$  значение этой функции равно  $\frac{E_b}{N_0}$ , что является решением уравнения (2.63).

**Гипотеза 2.1.** Для фиксированных  $k$ ,  $n$ ,  $\rho$ ,  $P_d$  функция  $f(k, n, \rho, P_d)$  определена в интервале  $[1, n_{max}]$  и имеет один минимум.

Если гипотеза 2.1 верна, то у задачи (2.62) есть один минимум. Этот минимум можно найти численно следующим образом.

Сначала решается следующая задача минимизации, при этом  $n$  рассматривается как непрерывная величина:

$$\begin{aligned} \text{minimize : } & f(k, n, \rho, P_d) \\ \text{subject to : } & 1 \leq n \leq \min\left(\frac{d}{2}, n_{max}\right) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Задача (2.66) может быть решена численно, при этом  $n_{max}$  является наилучшей отправной точкой для поиска решения.

Пусть  $n_x$  будет решением задачи непрерывной задачи минимизации (2.66). Тогда минимальное значение  $\frac{E_b}{N_0}$  для дискретной по  $n$  задачи (2.62) вычисляется следующим образом:

$$\frac{E_b}{N_0} = \min (f(k, \lfloor n_x \rfloor, \rho, P_d), f(k, \lceil n_x \rceil, \rho, P_d)) \quad (2.67)$$

где  $\lfloor n_x \rfloor$  и  $\lceil n_x \rceil$  округляются до ближайшего целого числа вниз и вверх соответственно.

**Замечание 2.8.** Если гипотеза 2.1 неверна, но найденное решение будет неглобальный минимум, и полученная граница достижимости будет выше.

На рисунке 2.6 показаны графики функции  $f(k, n, \rho, P_d)$  от  $n$  для различных значений  $\rho$  и  $k = 100$ . Также проведена линия ограничивающая значение числа отсчетов  $n_{lim}$ , которое определяется заданным ограничением на задержку  $d = 208$  через выражение (2.61). Как видно из рисунка, ограничение не влияет на результат решения задачи (2.62) при  $\rho = 0,12$ . Для  $\rho = 0,1$  ограничение также не влияет на решение задачи, но ограничивает область поиска решения. При  $\rho = 0,08$  ограничение влияет на решение задачи, в соответствии с ограничением области поиска будет найдено решение, не соответствующее глобальному минимуму, и соответствующее ограничению ( $n = 104$ ).

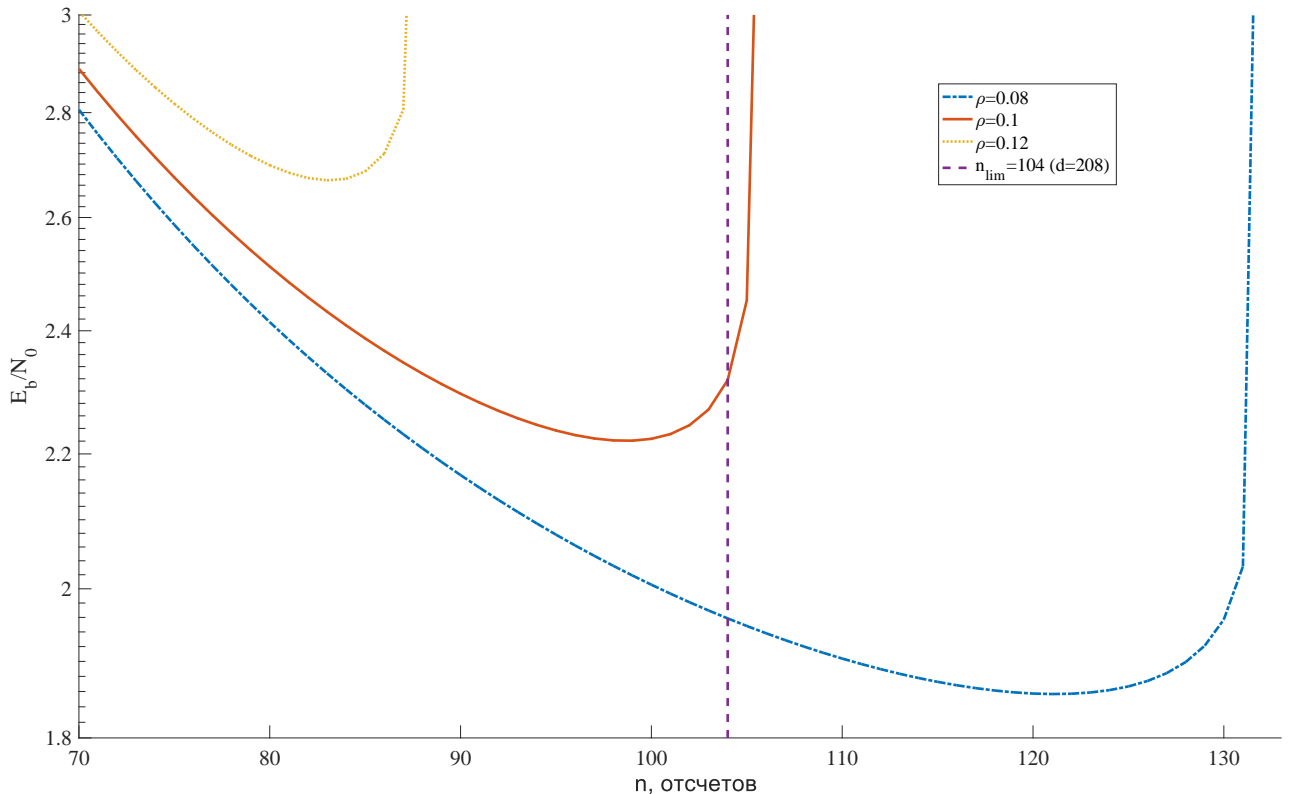


Рисунок 2.6 — Значения функции  $f(k, n, \rho, P_d)$  от  $n$  для разных значений  $\rho$ ,  $k = 100$  и  $P_d = 0,9$

На рисунке 2.7 в виде графиков показаны результаты задачи оптимизации 2.62 с разным количеством информационных бит  $k$  ( $k = 100$  и  $k = 200$ )

при различных ограничениях на задержку  $d$  от спектральной эффективности  $\rho$ . Как видно из рисунка, с введением ограничения на задержку значения  $\frac{E_b}{N_0}$  при малых значениях спектральной эффективности  $\rho$  значения затрат энергии увеличивается. Это связано с тем, что из-за ограничения по задержке мы не можем брать большие значения  $n$ , поэтому возникает необходимость в увеличении затрат энергии на бит для обеспечения решение задачи (2.62). Также видно, что при равных ограничениях задержки ( $d = 208$ ) на передачу  $k = 200$  бит это ограничение влияет гораздо больше, чем при передаче  $k = 100$  бит. Как видно из рисунка с ростом  $k$ , результаты решения задачи приближаются к нижней границе, рассчитанной по формуле (2.8).

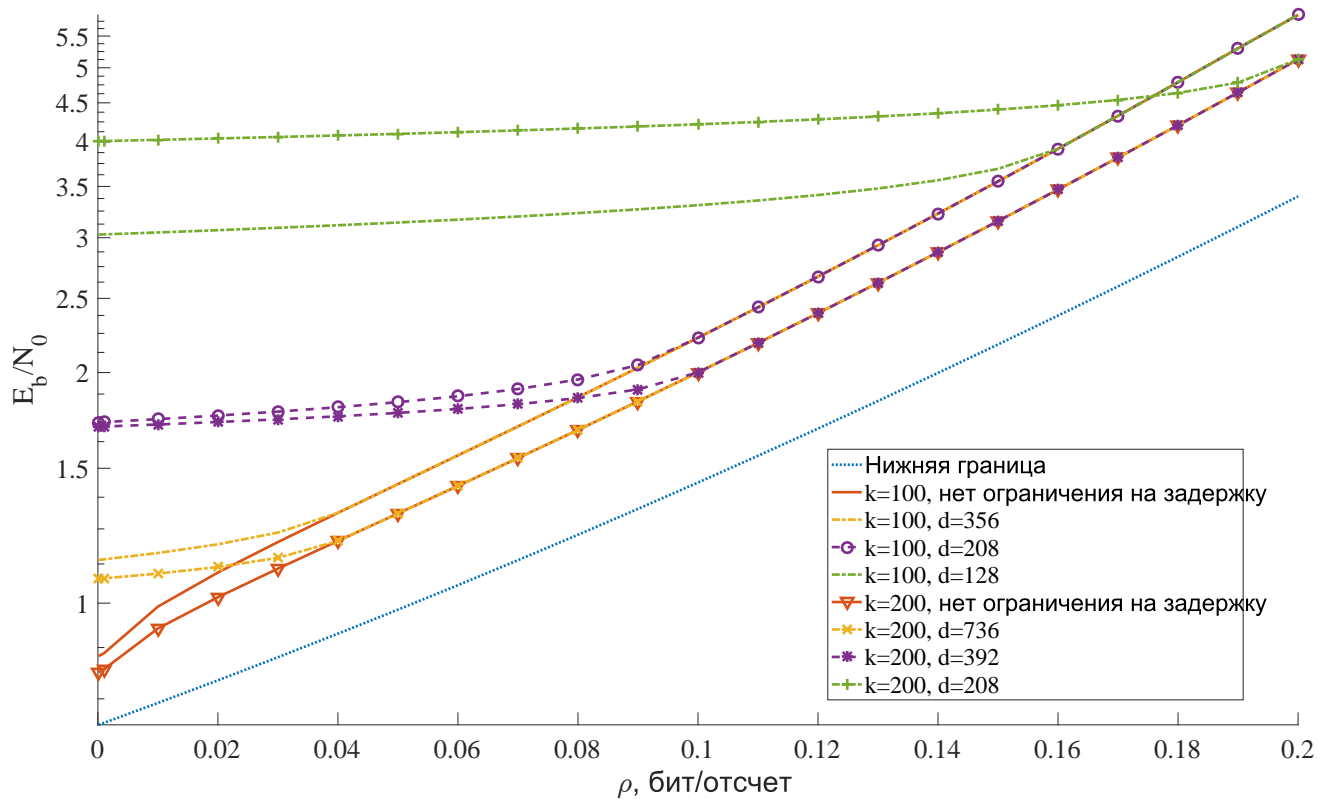


Рисунок 2.7 — Решение задачи оптимизации (2.62) по  $\rho$  для различных значений  $k$ , ограничений  $d$  и  $P_d = 0,9$

Из рассмотренных примеров видно, что не при всех исходных параметрах введение ограничения на задержку может повлиять на решение поставленных задач. Так если значение требуемой задержки выше, чем число отсчётов при глобальном решении задачи минимизации, то в этом случае ограничивается только область поиска, но не решение. Если ограничение влияет на решение задачи, то введённое ограничение может только увеличивать затраты энергии при их решении.

## 2.9 Выводы по главе

В текущем разделе рассматривались два подхода к реализации систем случайного множественного доступа в сценариях межмашинной связи. Оба подхода различаются по наличию/отсутствию канала обратной связи. В канале присутствует аддитивный белый гауссовский шум. Сообщения могут быть декодированы неверно (то есть не доставлены успешно) ввиду двух факторов. Первый — влияние шума канала на сообщение и невозможность исправить возникшие при передаче ошибки. Второй — наложение сообщений от нескольких пользователей, в этом случае предполагается, что все сообщения будут декодированы неверно.

Первая система не имеет обратной связи и, следовательно, в ней отсутствует возможность повторных передач. Поэтому из-за наличия АБГШ и коллизий сообщений нельзя гарантировать доставку сообщения с вероятностью равной 1, а значит, система работает с потерями. Для такой системы важной характеристикой является вероятность доставки сообщения  $P_d$ . В рассматриваемой системе пользовательское устройство отправляет сообщение в начале следующего временного окна передачи после появления сообщения и покидает систему.

Вторая система имеет канал обратной связи, следовательно, есть возможность получать информацию от приемника (например, базовой станции) и принимать решение о необходимости повторной отправки сообщения. В таком случае можно гарантировать доставку сообщений (нет потерь в системе), однако время от появления сообщения до его успешной доставки является случайным. В данной системе пользовательские устройства принимают решение о передаче сообщения в начале каждого окна с некоторой вероятностью и находятся в системе, пока их сообщение не будет успешно доставлено. Вероятность передачи сообщения пользователем в системе зависит от параметра системы  $G$ . Ввиду сказанного ранее в системе могут скапливаться активные пользовательские устройства, вследствие чего возрастает время доставки сообщения. Поэтому для такой системы является важной устойчивая (стабильная) работа (когда задержка доставки сообщения конечна). Можно отметить, что при рассмотрении данной системы число повторных передач может влиять на затраты энергии.

Таблица 2.1 — Сравнение рассматриваемых систем и задач энергоэффективности

Система	без повторных передач		с повторными передачами	
	мощность сигнала $P$	энергия на бит $E_b N_0$	мощность сигнала $P$	энергия на бит $\frac{E_b}{N_0}$
Минимизация энергозатрат				
Наличие потерь сообщений	+	+	-	-
Вероятность доставки сообщения	$P_d$	$P_d$	1	1
Время доставки сообщения	фиксированно и минимально возможное	фиксированно и минимально возможное	случайно	случайно
необходимость учёта повторных передач ( $S$ )	-	-	-	+
параметры и характеристики	$\rho$ спектральная эффективность $n$ число отсчётов в сигнале $k$ число бит в сообщении $P_d$ вероятность доставки $P$ мощность сигнала	$\rho$ спектральная эффективность $n$ число отсчётов в сигнале $k$ число бит в сообщении $P_d$ вероятность доставки $\frac{E_b}{N_0}$ энергия на бит	$\rho$ спектральная эффективность $n$ число отсчётов в сигнале $k$ число бит в сообщении $G$ параметр вероятности отправки $P$ мощность сигнала	$\rho$ спектральная эффективность $n$ число отсчётов в сигнале $k$ число бит в сообщении $G$ параметр вероятности отправки $P$ мощность сигнала $S$ среднее число передач сообщения

Для обеих систем рассматривались вопросы минимизации энергозатрат. При этом есть две задачи: уменьшение мощности передачи сигнала, что может быть обусловлено особенностями проектирования сети и уменьшение затрат энергии на бит, что обуславливается необходимостью продления работы пользовательских устройств от автономных источников питания.

Обобщения ключевых особенностей и различий рассматриваемых систем, а также задач минимизации энергозатрат приводятся в таблице 2.1.

В предыдущих подразделах был описан и доказан ряд утверждений. На их основе сформулированы четыре задачи минимизации. Данные формулировки представлены в таблице 2.2. Решение этих задач позволят найти границы достижимости для энергозатрат в рассматриваемых системах.

В подразделах 2.5 и 2.6 был рассмотрен следующий предельный переход: число передаваемых бит  $k \rightarrow \infty$ , число отсчётов  $n \rightarrow \infty$ , при этом скорость кодово-модуляционной схемы определяется как  $R = \frac{k}{n}$ . С использованием прямой теоремы кодирования были получены нижние границы для энергозатрат. Полученные границы приведены в таблице 2.3.

Были приведены численные примеры решения задач минимизации. При сравнении прямого решения задачи (например, минимизации мощности сигнала  $P$ ) и пересчета результата решения смежной задачи (например, решается задача минимизации энергии на бит  $\frac{E_b}{N_0}$  и её решение переводится в мощность сигнала  $P$ ) было показано, что результат такого пересчета не даёт верного ответа на прямую задачу минимизации. Также показано, что с увеличением

Таблица 2.2 — Формулировка задач минимизации энергозатрат

	Задача минимизации мощности сигнала $P$	Задача минимизации энергии на бит $\frac{E_b}{N_0}$
Система без повторных передач	<i>Первая задача</i> given : $k, \rho, P_d$ minimize : $P$ in $n$ subject to: $P_d = e^{-\rho \frac{k}{n}} (1 - p_e(k, n, \gamma))$ , где $p_e(n, k, \gamma) = Q\left(\frac{n \frac{1}{2} \log_2(1+\gamma) + \frac{1}{2} \log_2 n - k}{\sqrt{n \frac{\gamma}{2} \frac{\gamma+2}{(\gamma+1)^2} \log_2 e}}\right)$ , а $\gamma = P$	<i>Вторая задача</i> given : $k, \rho, P_d$ minimize : $\frac{E_b}{N_0}$ in $n$ subject to: $P_d = e^{-\rho \frac{k}{n}} (1 - p_e(k, n, \gamma))$ , где $p_e(n, k, \gamma) = Q\left(\frac{n \frac{1}{2} \log_2(1+\gamma) + \frac{1}{2} \log_2 n - k}{\sqrt{n \frac{\gamma}{2} \frac{\gamma+2}{(\gamma+1)^2} \log_2 e}}\right)$ , а $\gamma = \frac{2k E_b}{n N_0}$
Система с повторными передачами	<i>Третья задача</i> given : $k, \rho_{кр}$ minimize : $P$ in $n$ subject to: $\rho_{кр} = \frac{k}{n} e^{-1} (1 - p_e(k, n, \gamma))$ , где $p_e(n, k, \gamma) = Q\left(\frac{n \frac{1}{2} \log_2(1+\gamma) + \frac{1}{2} \log_2 n - k}{\sqrt{n \frac{\gamma}{2} \frac{\gamma+2}{(\gamma+1)^2} \log_2 e}}\right)$ , а $\gamma = P$	<i>Четвёртая задача</i> given : $k, \rho_{кр}$ minimize : $\frac{E_b}{N_0}$ in $n$ subject to: $\rho_{кр} = \frac{k}{n} G e^{-G} (1 - p_e(k, n, \gamma))$ , где $p_e(n, k, \gamma) = Q\left(\frac{n \frac{1}{2} \log_2(1+\gamma) + \frac{1}{2} \log_2 n - k}{\sqrt{n \frac{\gamma}{2} \frac{\gamma+2}{(\gamma+1)^2} \log_2 e}}\right)$ , а $\gamma = 2 \frac{E_b \rho_{кр}}{N_0 G}$

Таблица 2.3 — Нижние границы для энергозатрат в системах с повторными передачами и без повторных передач

	Задача минимизации мощности сигнала $P$	Задача минимизации энергии на бит $\frac{E_b}{N_0}$
Система без повторных передач	<i>Первая задача</i> $P > 2^{-\frac{2\rho}{\ln(P_d)}} - 1$	<i>Вторая задача</i> $\frac{E_b}{N_0} > \frac{2^{-\frac{2\rho}{\ln(P_d)}} - 1}{-\frac{2\rho}{\ln(P_d)}}$
Система с повторными передачами	<i>Третья задача</i> $P > 2^{\frac{2\rho_{кр}}{e^{-1}}} - 1$	<i>Четвёртая задача</i> $\frac{E_b}{N_0} > \frac{\left(2^{2\rho_{кр} G} - 1\right) G}{2\rho_{кр}}$

требований к вероятности доставки в системе без повторных передач, возрастают и энергозатраты. С увеличением числа передаваемых бит значения границ достижимости стремятся к нижним границам, так при  $k \rightarrow \infty$  их значения совпадут. Однако для систем межмашинной связи свойственна передача коротких сообщений. Поэтому границы достижимости, получаемые через решение сформулированных задач минимизации, дают более точную оценку возможностей энергозатрат в таких системах. Также было продемонстрировано, что изменение параметра системы  $G$ , влияющего на вероятность отправки сообщения пользовательским устройством, позволяет уменьшить значения для границ достижимости в системах с повторными передачами.



При сравнении системы случайного множественного доступа на базе алгоритма ALOHA при потенциально бесконечном числе пользовательских устройств с системой при одном передающем пользовательском устройстве было показано, что для обеспечения устойчивой работы в системе случайного доступа требуется увеличить затраты энергии на бит не менее чем на 4,32дБ по сравнению с пределом Шеннона (для сценария с одним источником и одним получателем).

На примере системы без повторных передач при минимизации энергии на бит было показано влияние введения дополнительных ограничений на энергоэффективность системы. Для этого в систему вводилось ограничение на задержку. Полученные результаты демонстрируют, что введение дополнительных ограничений не уменьшает значения границ достижимости и приводит к повышению энергозатрат в системе.

## **Глава 3. Методы гибридной обратной связи в системах с потенциально неограниченным числом пользовательских устройств**

### **3.1 Вводные замечания**

В предыдущем разделе рассматривался вопрос энергоэффективности систем случайного доступа в канал при наличии шумов. Рассматривались два подхода к организации системы. В первом случае отсутствует канал обратной связи и возможность повторной отправки сообщений от пользовательских устройств. Во втором случае имеется канал обратной связи и присутствует возможность повторных отправок сообщения при получении информации о неудачной попытке передачи сообщения.

В современных системах связи при наличии обратного канала для повышения характеристик системы могут применяться методы гибридной обратной связи. Так в работах [56; 89; 90] рассматривается возможность повышения скорости передачи данных в системах с решающей обратной связью за счёт различных методов, например, изменения параметров помехоустойчивых кодов в процессе работы системы. В текущем разделе будет проведен обзор основных подходов использования решающей обратной связи, показаны методы оценки эффективности таких методов и выбран подход, который может быть применён в системах случайного доступа для повышения предельной интенсивности потока, при котором система остаётся стабильной, или для снижения затрат энергии.

### **3.2 Выбор методов гибридной обратной связи для снижения энергозатрат в стабильных системах случайного множественного доступа**

Существуют два основных подхода к использованию канала обратной связи. В первом подходе решение о повторной передаче принимается приёмником (базовой станцией), например, основываясь на оценке надёжности принятого со-

общения или на основе контрольной суммы, передаваемой вместе с сообщением. Такие системы называются системами с решающей обратной связью (РОС) или с автоматическим запросом повторной передачи (англ. термин для таких систем ARQ — Automatic Repeat reQuest). Во втором подходе, решение о повторной передаче принимает сам передатчик, основываясь на информации, полученной по обратному каналу (например, некоторого условного ответа, вычисленного на основе принятого приёмником сигнала). Такие системы называются системами с информационной обратной связью. Помимо систем, основанных на описанных подходах, так же существуют смешенные системы или системы со сложной обратной связью, в которых могут использоваться оба подхода [91—93].

Идея схемы гибридной решающей обратной связи (ГРОС, англ. HARQ — Hybrid Automatic Repeat reQuest) заключается в комбинировании метода обнаружения ошибок схемы РОС с методами исправления ошибок помехоустойчивого кодирования. Для достижения данной цели передатчик выполняет следующие функции:

- добавление к передаваемому сообщению контрольной суммы (КС), которая, например, может быть вычислена с использованием избыточного циклического кода (англ. CRC — Cyclic Redundancy Check);
- кодирование полученных данных помехоустойчивым кодом (свёрточные коды, турбо-коды, коды с малой плотностью проверок на чётность и др.);
- передача данных в соответствии с выбранной модуляцией;
- ожидание квитанции. При получении положительной квитанции (АСК — Acknowledge) начинается передача следующего сообщения, при отрицательной квитанции (NACK — negative-acknowledgement) повторяется передача текущего сообщения.

Приёмник выполняет следующие функции:

- приём сообщения в соответствии с выбранной модуляцией;
- декодирование помехоустойчивого кода с исправлением ошибок;
- проверка контрольной суммы;
- передача по обратному каналу связи квитанции. В случае корректности контрольной суммы отправляется положительная квитанция. Если контрольная сумма не корректна, то передаётся отрицательная квитанция, а также полученное при текущем приёме сообщение может быть записано в буфер для повышения надёжности последующего декодирования.

Таблица 3.1 — Виды гибридной решающей обратной связи и работа устройств

№ Типа	Название типа	Работа передатчика	Работа приемника
1	РОС (ARQ)	Передаётся одно и то же сообщение,	Неверно принятые сообщения удаляются.
2	ГРОС с комбинированием по Чейзу (HARQ - Chase Combining)	пока не будет получена положительная квитанция;	Неверно принятые сообщения сохраняются в буфер и используются для улучшения декодирования последующих повторных передач.
3	ГРОС с наращиваемой избыточностью (HARQ – Incremental Redundancy)	При передаче может передаваться используется помехоустойчивый код с выбранной скоростью. не всё сообщение, а его фрагмент; скорость кода может меняться.	

Таблица 3.2 — Особенности работы рассматриваемых типов гибридной решающей обратной связи

№ типа связи	Особенности работы типа связи
1	не требуется наличия буфера;  не используется информация, содержащаяся в неверно принятых сообщениях.
2	требует наличия буфера;  используется информация, содержащаяся в неверно принятых сообщениях;  имеет низкую скорость передачи в областях относительно больших соотношений сигнал/шум;  сохраненные в буфере неверно принятые сообщения используются при декодировании за счёт комбинирования по Чейзу, что может быть рассмотрено как накопление энергии полезного сигнала[102].
3	требуется наличие буфера;  используется информация, содержащаяся в неверно принятых сообщениях;  имеет низкую скорость передачи в областях низких и средних соотношений сигнал/шум.

По способу использования в системе неверно принятых копий сообщения, то есть содержащих ошибки после процедуры декодирования помехоустойчивого кода, можно выделить несколько типов ГРОС. Рассматриваемые типы ГРОС, а также их особенности приведены в таблицах 3.1 и 3.2. [56; 93–101].

Реализация третьего типа связи может быть выполнена следующим образом. В системе используется семейство кодов, работающих в режиме переменных скоростей ( $R_1 > R_2 > \dots R_n$ ). При первой передаче отправляется сообщение, содержащее данные и первую часть проверочных бит (для скорости  $R_1$ ). При повторных передачах отправляются дополнительные части проверочных бит (происходит переход к скорости  $R_2$ , затем  $R_3$  и т.д.) [93; 103–106].

Опишем модель системы с замираниями и АБГШ, а также проведём сравнение описанных подходов к ГРОС.

**Определение 3.1.**  $\eta$  — спектральная эффективность, которая позволяет оценить эффективность использования частотного ресурса системы передачи. Данная характеристика представляет собой отношение скорости передачи информации ( $R$  [бит/с]) к ширине полосы пропускания ( $W$  Гц). Чем выше данный показатель, тем лучше используется частотный ресурс.

**Замечание 3.1.** В предыдущем разделе вводился параметр спектральной эффективности (см. (2.1)), определяемый как бит/отсчёт. Данные характеристики являются эквивалентными, с учётом того, что по теореме Котельникова количество отсчётов в два раза превышает частоту.

Рассмотрим метод верхней оценки спектральной эффективности. Структурная схема системы с ГРОС при наличии в канале медленных Релеевских замираний и аддитивного белого гаусовского шума, приведена на рисунке 3.1 [107].

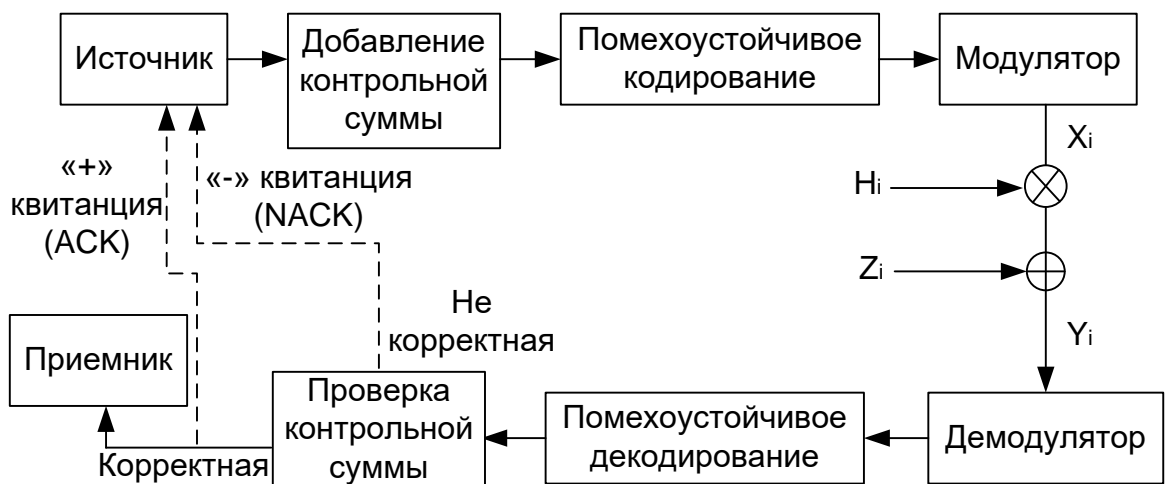


Рисунок 3.1 — Модель системы передачи с обратной связью.

Пусть на выходе модулятора при  $i$ -ой передаче сообщения формируется сигнал  $X_i$ , тогда сигнал, принимаемый на входе демодулятора, с учётом обеснований из [95; 97], и замечания 1.5 (см. раздел 2.2) определяется как

$$Y_i = H_i X_i + Z_i, \quad (3.1)$$

где при  $i$ -той передаче,  $Y_i$  — принятый сигнал,  $X_i$  — передаваемый сигнал с мощностью  $P$  (совпадающей с отношением сигнал/шум, см. замечание 1.5),  $H_i$  — передаточный коэффициент канала определяемый медленными Рэлеевскими замираниями,  $Z_i$  — аддитивный белый гауссовский шум, а  $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ .

Передаточный коэффициент канала определяется как [95; 97]:

$$H_i = \sqrt{a_{i,1}^2 + a_{i,2}^2}, \quad (3.2)$$

где  $a_{i,1}^2$  и  $a_{i,2}^2$  распределены по нормальному закону ( $a_{i,1}^2, a_{i,2}^2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ ).

С учётом замечаний из работ [56; 95] введём ряд допущений.

**Допущение А.** Для обнаружения ошибок декодирования используется контрольная сумма, при этом приёмник всегда обнаруживает ошибки.

**Допущение В.** Положительные и отрицательные квитанции передаются по обратному каналу, при этом ошибок в обратном канале нет.

**Допущение С.** Известна мощность сигнала  $P$  в прямом канале при равенстве единице передаточного коэффициента канала  $|H_i|^2 = 1$ .

**Допущение D.** Передача осуществляется с использованием помехоустойчивого кода достаточной длины со скоростью кода  $R$ , которая выбирается в соответствии с формулой (в предыдущем разделе вводилось аналогичное выражение для дискретного канала, см. замечание 2.5)

$$R < C = W \log(1 + \gamma),$$

где  $R$  — скорость кода,  $C$  — пропускная способность канала,  $W$  — используемая полоса частот,  $P$  — мощность сигнала.

**Допущение F.** Коэффициент передачи канала  $H_i$  постоянен на протяжении всего времени передачи  $i$ -го сообщения.

**Замечание 3.2.** Значение пропускной способности канала при  $i$ -й передаче можно определить как  $C_i = W \log(1 + P_i)$ , где  $P_i = P|H_i|^2$ .

**Замечание 3.3.** Ошибка декодирования при  $i$ -ой передаче происходит, когда  $R \geq C_i$  и, в соответствии с допущением  $A$ , всегда обнаруживается.

Для всех типов систем с гибридной решающей обратной связью в качестве критерия эффективности системы примем спектральную эффективность  $\eta$  [56; 95; 96]:

$$\eta = \frac{R}{WM[S]}, \quad (3.3)$$

где  $W$  — используемая полоса частот,  $M[S]$  — среднее количество передач одного сообщения, определяемое по формуле [56; 95]:

$$M[S] = \sum_{s=1}^{\infty} s Pr\{S = s\}, \quad (3.4)$$

где  $Pr\{S = s\}$  — вероятность того, что для успешной доставки сообщения потребуется  $s$  передач, которая определяется как

$$Pr\{S = s\} = P_e(s-1) - P_e(s), \quad (3.5)$$

где  $P_e(s-1)$  и  $P_e(s)$  — вероятности того, что  $(s-1)$  и  $s$  передач не были успешными.

Для определения максимальной спектральной эффективности необходимо определить вероятность ошибки при  $s$  передачах.

Используя принятые допущения и указанные замечания, вероятность ошибки при передаче можно определить как [91]

$$P_e = Pr\{R \geq W \log(1 + P)\} \quad (3.6)$$

В таблице 3.3 на основе работ [91; 92] приведены формулы для нахождения вероятности ошибки при  $s$  передачах для описанных ранее типов ГРОС.

Формулы, приведённые в таблице 3.3, могут быть объяснены следующим образом:

- для первого типа ГРОС все повторные передачи независимы [91; 92];
- для ГРОС второго типа комбинирование по Чейзу соответствует накоплению энергии сигнала [56; 92; 98];

Таблица 3.3 — Определение вероятности события, что  $s$  передач были не успешными для ГРОС

№ типа	Правило расчёта для $P_e(s)$
1	$\prod_{i=1}^s Pr \{R \geq W \log(1 + P_i)\}$
2	$Pr \left\{ R \geq W \log \left( 1 + \sum_{i=1}^s P_i \right) \right\}$
3	$Pr \left\{ R \geq W \sum_{i=1}^s \log(1 + P_i) \right\}$

- для ГРОС третьего типа предполагается, что передатчику заранее известно состояние канала и передача осуществляется с максимальной возможной скоростью кода [56; 92].

Исходя из вышесказанного, максимальную спектральную эффективность передачи для заданного типа системы с решающей обратной связью можно определить по следующей методике: 1) по формуле из таблицы 3.3 для заданного типа ГРОС, определяются вероятности событий, что  $s$  передач были не успешными с использованием метода Монте-Карло; 2) По формуле (3.3) вычисляется спектральная эффективность.

Так можно определить метод расчёта спектральной эффективности, выбранной в качестве критерия оценки системы. Исходя из всего вышесказанного, второй подход к реализации гибридной решающей обратной связи (ГРОС с комбинированием по Чейзу) может быть применён в системах случайного доступа. Выбор обусловлен следующим:

- *Второй* и третий тип связи используют информацию из повреждённых сообщений, тем самым повышая вероятность последующего декодирования сообщения (см. таблицы 3.1 и 3.3);
- Первый и *второй* тип всегда передают сообщения одинаковой длины (число отсчётов, т.е. нет перемены длин и скоростей) (см. таблицу 3.1, что удобно при организации канала случайного доступа.
- *Второй* тип более эффективен при больших значениях шума и значительных изменениях характеристик канала, что в системах случайного доступа обуславливается возможными коллизиями случайной кратности (см. таблицы 3.2 и 3.3).



### 3.3 Модель системы случайного доступа с учётом применения методов гибридной обратной связи

В данном подразделе будет рассмотрено использование методов гибридной обратной связи в системах случайного доступа с применением алгоритма типа АЛОНА и описаны две системы.

Первая система предполагает использование первого типа ГРОС, так как в современных сетях при передаче сообщений применяется помехоустойчивое кодирование, а рассматриваемая модель предполагает наличие обратного канала. Поэтому применение первого типа ГРОС не потребует дополнительных усложнений системы (например, добавление буфера и усложнения процедуры декодирования).

Вторая система предполагает использование второго типа ГРОС, который был выбран в предыдущем подразделе. Как отмечалось ранее, применение ГРОС в рамках рассматриваемой модели эффективно только при наличии переменных характеристик канала. В предыдущем подразделе при сравнении и оценке типов ГРОС в качестве причины переменного поведения канала выступали медленные Рэлеевские замирания. Таким образом, мощность сигнала (в используемой модели эквивалентно отношению сигнал/шум) менялась от передачи к передаче. В рамках данного подраздела будет рассмотрена модель, учитывающая особенности случайного множественного доступа. В модели системы отсутствуют медленные Рэлеевские замирания, однако перемена канала будет обусловлена интерференцией сообщений пользователей при их наложении в канале (в случае коллизии), тем самым будет возникать изменение мощности шума при каждой передаче, а значит и изменение отношения сигнал/шум. Следовательно можно получить выигрыш от использования ГРОС с комбинированием по Чейзу.

Прежде чем описать рассматриваемые системы с применением ГРОС первого и второго типа введём модель системы. Возьмем за основу базовую модель системы со случайным множественным доступом, описанную в подразделе 1.2 и сформулируем новую систему допущений, изменив некоторые положения, и добавив новые [108]. Как отмечалось ранее, в данном подразделе рассматривается канал с гауссовым шумом без Рэлеевских замираний. Выход канала доступен для всех пользовательских устройств.

**Допущение 3.1.** Все сообщения всех пользователей имеют одинаковую длину, а время передачи одного сообщения принимается за единицу времени (окно). Все время работы системы разделено на окна и пользователи могут начать передачу только в начале окна (к окну не привязан ни один пользователь). Количество сообщений появляющихся в системе каждую единицу времени (окно), распределено по закону Пуассона с параметром  $\Lambda$  [сообщений/окно]. Пользовательские устройства и базовая станция имеют синхронизацию по окнам.

**Замечание 3.4.** Сформулированное допущение эквивалентно допущению 2.1 из подраздела 2.2. Основным отличием является то, что в текущем разделе рассматривается только непрерывный по времени канал связи, а в предыдущем разделе рассматривался как дискретный, так и непрерывный по времени канал.

**Допущение 3.2.** Рассматривается непрерывный по времени канал связи с аддитивным белым гауссовским шумом (гауссовский канал множественного доступа), определяемый как  $Y = \sum_{i=1}^{K_t} X_i + Z$  где  $Y$  — выходной сигнал канала;  $K_t$  — количество пользовательских устройств, передающих сигнал на канал в окне с номером  $t$ , являющееся случайной величиной;  $X_i$  — сигнал  $i$ -го пользовательского устройства с мощностью  $P$ ;  $Z$  — аддитивный белый гауссовский шум, а  $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ . В каждом окне может произойти одно из 3 событий:

- "Успех" В окне передаёт только 1 пользовательское устройство, а так же при передаче 2 и более пользователями при успешном разрешении коллизии. Устройства, передавшие одновременно с пользователем, влияют на вероятность успешного декодирования его сообщения, и в этом случае в канале может возникнуть "Успех" (применимо для второго типа ГРОС, способ обработки сообщения на принимающей стороне более подробно будет описан далее);
- "Конфликт" два или более абонентских устройства передают в окне и коллизия не была разрешена, тогда приемник не получает информации о содержимом передаваемых пакетов;
- "Пусто" никто не передаёт в окне (событие "Пусто").

**Замечание 3.5.** Допущение объединяет в себе часть модели Галлагера и допущение D из предыдущего подраздела.

**Допущение 3.3.** На передающей стороне ко всем передаваемым сообщениям добавляется контрольная сумма, после чего полученные данные проходят помехоустойчивое кодирование и передаются в канал, где к сигналу добавляется шум. На принимающей стороне сначала выполняется декодирование с исправлением ошибок, а затем проверяется контрольная сумма. При правильной контрольной сумме отправляется положительная квитанция (АСК), при неправильной контрольной сумме — отрицательная квитанция (НАСК). Когда пользователь получает АСК, передатчик предполагает, что в канале происходит событие "Успех когда пользователь получает НАСК — "Конфликт". Предполагается, что квитанция принимается передатчиком в том же окне, в котором было передано сообщение и не может содержать ошибок.

**Замечание 3.6.** Данное допущение объединяет в себе часть модели Галлагера и допущения А и В из предыдущего подраздела, которые дополняют друг друга.

**Допущение 3.4.** Пользовательское устройство, у которого имеется готовое к передаче сообщение, называется активным. Число пользователей в системе потенциально бесконечно (сообщения и пользователи в система тождественны). Каждое активное устройство передаёт сообщение в канал с вероятностью  $p = \frac{1}{M}$ , где  $M$  — количество активных пользовательских устройств, известное базовой станции и другим устройствам. Одно и то же сообщение будет передаваться повторно до тех пор, пока оно не будет успешно передано.

**Замечание 3.7.** Данное допущение объединяет в себе допущения базовой модели предыдущего раздела (допущение 2.2) и допущения 2.6\* для системы с повторными передачами из того же раздела при параметре  $G = 1$ .

**Допущение 3.5.** Передача осуществляется с использованием помехоустойчивого кода достаточной длины со скоростью кода  $R = W \log(1 + P) - \epsilon$ , где  $\epsilon \rightarrow +0$  (см. допущение 3.2 и замечание 1.5, с учётом анализа из предыдущего подраздела). Для анализа будут использованы верхние границы для определения вероятности успешного декодирования ГРОС из предыдущего подраздела (см. таблицу 3.3).

Введём понятие отношения сигнал/шум плюс помехи интерферирующих сигналов, англ. термин Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio (SINR).

**Определение 3.2.** *Отношение сигнал/шум плюс помехи интерферирующих сигналов определяется как*

$$\hat{\Upsilon}_{i,t} = \frac{\alpha_{i,t} E_i}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{K_t} \alpha_{j,t} E_j + N_0}, \quad (3.7)$$

где  $\hat{\Upsilon}_{i,t}$  — отношение сигнал/шум плюс интерференция для  $i$ -го пользовательского устройства в окне с номером  $t$ ,  $N_0$  — энергия шума,  $\alpha_{i,t}$  — обозначает потери энергии сигнала в канале у  $i$ -го пользовательского устройства в окне с номером  $t$ ,  $E_i$  — энергия сигнала  $i$ -го пользователя,  $K_t$  — это множество пользовательских устройств передающих в окне  $t$ .

С учётом сформулированной модели системы и работы [56], введём следующее утверждение.

**Утверждение 3.1.** *Отношение сигнал/шум плюс интерференция может быть вычислена следующим образом*

$$\hat{\Upsilon}_{i,t} = \frac{1}{(K_t - 1) + P^{-1}}, \quad (3.8)$$

где  $\hat{\Upsilon}_{i,t}$  — отношение сигнал/шум плюс интерференция для  $i$ -го пользовательского устройства в окне с номером  $t$ ,  $P$  — мощность сигнала,  $K_t$  — это множество пользовательских устройств передающих в окне  $t$ .

*Доказательство.* Рассматривается модель системы без затуханий и Рэлеевских замираний, поэтому для всех  $i$  и  $t$  в выражении (3.7)  $\alpha_{i,t} = 1$ . В соответствии с допущением 3.2 мощность сигналов всех пользовательских устройств одинакова (и энергия тоже), а число пользователей передающих в окне  $t$  с учётом выбранного устройства равно  $K_t$ , то

$$\hat{\Upsilon}_{i,t} = \frac{E}{(K_t - 1) E + N_0}. \quad (3.9)$$

Поделив числитель и знаменатель на энергию сигнала, получим

$$\hat{\Upsilon}_{i,t} = \frac{1}{(K_t - 1) + \frac{N_0}{E}}. \quad (3.10)$$

Рассмотрим отдельно  $\frac{N_0}{E}$ :

$$\frac{N_0[\text{Джс}]}{E[\text{Джс}]} = \frac{P_{\text{ш}} \cdot T[\text{Вт} \cdot \text{с}]}{P \cdot T[\text{Вт} \cdot \text{с}]} = \frac{P_{\text{ш}}[\text{Вт}]}{P[\text{Вт}]}.$$

С учётом допущения 3.2, в котором говорится, что рассматривается АБГШ с 0 математическим ожиданием и 1 дисперсией, мощность шума  $P_{\text{ш}} = 1$ . Следовательно  $\frac{N_0}{E} = \frac{1}{P} = P^{-1}$ . Подставив данное значение в выражение (3.10) мы получим утверждение 3.1, что и требовалось доказать.

Далее опишем работу системы с алгоритмом случайного доступа типа АЛОНА для первого типа ГРОС, а так же приведём уточнения и примеры.

**Замечание 3.8.** *С учётом допущения 3.5, прямой теоремы кодирования и независимых попытках передач сообщения, в рассматриваемой системе можно определить следующие события (аналогично анализу в предыдущем подразделе):*

- *Успешное декодирование сообщения, происходит в случае, если  $W \log(1 + \hat{\gamma}_{i,t}) > R$ .*
- *Ошибка декодирования сообщения, происходит в случае, если  $W \log(1 + \hat{\gamma}_{i,t}) \leq R$ .*

**Замечание 3.9.** *С учётом введенной ранее модели, утверждения 3.8 и замечания 3.8, уточним происходящие в канале события (см. допущение 3.2) для системы с ГРОС первого типа:*

- *"Успех". В окне передавал только один пользователь  $i$ , и в этом случае  $\hat{\gamma}_{i,t} = \frac{1}{P^{-1}} = P$ , а следовательно  $W \log(1 + \hat{\gamma}_{i,t}) > R$ , что соответствует успешному декодированию сообщения (см. замечание 3.8).*
- *"Конфликт". В окне передавало больше одного пользовательского устройства  $K_t > 1$ . В этом случае  $\hat{\gamma}_{i,t} = \frac{1}{(K_t-1)+P^{-1}}$  и легко показать, что  $P > \hat{\gamma}_{i,t}$  при  $K_t > 1$ . Следовательно  $W \log(1 + \hat{\gamma}_{i,t}) \leq R$ , что соответствует ошибке декодирования сообщения (см. замечание 3.8).*
- *"Пусто". Никто не передавал сообщений, а, следовательно, мощность на входе приёмника мала и БС понимает, что в канале пусто.*

Рассмотрим пример работы системы с ГРОС первого типа со стороны целевого пользовательского устройства (отмеченного на рисунке 3.2 символом ) при наличии в системе других пользовательских устройств ( ПУ<sub>*i*</sub> означает *i*-е пользовательское устройство). События на рисунке обозначены следующим

образом: "У"— "Успех", "К"— "Конфликт" и "П"— "Пусто". Пусть значение мощности сигнала  $P = 1$ .

- **Первое окно.** Никто не передавал сообщений — событие "Пусто";
- **Второе окно.** Передавал целевой (*первая попытка*), 2-ой и 4-ый пользователи:
  - Пользователь (\*).  $\hat{\gamma}_{*,2} = \frac{1}{2+P-1} < P$  ( $\frac{1}{3} < 1$ ),
  - Пользователь 2.  $\hat{\gamma}_{2,2} = \frac{1}{2+P-1} < P$ ,
  - Пользователь 4.  $\hat{\gamma}_{4,2} = \frac{1}{2+P-1} < P$ .
 Сообщения всех троих пользователей не были декодированы, базовая станция сообщает о событии "Конфликт";
- **Третье окно.** Никто не передавал сообщений — событие "Пусто";
- **Четвёртое окно.** Передавал целевой (*вторая попытка*) и 3-ий пользователи:
  - Пользователь (\*).  $\hat{\gamma}_{*,4} = \frac{1}{1+P-1} < P$  ( $\frac{1}{2} < 1$ ),
  - Пользователь 2.  $\hat{\gamma}_{2,4} = \frac{1}{1+P-1} < P$ ,
 Событие "Конфликт";
- **Пятое окно.** Передавал только 1-ый пользователь:
  - Пользователь 1.  $\hat{\gamma}_{1,5} = \frac{1}{P-1} = P$ .
 Сообщение успешно декодировано, происходит событие "Успех".
- **Шестое окно.** Передали целевой (*третья попытка*), 2-ой и 4-ый пользователи:
  - Пользователь (\*).  $\hat{\gamma}_{*,6} = \frac{1}{2+P-1} < P$  ( $\frac{1}{3} < 1$ ),
  - Пользователь 2.  $\hat{\gamma}_{2,6} = \frac{1}{2+P-1} < P$ ,
  - Пользователь 4.  $\hat{\gamma}_{4,6} = \frac{1}{2+P-1} < P$ .
 Событие "Конфликт".
- **Седьмое окно.** Передавал только целевой пользователь (\*):
  - Пользователь (\*).  $\hat{\gamma}_{*,7} = \frac{1}{P-1} = P$ .
 Сообщение успешно декодировано, происходит событие "Успех".

Далее опишем работу системы с алгоритмом случайного доступа типа АЛОНА для второго типа ГРОС, а так же приведём уточнения и примеры.

**Замечание 3.10.** С учётом допущения 3.5, прямой теоремы кодирования и таблицы 3.3 (отмечалось, что второй тип ГРОС можно рассматривать как накопление сигнала на приёмнике) можно записать следующее  $\tilde{\gamma}_{i,n} = \sum_{j=1}^n \hat{\gamma}_{i,j}$ ,

*		1		2		3	4	
ПУ <sub>4</sub>								
ПУ <sub>3</sub>								
ПУ <sub>2</sub>								
ПУ <sub>1</sub>								
Событие	П	К	П	К	У	К	У	→
	1	2	3	4	5	6	7	окна

Рисунок 3.2 — Пример работы системы с первым типом ГРОС

где  $\tilde{\gamma}_{i,n}$  — отношение сигнал/шум плюс интерференция при  $n$  попытках передачи сообщения,  $n$  — число попыток отправки сообщения  $i$ -го пользователя,  $\tilde{\gamma}_{i,j}$  — отношение сигнал/шум плюс интерференция при  $j$ -ой попытке передачи сообщения. Тогда при зависимых попытках передачи сообщения, можно определить следующие события:

- Успешное декодирование сообщения, происходит в случае, если  $W \log(1 + \tilde{\gamma}_{i,n}) = W \log\left(1 + \sum_{j=1}^n \hat{\gamma}_{i,j}\right) > R$ .
- Ошибка декодирования сообщения, происходит в случае, если  $W \log(1 + \tilde{\gamma}_{i,n}) = W \log\left(1 + \sum_{j=1}^n \hat{\gamma}_{i,j}\right) \leq R$ .

**Замечание 3.11.** С учётом введенной ранее модели, утверждения 3.9 и замечания 3.10, уточним происходящие в канале события (см. допущение 3.2) для системы с ГРОС первого типа:

- "Успех". В окне передавал только один пользователь  $i$ , и в этом случае  $\tilde{\gamma}_{i,n} = \sum_{j=1}^{n-1} \hat{\gamma}_{i,j} + \frac{1}{P-1} = \sum_{j=1}^{n-1} \hat{\gamma}_{i,j} + P$ , а, следовательно,  $W \log(1 + \tilde{\gamma}_{i,n}) > R$ , что соответствует успешному декодированию сообщения (см. замечание 3.10). А так же при передаче несколькими пользователями, если для одного из абонентов (\*) в текущей коллизии выполнилось  $W \log\left(1 + \sum_{j=1}^n \hat{\gamma}_{*,j}\right) > R$ , что также приводит к успешному декодированию.

- "Конфликт". В окне передавало больше одного абонента  $K_t > 1$ , при этом для всех абонентов в коллизии выполнилось  $W \log \left( 1 + \sum_{j=1}^n \hat{\gamma}_{*,j} \right) \leq R$ , что соответствует ошибке декодирования сообщения у всех пользователей в смеси сигналов (см. замечание 3.8).
- "Пусто". Никто не передавал сообщений, а, следовательно, мощность на входе приёмника мала и БС понимает, что в канале пусто.

Рассмотрим пример работы системы с ГРОС второго типа со стороны целевого пользовательского устройства (отмеченного на рисунке 3.3 символом \*) на примере аналогичном предыдущему. Как и ранее другие пользовательские устройства обозначены как  $i$  —  $i$ -е пользовательское устройство. События на рисунке обозначены как: "У" — "Успех", "К" — "Конфликт" и "П" — "Пусто". С учётом того, что попытки декодирования одного сообщения при повторных отправлениях теперь зависимы, то будем рассматривать подробнее каждую передачу. Пусть для удобства в рамках примера значение мощности сигнала  $P = 1$ .

- **Первое окно.** Никто не передавал сообщений — событие "Пусто";
- **Второе окно.** Передавал целевой (*первая попытка*), 2-ой и 4-ый пользователи:
  - Пользователь (\*).  $\tilde{\gamma}_{*,1} = \hat{\gamma}_{*,1} = \frac{1}{2+P-1} < P$  ( $\frac{1}{3} < 1$ ),
  - Пользователь 2.  $\tilde{\gamma}_{2,1} = \hat{\gamma}_{2,1} = \frac{1}{2+P-1} < P$ ,
  - Пользователь 4.  $\tilde{\gamma}_{4,1} = \hat{\gamma}_{4,1} = \frac{1}{2+P-1} < P$ .
 Событие "Конфликт";
- **Третье окно.** Никто не передавал сообщений — событие "Пусто";
- **Четвёртое окно.** Передают целевой (*вторая попытка*) и 3-ий пользователи:
  - Пользователь (\*).  $\tilde{\gamma}_{*,2} = \hat{\gamma}_{*,1} + \hat{\gamma}_{*,2} = \frac{1}{2+P-1} + \frac{1}{1+P-1} = \frac{3+P-1}{2+3P-1+P-2} < P$  ( $\frac{4}{6} < 1$ ),
  - Пользователь 3.  $\tilde{\gamma}_{3,1} = \hat{\gamma}_{3,1} = \frac{1}{1+P-1} < P$  ( $\frac{1}{2} < 1$ ).
 Оба сообщения не декодированы, событие "Конфликт".
- **Пятое окно.** Передавал только 1-ый пользователь:
  - Пользователь 1.  $\tilde{\gamma}_{1,1} = \hat{\gamma}_{1,1} = \frac{1}{P-1} = P$ .
 Сообщение успешно декодировано, происходит событие "Успех".
- **Шестое окно.** Снова передавали целевой (*третья попытка*), 2-ой и 4-ый пользователи:



– Пользователь (\*).  $\tilde{\gamma}_{*,3} = \hat{\gamma}_{*,1} + \hat{\gamma}_{*,2} + \hat{\gamma}_{*,3} = \frac{1}{2+P-1} + \frac{1}{1+P-1} + \frac{1}{2+P-1} = \frac{4+3P-1}{2+3P-1+P-2} > P \left(\frac{7}{6} > 1\right)$ ,

– Пользователь 2.  $\tilde{\gamma}_{2,2} = \hat{\gamma}_{2,1} + \hat{\gamma}_{2,2} = \frac{1}{2+P-1} + \frac{1}{2+P-1} = \frac{2}{2+P-1} < P \left(\frac{2}{3} < 1\right)$ ,

– Пользователь 4.  $\tilde{\gamma}_{4,2} = \hat{\gamma}_{4,1} + \hat{\gamma}_{4,2} = \frac{1}{2+P-1} + \frac{1}{2+P-1} = \frac{2}{2+P-1} < P \left(\frac{2}{3} < 1\right)$ .

У целевого пользователя накопилось достаточно мощности для успешного декодирования, то есть  $\tilde{\gamma}_{*,3} > P$ , следовательно,  $W \log(1 + \tilde{\gamma}_{i,n}) > R$ , на третьей попытке происходит успех для целевого пользователя.

Событие "Успех" для пользовательского устройства (\*).

– **Седьмое окно.** Никто не передавал сообщений — событие "Пусто".

*		1		2		3	
ПУ <sub>4</sub>							
ПУ <sub>3</sub>							
ПУ <sub>2</sub>							
ПУ <sub>1</sub>							
Событие	П	К	П	К	У	У	П
	1	2	3	4	5	6	7

окна

Рисунок 3.3 — Пример работы системы со вторым типом ГРОС

На двух примерах была продемонстрирована работа систем с первым и вторым типом ГРОС. В ходе демонстрации показано, что использование второго типа может усложнить процедуру декодирования, но при этом в конкретном примере позволила сократить число передач для целевого пользователя, что так же уменьшает энергозатраты и задержку в системе.

### 3.4 Энергоэффективность стабильных систем случайного доступа при использовании методов гибридной обратной связи

Проведём анализ двух, представленных в предыдущем подразделе систем. Для начала сформулируем утверждение для определения спектральной эффективности системы.

**Утверждение 3.2.** *Спектральная эффективность системы определяется как:*

$$\eta = \frac{R}{WM[S]}, \quad (3.11)$$

$$\text{где } M[S] = \sum_{s=1}^{\infty} sPr \left\{ \begin{array}{l} \text{на } s\text{-ой передаче произошёл} \\ \text{успех у целевого пользователя} \end{array} \right\}.$$

*Доказательство.* Понятие спектральной эффективности было введено в предыдущем подразделе (см. (3.3)). Аналогично определениям 2.1 и 2.2 при Пуассоновском входном потоке мы можем рассматривать среднее число передач  $M[S]$  для целевого пользовательского устройства, добавленного в случайный момент времени, что не нарушает свойства входного потока [61].

Введём утверждение для вычисления спектральной эффективности системы с первым типом ГРОС.

**Утверждение 3.3.** *Спектральная эффективность системы с первым типом ГРОС вычисляется как:*

$$\eta = \frac{\log(1+P) - \varepsilon}{e}, \quad (3.12)$$

где  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

*Доказательство.* Спектральная эффективность определена в соответствии с выражением (3.11):

$$\eta = \frac{R}{WM[S]}. \quad (3.13)$$

Среднее число передач вычисляется как  $M[S] = \sum_{s=1}^{\infty} s \Pr\{S = s\}$ , где  $\Pr\{S = s\} = P_e(s-1) - P_e(s)$ , а  $P_e(s)$  — вероятность того, что  $s$  передач подряд были неуспешными (см. подраздел 3.3 выражение (3.4)).

В соответствии с первым типом ГРОС и введённом отношении сигнал/шум с интерференцией,  $P_e(s)$  определяется как (см. таблицу 3.3)

$$P_e(s) = \prod_{i=1}^s Pr \{R \geq W \log(1 + \hat{\gamma}_{*,i})\}, \quad (3.14)$$

где  $\hat{\gamma}_{*,i}$  — отношение сигнал/шум плюс интерференция для целевого пользовательского устройства при  $i$ -ой попытке. С учётом того, что передачи

независимы и распределение  $\hat{\gamma}_{*,i}$  не меняется со временем, то выражение (3.14) можно переписать следующим образом:

$$P_e(s) = (Pr \{R \geq W \log(1 + \hat{\gamma}_{*,s})\})^s. \quad (3.15)$$

В соответствии с ведённой моделью системы  $R = W \log(1 + P) - \varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$  (см. допущение 3.5). Значит (3.15) можно переписать в виде:

$$P_e(s) = (Pr \{W \log(1 + P) - \varepsilon \geq W \log(1 + \hat{\gamma}_{*,s})\})^s, \quad (3.16)$$

где  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

Так как полоса при расчёте скорости и пропускной способности одинаковы, то в условии  $Pr \{W \log(1 + P) - \varepsilon \geq W \log(1 + \hat{\gamma}_{*,s})\}$ , ее можно опустить. При условии того, что логарифм монотонно возрастающая функция и  $\varepsilon \rightarrow +0$ , то в условии можно опустить логарифм и сравнивать его аргументы. Проведя ряд упрощений можно переписать:

$$P_e(s) = (Pr \{P > \hat{\gamma}_{*,s}\})^s. \quad (3.17)$$

Отношение сигнал/шум плюс интерференция, для передающих в момент времени  $t$ , было определено в предыдущем подразделе (см. утверждение 3.1). Так как при анализе используется расчёт виртуального значения спектральной эффективности (по аналогии с виртуальной и актуальной вероятностью доставки, см. раздел 2), то с учётом добавления в канал целевого абонента, отношение сигнал/шум плюс интерференция для него определяется как  $\hat{\gamma}_{*,s} = \frac{1}{K_s^* + P - 1}$ , где  $K_s^*$  — число абонентов передававших с целевым при  $s$ -ой передаче.

Можно легко заметить, что  $\frac{1}{K_s^* + P - 1} < P$ , только при  $K_s^* > 0$ . Так как система анализируется в режиме насыщения, то  $K_s^*$  распределено по закону Пуассона с параметром 1. Тогда

$$Pr \{P > \hat{\gamma}_{*,s}\} = Pr \{K_s^* > 0\} = 1 - e^{-1}. \quad (3.18)$$

Тогда  $P_e(s)$

$$P_e(s) = (1 - e^{-1})^s. \quad (3.19)$$

Запишем  $Pr \{S = s\}$ :

$$\Pr \{S = s\} = (1 - e^{-1})^{s-1} - (1 - e^{-1})^s = (1 - e^{-1})^{s-1} e^{-1}. \quad (3.20)$$

Тогда

$$M[S] = \sum_{s=1}^{\infty} s (1 - e^{-1})^{s-1} e^{-1} = e. \quad (3.21)$$

Подставляя значение  $R$  и  $M[S]$  в выражение (3.13), получаем:

$$\eta = \frac{W \log(1 + P) - \varepsilon}{We} = \frac{\log(1 + P) - \varepsilon}{e}. \quad (3.22)$$

Что и требовалось доказать.

**Замечание 3.12.** В подразделе 2.6 рассматривались нижние границы энергозатрат для системы случайного доступа с повторными передачами на базе алгоритма АЛОНА. Результаты, представленные в утверждении 2.9 получены для дискретного канала. Результаты, представленные в утверждении 3.3 получены для непрерывного канала. Если учесть связь числа отсчётов в дискретном канале с полосой соответствующего непрерывного канала ( $n = 2W$ ), то результаты, полученные для непрерывного канала будут эквивалентны.

**Замечание 3.13.** В результате доказательства утверждения 3.3 показано, что для ГРОС первого типа среднее число повторных передач не зависит от энергии сигнала и равно  $e$ .

Введём утверждение для вычисления спектральной эффективности системы со вторым типом ГРОС.

**Утверждение 3.4.** Спектральная эффективность системы со вторым типом ГРОС определяется как:

$$\eta = \frac{\log(1 + P) - \varepsilon}{S(P)}. \quad (3.23)$$

Функция  $S(P)$ , входящая в выражение (3.11), определяет среднее число передач сообщения до успеха и вычисляется следующим образом:

$$S(P) = \sum_{s=1}^{\infty} s (P_e(s-1) - P_e(s)),$$

где  $P_e(s) = Pr \left\{ P > \sum_{i=1}^s \frac{1}{K_i^* + P - 1} \right\}$ , а  $K_1^*, K_2^*, \dots$  — последовательность независимых одинаково распределенных по закону Пуассона с параметром 1 случайных величин.

*Доказательство.* Доказательство аналогично предыдущему за некоторыми отличиями.

В соответствии со вторым типом ГРОС,  $P_e(s)$  определяется как (см. таблицу 3.3):

$$P_e(s) = Pr \left\{ R \geq W \log \left( 1 + \sum_{i=1}^s \hat{\gamma}_{*,i} \right) \right\} \quad (3.24)$$

Условие из (3.24) можно упростить (аналогично предыдущему доказательству), тогда

$$P_e(s) = Pr \left\{ P > \sum_{i=1}^s \hat{\gamma}_{*,i} \right\}. \quad (3.25)$$

С учётом добавления целевого пользовательского устройства в систему  $\hat{\gamma}_{*,i} = \frac{1}{K_i^* + P - 1}$ , где  $K_i^*$  — число пользователей передававших с целевым пользовательским устройством при  $i$ -ой отправке сообщения. Так как система анализируется в режиме насыщения, то  $K_1^*, K_2^*, \dots$  это последовательность независимых одинаково распределенных по закону Пуассона с параметром 1 случайных величин. Откуда следует утверждение 3.4

**Замечание 3.14.** В работе не рассматривается вопрос численного расчёта функции  $S(P)$ , так как это является сложной задачей из области теории вероятности и выходит за рамки специальности диссертационной работы. Учитывая, что число передач является случайной величиной, которая имеет при любом  $P > 0$  конечное математическое ожидание и дисперсию (в рамках рассматриваемой модели системы), то в работе для вычисления этой функции будет использоваться метод Монте-Карло.

При анализе будут представлены результаты для  $\frac{E_b}{N_0}$ . Значение энергии на бит, можно получить пересчетом из мощности сигнала для этого введём следующее утверждение.

**Утверждение 3.5.** *Значение энергии на бит  $\frac{E_b}{N_0}$  связано с мощностью сигнала  $P$  и спектральной эффективностью  $\eta$  следующим образом:*

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{P}{\eta}, \quad (3.26)$$

где  $\eta$  — спектральная эффективность, вычисляемая в зависимости от типа ГРОС по формуле (3.3) или (3.23)

*Доказательство.* Из работы [109] взаимосвязь энергии на бит и отношения сигнал шум, а так же с учётом введённой модели, можно записать как:

$$\frac{E_b}{N_0} = P \frac{W}{R}. \quad (3.27)$$

Так как нас интересует энергия на бит с учётом повторных передач сообщения  $M[S]$ , то аналогично выражению (2.22) (см. подраздел 2.4) перепишем (3.27) следующим образом

$$\frac{E_b}{N_0} \triangleq PM[S] \frac{W}{R}. \quad (3.28)$$

Из определения спектральной эффективности (3.11) следует, что  $\eta^{-1} = \frac{WM[S]}{R}$ . Проведя замену в выражении (3.28) получим (3.26), что и требовалось доказать.

**Утверждение 3.6.** *Значение энергии на бит при заданной спектральной эффективности для системы с первым типом ГРОС может быть найдено как решение уравнения:*

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{e\eta} - 1}{\eta}. \quad (3.29)$$

*Доказательство.* С учётом утверждения 3.5 выражение (3.12), из утверждения 3.3 для вычисления спектральной эффективности с учётом энергии на бит  $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$  можно переписать как

$$\eta = \frac{\log\left(1 + \frac{E_b}{N_0}\eta\right)}{e}. \quad (3.30)$$

Откуда непосредственно следует выражение (3.29), что и требовалось доказать.

**Утверждение 3.7.** *Значение энергии на бит при заданной спектральной эффективности для системы со вторым типом ГРОС может быть найдено как решение уравнения:*

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{S\left(\frac{E_b}{N_0}\eta\right)\eta} - 1}{\eta}, \quad (3.31)$$

где  $S(*)$  — функция определяющая среднее число передач.

*Доказательство.* Доказательство аналогично предыдущему. С учётом утверждения 3.5 выражение (3.31), из утверждения 3.4 для вычисления спектральной эффективности с учётом энергии на бит  $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$  можно переписать как

$$\eta = \frac{\log\left(1 + \frac{E_b}{N_0}\eta\right)}{S\left(\frac{E_b}{N_0}\eta\right)}. \quad (3.32)$$

Откуда непосредственно следует выражение (3.29), что и требовалось доказать.

**Замечание 3.15.** *Пересчет из мощности сигнала  $P$  в энергию на бит  $\frac{E_b}{N_0}$  и прямой расчёт энергии на бит по уравнениям (3.29) и (3.31) для соответствующих типов ГРОС дают эквивалентные результаты.*

На рисунке 3.4 представлены значения, полученные по формулам (3.3) и (3.23) для соответствующего типа ГРОС. Для этого при заданном значении мощности сигнала  $P$  вычислялась спектральная эффективность, а результаты представлены как зависимость мощности сигнала от спектральной эффективности. Для ГРОС первого типа результаты получены двумя способами. Прямым вычислением по формуле (3.3) и методом Монте-Карло в соответствии с определением спектральной эффективности (для этого путем имитационного моделирования было получено среднее число передач в системе). Как видно из полученных результатов, число экспериментов было выбрано достаточным, чтобы результаты расчёта и моделирования совпадали с высокой точностью. Для ГРОС второго типа результат был получен путем вычисления среднего числа передач методом Монте-Карло и подставлен в выражение (3.23).

Из рисунка видно, что при использовании ГРОС второго типа в рассматриваемой системе можно повысить спектральную эффективность при заданной мощности сигнала или уменьшить энергозатраты при заданной спектральной

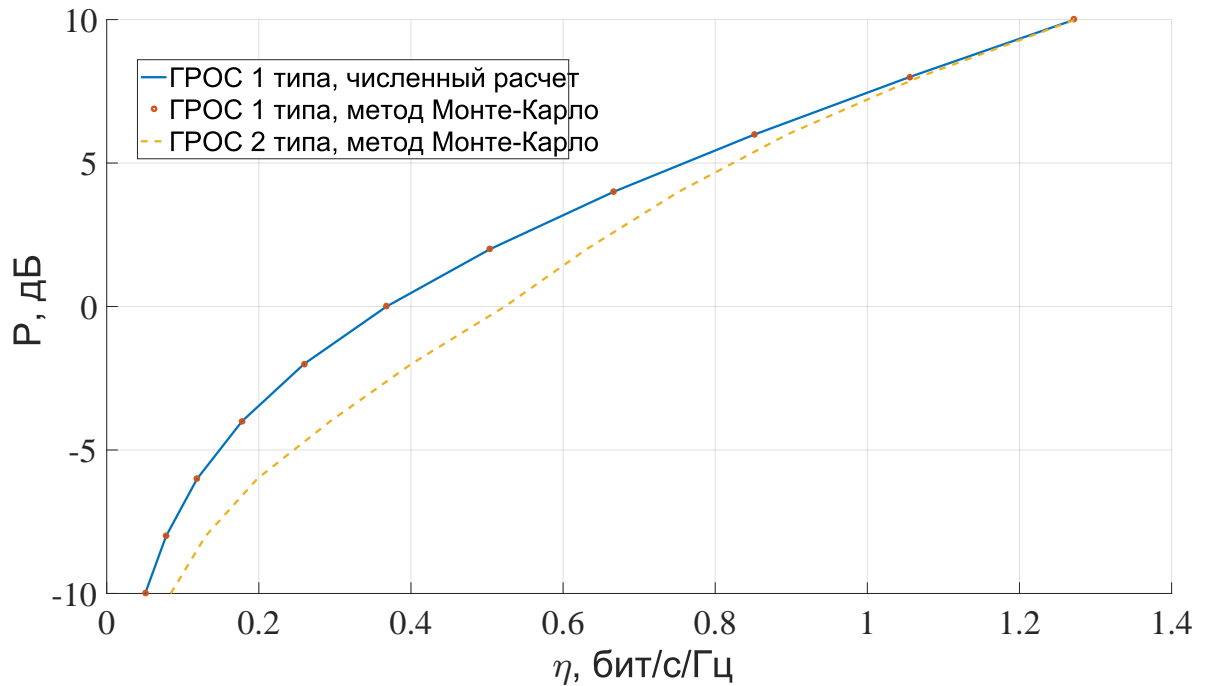


Рисунок 3.4 — Зависимость мощности сигнала от спектральной эффективности системы для ГРОС 1 и 2 типа

эффективности по сравнению с ГРОС 1 типа. Максимальный энергетический выигрыш составляет порядка 2дБ (в районе спектральной эффективности ( $\eta = 0,5$ )). С ростом спектральной эффективности выигрыш от применения второго типа ГРОС уменьшается.

На рисунке 3.5 представлены значения для энергии на бит, полученные пересчётом из результатов представленных ранее по формуле (3.26).

Как видно из рисунка 3.5 Максимальный энергетический выигрыш составляет порядка 2,5дБ, при значении спектральной эффективности  $\eta = 0,28$ . С ростом спектральной эффективности выигрыш по энергии на бит уменьшается, аналогично выигрышу по мощности сигнала.

Использование более сложных схем декодирования сообщений, например применение ГРОС может уменьшить затраты энергии в системах случайного доступа. Помимо методов ГРОС для повышения вероятности декодирования может применяться ММО (Multiple Input Multiple Output) – метод пространственного кодирования сигнала, позволяющий увеличить полосу пропускания канала, в котором передача данных и приём данных осуществляются системами из нескольких антенн [110].



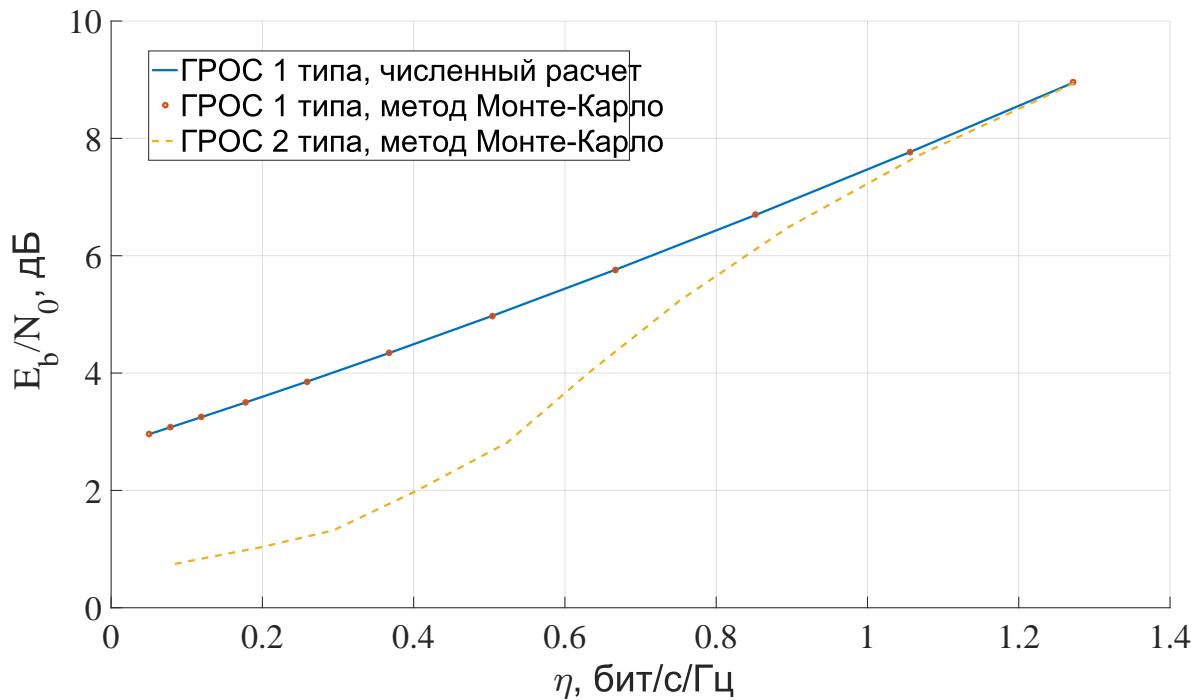


Рисунок 3.5 — Зависимость энергии на бит от спектральной эффективности системы для ГРОС 1 и 2 типа

### 3.5 Выводы по главе

В текущем разделе рассматривалось применение методов гибридной обратной связи в системах случайного множественного доступа для повышения эффективности систем с обратной связью и при наличии повторных передач.

В подразделе 3.2 был проведён обзор основных подходов к реализации гибридной обратной связи. Было выделено 3 типа ГРОС. Для каждого типа были описаны основные особенности, а также достоинства и недостатки. Был описан подход к анализу эффективности данных методов без учёта специфики систем случайного доступа. В результате было решено, что для систем случайного множественного типа наиболее удачным является второй тип ГРОС. Однако первый тип ГРОС также может быть использован в таких системах, так как не требует дополнительных усложнений декодера, а помехоустойчивое кодирование активно используется в системах передачи.

В подразделе 3.3 были описаны две системы случайного доступа. Обе системы используют алгоритм доступа на основеALOHA. В первой системе используется первый тип ГРОС. Для неё была переформулирована система

Таблица 3.4 — Спектральная эффективность и энергия на бит в системах случайного доступа с ГРОС

Характеристика системы	Система с ГРОС первого типа	Система с ГРОС второго типа
Спектральная эффективность $\eta$	$\eta = \frac{\log(1+P)-\varepsilon}{e}$ , где $\varepsilon \rightarrow +0$ .	$\eta = \frac{\log(1+P)-\varepsilon}{S(P)}$ , где $S(P)$ определяет среднее число передач сообщения до успеха
Нижняя граница для энергии на бит $\frac{E_b}{N_0}$	$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{\varepsilon\eta}-1}{\eta}$ .	$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{S(\frac{E_b}{N_0}\eta)\eta}-1}{\eta}$ , где $S(*)$ – функция, определяющая среднее число передач.

допущений и приведён пример работы. Такой подход к организации систем случайного доступа наиболее распространён в современных системах связи.

Во второй системе предполагается использование второго типа ГРОС, выбранного на основе приведённого обзора и анализа методов. Второй тип ГРОС использует метод комбинирования по Чейзу, что при анализе может быть рассмотрено как некоторое накопление энергии сигнала пользовательского устройства на приемной стороне.

В подразделе 3.4 был приведён анализ двух рассмотренных подходов к реализации систем случайного множественного доступа с применением методов гибридной обратной связи. Для первого типа было получено замкнутое выражение для численного расчёта спектральной эффективности при заданной мощности сигнала. Также было отмечено, что полученный результат аналогичен нижней границе для системы с повторными передачами из раздела 2 с учётом особенностей непрерывного и дискретного каналов. Для второго типа ГРОС был показан подход к вычислению спектральной эффективности, однако расчёт среднего числа передач, учитывая специфику рассматриваемого метода, является сложновычислимым. Поэтому для получения результатов применялся метод Монте-Карло с большим числом экспериментов, дающим малый доверительный интервал (соизмерим с толщиной линий на графиках). На основе формул для вычисления спектральной эффективности можно получить значения нижней границы для мощности сигнала и затрат энергии на бит. Данные результаты приведены в таблице 3.4.

Использование ГРОС второго типа позволяет повысить спектральную эффективность при заданной мощности сигнала или уменьшить энергозатраты при заданной спектральной эффективности по сравнению с ГРОС первого типа. Так, максимальный энергетический выигрыш для мощности сигнала составляет порядка 2дБ в районе спектральной эффективности  $\eta = 0,5$ . Максимальный

энергетический выигрыш для энергии на бит составляет порядка 2,5дБ при значении спектральной эффективности  $\eta = 0,28$ . При этом с ростом спектральной эффективности выигрыш от применения второго типа ГРОС уменьшается.

Однако для реализации второго типа гибридной обратной связи необходимо уметь отличать наличие того или иного абонентского устройства в смеси сигналов для корректного накопления мощности сигнала (и, соответственно, информации о нем). Один из возможных подходов — это передача пользователями сообщений в окнах, определяемых псевдослучайной последовательностью [111]. Второй подход это использование уникальных преамбул, передаваемых вместе с сообщениями и различимых приемником даже при наложении в канале.

Использование преамбул может быть эффективным даже без применения методов ГРОС. В следующем разделе будут предложены некоторые подходы к реализации систем случайного множественного доступа с использованием преамбул и проведен анализ таких систем.

## Глава 4. Методы разрешения коллизий с использованием преамбул в системах с потенциально неограниченным числом пользовательских устройств

### 4.1 Вводные замечания

В предыдущих разделах при оценке энергоэффективности системы в качестве метода случайного множественного доступа рассматривался алгоритм АЛОНА при известном числе активных пользовательских устройств. Для данного алгоритма ранее приводились результаты анализа при канале с аддитивным белым гауссовским шумом как для базовой реализации системы (без использования методов ГРОС), так и при использовании методов ГРОС. Было показано, что при согласовании методов модуляции и демодуляции с алгоритмами помехоустойчивого кодирования, можно добиться уменьшения энергозатрат в системах случайного множественного доступа.

Как отмечалось ранее, вторым путем уменьшения энергозатрат в системах со случайным доступом является модификация алгоритмов случайного множественного доступа. В текущем разделе будет сформулирована модель системы, а также описаны два подхода к реализации алгоритма разрешения коллизий с использованием служебной информации на основе преамбул. Для обоих подходов представлен анализ стабильности системы. На основе используемых ранее методик расчёта спектральной эффективности и полученных значений критической интенсивности входного потока приводится оценка нижних границ для затрат энергии в системах с предложенным алгоритмом случайного множественного доступа на основе преамбул. Будет проведено сравнение результатов анализа энергоэффективности для подходов из предыдущих разделов, использующих в основе алгоритм АЛОНА, и результатов для системы на основе предложенных в данном разделе алгоритмов.

## 4.2 Модель системы случайного доступа с учётом применения методов разрешения коллизий с использованием преамбул

Модель системы в данном разделе базируется на модели из предыдущего раздела (см. 3.3). Некоторые пункты системы допущений остаются без изменений, другие будут видоизменены и добавлены новые, для удобства прочтения опишем всю систему допущений.

**Допущение 4.1.** *Все сообщения всех пользователей имеют одинаковую длину, а время передачи одного сообщения принимается за единицу времени (окно). Все время работы системы разделено на окна, и пользователи могут начать передачу только в начале окна (к окну не привязан ни один пользователь). Количество сообщений появляющихся в системе каждую единицу времени (окно), распределено по закону Пуассона с параметром  $\Lambda$  [сообщений/окно]. Пользовательские устройства и базовая станция имеют синхронизацию по окнам.*

**Замечание 4.1.** *Сформулированное допущение эквивалентно допущению 3.1 из подраздела 3.3.*

**Допущение 4.2.** *Рассматривается непрерывный по времени канал связи с аддитивным белым гауссовским шумом (гауссовский канал множественного доступа), определяемый как  $Y = \sum_{i=1}^{K_t} X_i + Z$  где  $Y$  — выходной сигнал канала;  $K_t$  — количество пользовательских устройств, передающих сигнал на канал в окне с номером  $t$ , которое является случайной величиной);  $X_i$  — сигнал  $i$ -го пользовательского устройства с мощностью  $P$ ;  $Z$  — аддитивный белый гауссовский шум, а  $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ . В каждом окне может произойти одно из трех событий:*

- "Успех" В окне передаёт только одно пользовательское устройство;
- "Конфликт" два или более абонентских устройства передают в одном окне;
- "Пусто" никто не передаёт в окне.

**Замечание 4.2.** *Данное допущение имеет некоторые отличия от аналогичного в подразделе 3.3. Так как в данном разделе не рассматриваются сложные методы декодирования с использованием методов ГРОС, то при наложении*

сообщений в канале события "Успех" быть не может, что отражено в тексте допущения.

**Допущение 4.3.** В системе имеется  $L$  преамбул устроенных таким образом, что при наложении в канале базовая станция (БС) может однозначно определить какие преамбулы были в смеси сигналов. На передающей стороне ко всем передаваемым сообщениям добавляется контрольная сумма, после чего полученные данные проходят помехоустойчивое кодирование, затем к полученному сообщению пользователь добавляет случайно выбранную преамбулу из имеющегося списка. Затем пакет передаётся в канал, где к сигналу добавляется шум. На принимающей стороне БС сначала определяет число преамбул в полученных данных, если обнаружено больше одной преамбулы, то сообщения из смеси не смогут быть восстановлены ("Конфликт"). Если обнаружена 1 преамбула, то выполняется декодирование с исправлением ошибок, а затем проверяется контрольная сумма. По обратному каналу БС передаёт служебные данные, необходимые для работы рассматриваемых алгоритмов. Предполагается, что служебная информация принимается пользовательскими устройствами в том же окне, в котором было передано сообщение и не может содержать ошибок.

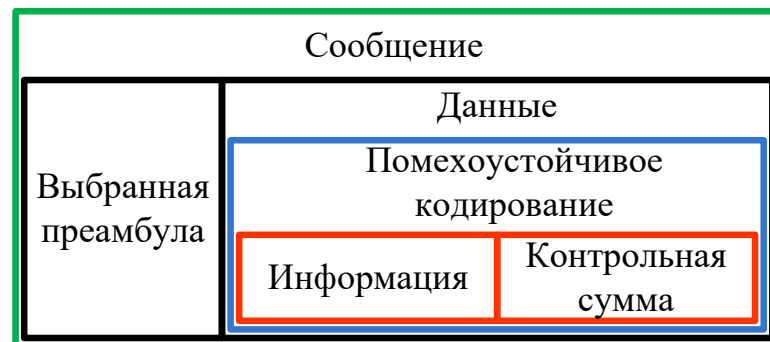


Рисунок 4.1 — Структура передаваемых пользовательскими устройствами сообщений

**Замечание 4.3.** Данное допущение отличается от допущения 3.3 из 3.3, так как вводится понятие и свойство преамбул, необходимых для работы алгоритмов, а так же меняются структура передаваемых пользовательскими устройствами данных и ответа от базовой станции.

**Допущение 4.4.** Пользовательское устройство, у которого имеется готовое к передаче сообщение, называется активным. Число пользователей в системе бесконечно (сообщения и пользователи в системе тождественны). Каждое активное устройство передаёт сообщение в канал с вероятностью  $p = \min\left(\frac{G}{M_{акт}}, 1\right)$ , где  $M_{акт}$  — количество активных пользователей, известное базовой станции и другим устройствам,  $G$  — параметр системы, влияющий на вероятность отправки сообщения в канал. Одно и то же сообщение будет передаваться повторно до тех пор, пока оно не будет успешно передано.

**Замечание 4.4.** Данное допущение близко по содержанию к аналогичному допущению из 3.3, за исключением введения параметра  $G$  влияющего на вероятность передачи.

**Допущение 4.5.** Передача осуществляется с использованием помехоустойчивого кода достаточной длины со скоростью кода  $R = W \log(1 + P) - \epsilon$ , где  $\epsilon \rightarrow +0$  (см. допущение 3.2 и замечание 1.5, с учётом анализа из предыдущего подраздела).

**Замечание 4.5.** Данное допущение больше не учитывает использование методов ГРОС.

### 4.3 Алгоритмы случайного множественного доступа на основе методов разрешения коллизий с использованием преамбул

В данном подразделе будут описаны блокированный и неблокированный алгоритмы случайного множественного доступа с использованием преамбул [112].

Блокированный алгоритм работает сеансами. Сеанс начинается с "Конфликта" некоторой кратности (кратность 0 — событие "Пусто", кратность 1 — событие "Успех", кратность  $> 1$  — событие "Конфликт") и длится в соответствии с алгоритмом разрешения конфликта (будет описан далее). Пользовательские устройства могут передавать сообщения только в первом окне

сеанса. Если сообщение у пользователя появилось в течение сеанса, то он откладывает (блокирует) свою передачу до начала следующего сеанса. Поэтому данный алгоритм называют блокированным.

В неблокированном алгоритме пользовательское устройство может начать передавать свое сообщение в канал, начиная со следующего сразу после появления у него сообщения окна (пользователь может не откладывать свою передачу, даже если в системе уже идет процедура разрешения конфликта). Преимущество такого подхода заключается в том, что пользовательским устройствам без сообщений нет необходимости следить за событиями в канале, пока у них нет сообщений для передачи, так же это позволяет проще добавлять новые пользовательские устройства в систему.

Термин блокированных и неблокированных алгоритмов был впервые введен в работах Б. С. Цыбакова (смотри например [63; 113; 114]).

Общим принципом для обоих типов алгоритмов является то, что при событии конфликт, когда обнаружено  $> 1$  преамбулы, БС формирует расписание для перехода системы в режим разделения по времени, где список преамбул определяет порядок окна для повторной передачи пользовательским устройством сообщения по данному расписанию. Подробней работа пользовательских устройств и базовой станции, а так же пример работы алгоритмов, будет приведен далее.

Для начала опишем работу пользовательских устройств (ПУ) для блокированного и неблокированного алгоритмов случайного множественного доступа с использованием преамбул.

Рассмотрим работу пользовательского устройства для блокированного алгоритма случайного множественного доступа (СМД) с использованием преамбул. Пользователь при появлении у него сообщения равновероятно выбирает одну из  $L$  преамбул и формирует сообщение из преамбулы и передаваемых данных. Если система находится в режиме разделения времени (РВ), то абонент ожидает окончания расписания и затем передаёт сообщение с вероятностью  $p$ , определяемой допущением 4.4. Иначе, пользователь сразу начинает принимать решение о передаче сообщения в канал с вероятностью  $p$ . Далее пользователь получает ответ от базовой станции. В случае события "Успех" — удаляет сообщение из буфера. Иначе — принимает расписание, составленное БС, и ожидает соответствующего окна для повторной отправки. Подробная схема представлена на рисунке 4.2.



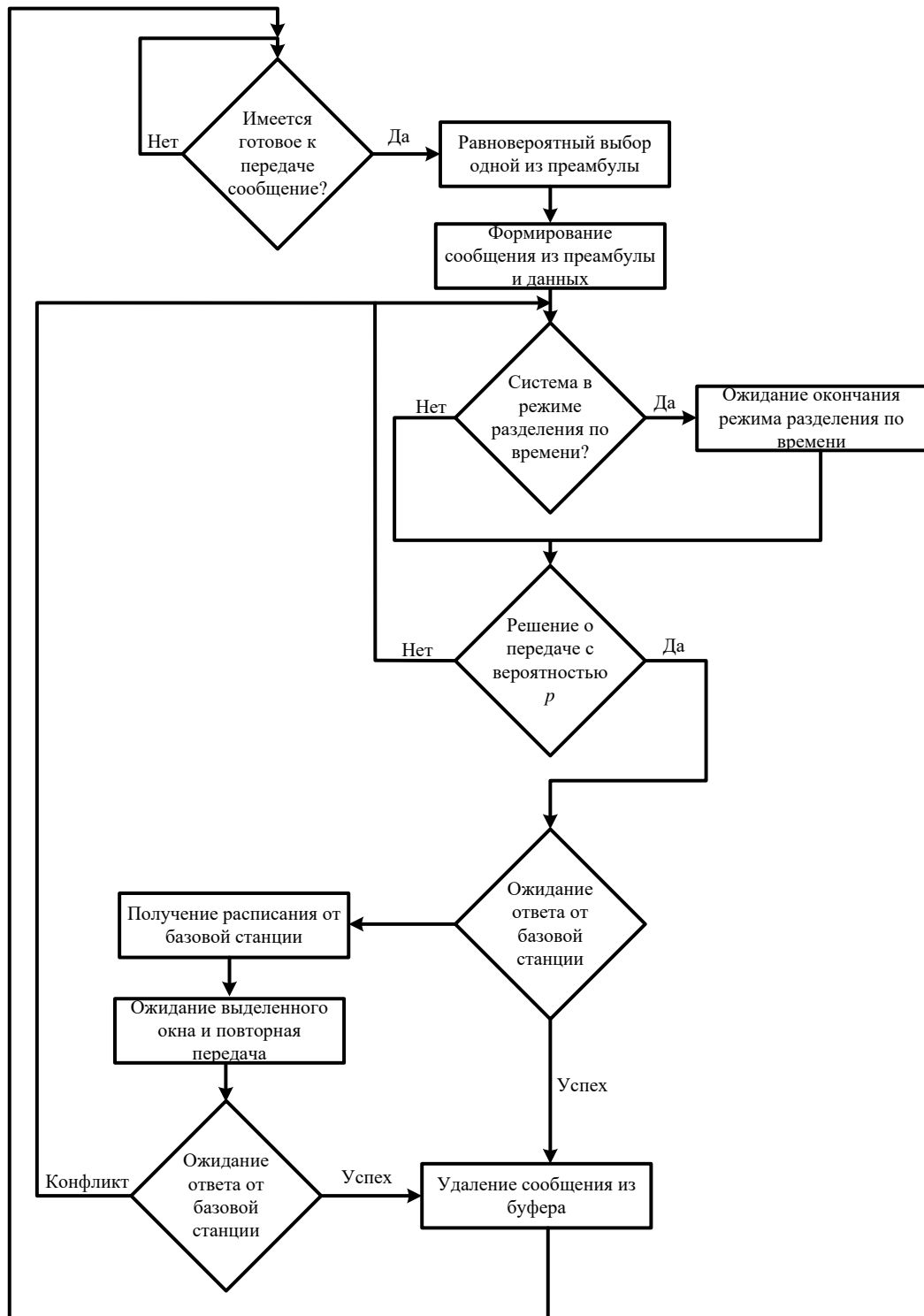


Рисунок 4.2 — Схема работы ПУ для заблокированного алгоритма

Рассмотрим работу пользовательского устройства для неблокированного алгоритма. Схема алгоритма показана на рисунке 4.3. При появлении сообщения у пользователя, он формирует сообщение для отправки в канал аналогично предыдущему алгоритму. Сформированное сообщение абонент передаёт в канал с вероятностью  $p$ . Затем ожидает ответа от БС, которая сообщает о событии в окне и ПУ выполняет следующее, в зависимости от события в канале:

- Событие "Успех" — пользователь удаляет сообщение из буфера
- Событие "Конфликт" — пользователь получает расписание от БС и ожидает окна для передачи сообщения. Во время ожидания пользователь слушает обратный канал с информацией от БС. Если за время ожидания произошёл "Конфликт", пользователь получает новое расписание. При наступлении окна закрепленного за преамбулой пользователя он передаёт сообщение в канал и снова ожидает ответа от БС.

Рассмотрим алгоритм работы базовой станции для заблокированного и неблокированного алгоритма (рисунок 4.4). Серым цветом на рисунке 4.4 выделен блок для неблокированного алгоритма, который отсутствует у БС для заблокированного алгоритма. БС получает информацию из канала и на ее основе делает вывод о том, какое событие произошло в текущем окне. В зависимости от события БС выполняет следующее:

- Событие "Пусто" — БС сообщает пользователям, что в текущем окне никто не передавал.
- Событие "Успех" — БС сообщает пользователям об успешной передаче сообщения.
- Событие "Конфликт" — БС верно декодирует преамбулы, участвующих в конфликте, и их номера, но не может восстановить передаваемые данные. В зависимости от версии алгоритма схема исполняет следующие шаги:
  - *Блокированный алгоритм.* БС формирует расписание для пользователей, участвующих в конфликте и сообщает расписание всем пользовательским устройствам.
  - *Неблокированный алгоритм.* Если нет режима разделения по времени, то БС формирует расписание для пользователей, участвующих в конфликте и сообщает расписание всем пользовательским устройствам (аналогично заблокированному). Если расписание уже было составлено, то БС формирует новое расписание для пользователей, как для участвующих в конфликте пользователей, так и пользователей, которые не успели передать сообщения по предыдущему расписанию, затем сообщает новое расписание пользовательским устройствам.

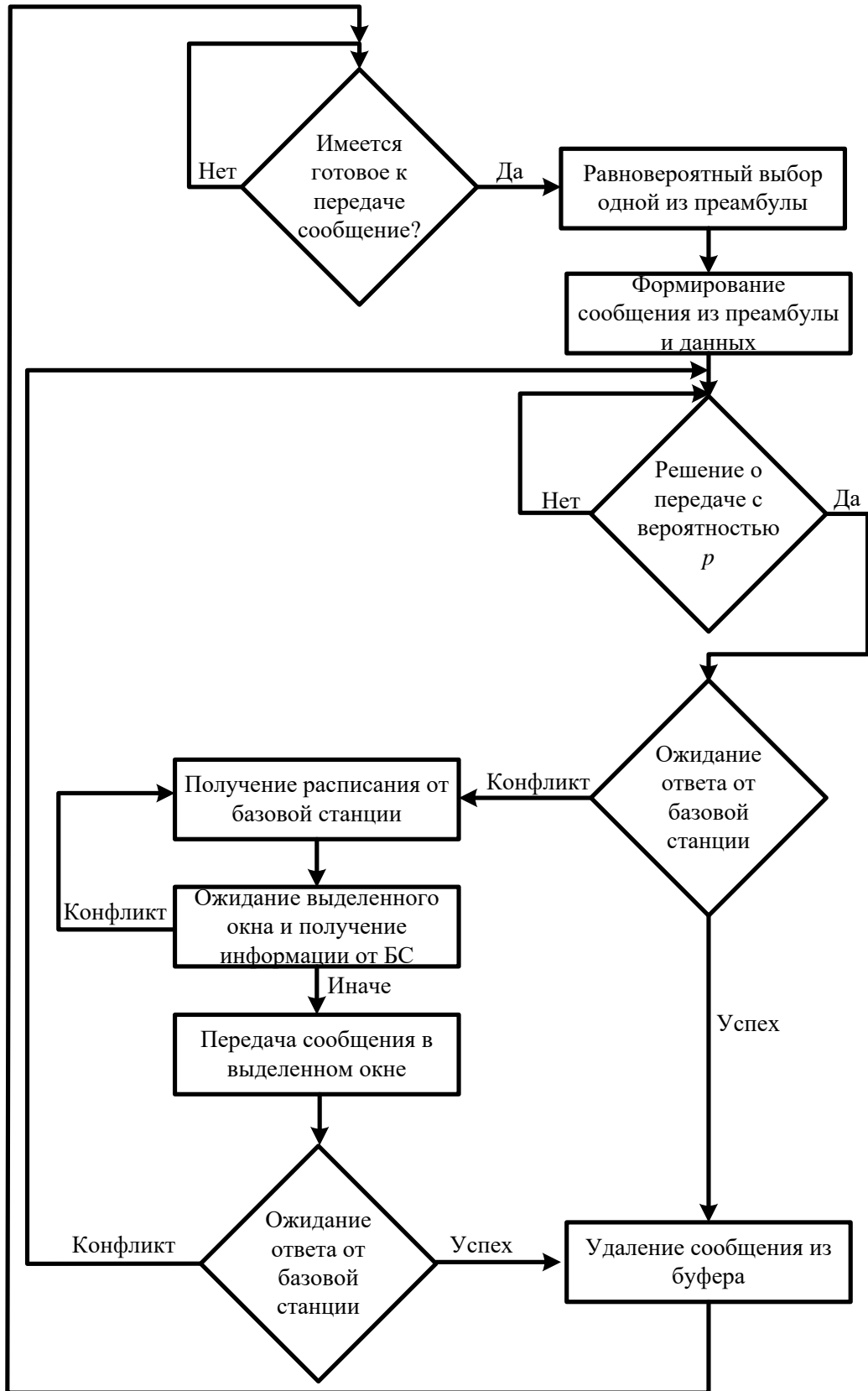


Рисунок 4.3 — Схема работы ПУ для неблокированного алгоритма

Приведём пример работы блокированного алгоритма. Временная диаграмма примера приведена на рисунке 4.5 (П — "Пусто", У — "Успех", К — "Конфликт"). Опишем события в системе по окнам:

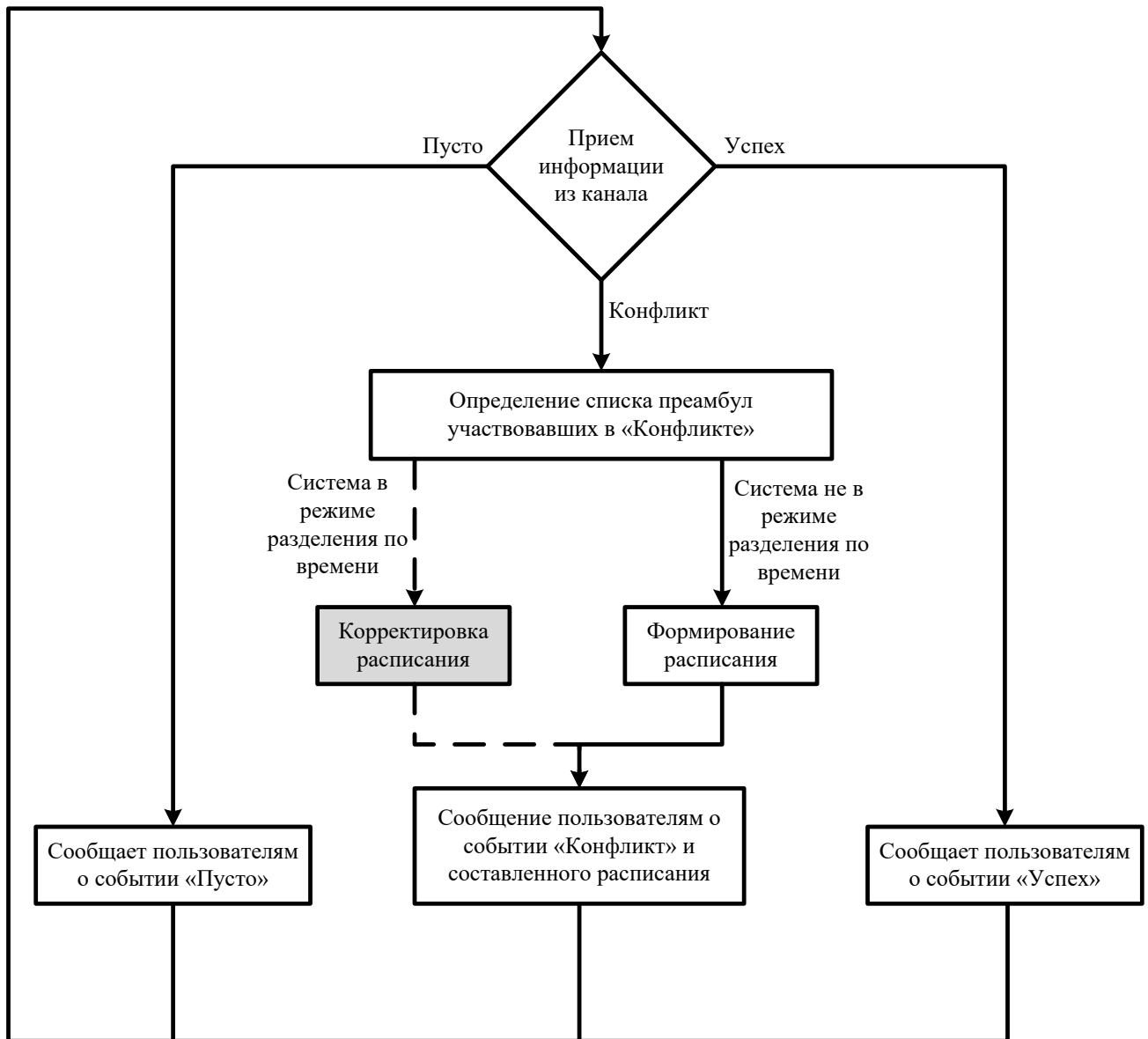


Рисунок 4.4 — Схема работы БС для заблокированного и неблокированного алгоритмов

- **Первое окно.** В начале работы система пуста, то есть, нет пользовательских устройств с готовыми к передаче сообщениями. В окне произошло событие "Пусто". В течение окна появляется сообщение у первого пользователя и он выбирает третью преамбулу —  $A_1(Pr_3)$ .
- **Второе окно.** В начале второго окна у первого пользователя есть готовое сообщение, но с вероятностью  $1 - p$  он решил не передавать. В окне произошло событие "Пусто". В течение окна появляются сообщения у 2-го, 3-го и 5-го пользователей, которые выбрали 2-ю, 1-ю и 1-ю преамбулы соответственно ( $A_2(Pr_2)$ ,  $A_3(Pr_1)$ ,  $A_5(Pr_1)$ ).

- **Третье окно.** Сообщение решил передавать только второй пользователь. Так как в окне передавал только один пользователь, то в окне произошло событие "Успех", второй пользователь успешно передаёт своё сообщение и удаляет его из буфера. В течение окна у 2-го пользователя появляется новое сообщение, а у 7-го первое, и они выбрали 7-ю и 5-ю преамбулы соответственно ( $A_2(Pr_7)$ ,  $A_7(Pr_5)$ ).
- **Четвёртое окно.** В окне решили передавать 1-ый, 2-ой, 3-ий, 5-ый и 7-ой пользователи. Так как передавало больше одного пользователя, то произошло событие "Конфликт". Базовая станция детектирует следующий список преамбул:  $Pr_1$ ,  $Pr_3$ ,  $Pr_5$ ,  $Pr_7$ . После чего формирует расписание на 4 окна (например, по возрастанию номера преамбулы в списке) и сообщает его пользователям, система переходит в режим с разделением по времени.
- **Пятое окно.** Система находится в режиме разделения по времени, согласно расписанию в текущем окне могут передавать только пользователи, участвовавшие в конфликте и выбравшие *первую* преамбулу. Таких пользователей двое — это пользователи под номером три и пять. Они передают свои сообщения, и происходит событие "Конфликт". Так как "Конфликт" произошёл между пользователями в течение работы расписания (так как пользователи выбрали одинаковую преамбулу), то в соответствии с алгоритмом, они откладывают повторные попытки передачи до окончания режима разделения по времени. После его окончания пользователи три и пять снова могут попытаться передать сообщение с вероятностью  $p$ . Новых сообщений в течение окна не возникло.
- **Шестое окно.** Система находится в режиме разделения по времени, согласно расписанию в текущем окне могут передавать только пользователи, участвовавшие в конфликте и выбравшие *третью* преамбулу. Такой пользователь один — это пользователь под номером три. Он передаёт свое сообщение и происходит событие "Успех". В течение окна появилось сообщение у четвёртого абонента и он выбрал седьмую преамбулу —  $A_4(Pr_7)$ . Так как система находится в режиме разделения по времени, то пользователь откладывает попытки передать свое сообщение до его окончания.

- **Седьмое окно.** Система находится в режиме разделения по времени, согласно расписанию в текущем окне могут передавать только пользователи, участвовавшие в конфликте и выбравшие *пятую* преамбулу. Седьмой пользователь передаёт свое сообщение в данном окне, и происходит событие "Успех". В течение окна новых сообщений не возникало.
- **Восьмое окно.** Система находится в режиме разделения по времени, согласно расписанию в текущем окне могут передавать только пользователи, участвовавшие в конфликте и выбравшие *седьмую* преамбулу. Второй пользователь передают свое сообщение в окне, происходит событие "Успех". В течение окна новых сообщений не возникало.
- **Девятое окно.** Режим разделения по времени был завершен. Пользователи с готовыми к передаче сообщениями, которые отложили свои попытки передачи, могут принять решение об отправке с вероятностью  $p$ . Пользователи 3-ий и 4-ый решили передавать, а пятый нет. Возникает "Конфликт". БС детектирует первую и седьмую преамбулы, составляет расписание и сообщает его пользователям. Система переходит в режим разделения по времени. Пятому пользователю придется отложить свои попытки по передаче сообщения до его завершения.
- **Десятое окно.** Система находится в режиме разделения по времени, согласно расписанию в текущем окне могут передавать только пользователи, участвовавшие в конфликте и выбравшие *первую* преамбулу. Третий пользователь передают свое сообщение в окне, происходит событие "Успех". В течение окна новых сообщений не возникало.
- **Одиннадцатое окно.** Система находится в режиме разделения по времени, согласно расписанию в текущем окне могут передавать только пользователи, участвовавшие в конфликте и выбравшие *седьмую* преамбулу. Четвёртый пользователь передают свое сообщение в окне, происходит событие "Успех". В течение окна новых сообщений не возникало.

Приведём пример работы неблокированного алгоритма. Временная диаграмма примера приведена на рисунке 4.6. Опишем события в системе по окнам:

- **Первое окно.** В начале работы система пуста, то есть, нет пользовательских устройств с готовыми к передаче сообщениями. В окне произошло событие "Пусто". В течение окна появляется сообщение у первого пользователя и он выбирает третью преамбулу —  $A_1(Pr_3)$ .

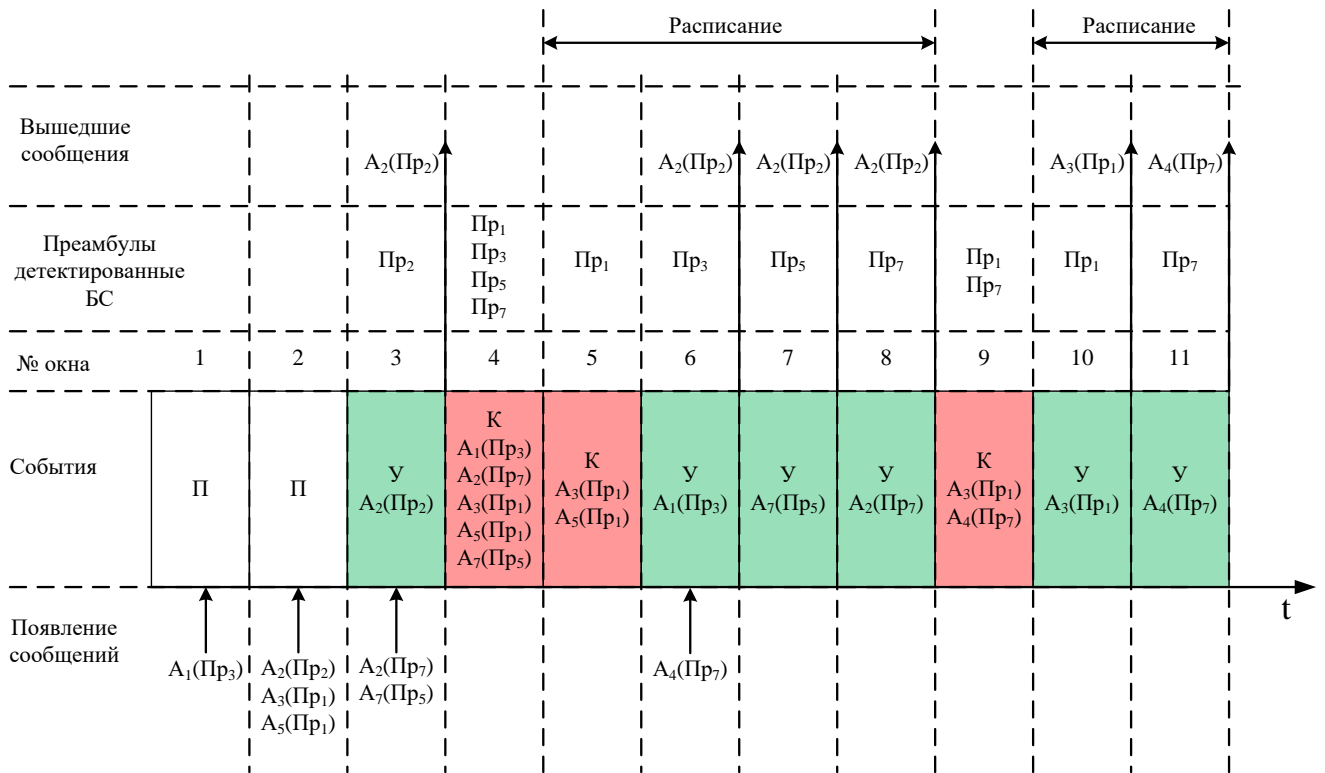


Рисунок 4.5 — Пример работы блокированного алгоритма.

- **Второе окно.** В начале второго окна у первого пользователя есть готовое сообщение, но с вероятностью  $1 - p$  он решил не передавать. В окне произошло событие "Пусто". В течение окна появляются сообщения у 2-го и 3-го пользователей, которые выбрали 2-ю и 1-ю преамбулы соответственно ( $A_2(Pr_2)$ ,  $A_3(Pr_1)$ ).
- **Третье окно.** С вероятностью  $p$ , свое сообщение решил передавать только второй пользователь. Так как в окне передавал только один пользователь, то произошло событие "Успех", второй пользователь успешно передаёт своё сообщение и удаляет его из буфера. В течение окна у 2 пользователя появляется новое сообщение, а у 7-го — первое, и они выбрали 7-ю и 5-ю преамбулы соответственно ( $A_2(Pr_7)$ ,  $A_7(Pr_5)$ ).
- **Четвёртое окно.** В окне решили передавать 1-ый, 2-ой, 3-ий и 7-ой пользователи. Так как передавало больше одного пользователя, произошло событие "Конфликт". Базовая станция детектирует следующий список преамбул:  $Pr_1$ ,  $Pr_3$ ,  $Pr_5$ ,  $Pr_7$ . После чего формирует расписание на 4 окна (например, по возрастанию номера преамбулы в списке) и сообщает его пользователям, система переходит в режим с разделением по времени.

- **Пятое окно.** Система находится в режиме разделения по времени, согласно расписанию в текущем окне будут гарантированно передавать пользователи, участвовавшие в конфликте и выбравшие *первую* преамбулу. Пользователи, находящиеся в процессе разрешения конфликта ждут своего окна. Пользователи, не участвующие в разрешении конфликта, могут попытаться передать сообщение с вероятностью  $p$ , однако сейчас таких пользователей нет. Третий пользователь успешно передаёт свое сообщение — событие "Успех". Новых сообщений в течение окна не возникало.
- **Шестое окно.** Система находится в режиме разделения по времени, согласно расписанию в текущем окне могут передавать только пользователи, участвовавшие в конфликте и выбравшие *третью* преамбулу. Такой пользователь один — это пользователь под номером один. Он передаёт свое сообщение и происходит событие "Успех". В течение окна появилось сообщение у четвёртого абонента и он выбрал шестую преамбулу —  $A_4(Pr_6)$ . Данный пользователь не находится в процессе разрешения конфликта, поэтому начиная со следующего окна может попытаться передать свое сообщение с вероятностью  $p$ .
- **Седьмое окно.** Система находится в режиме разделения по времени, согласно расписанию в текущем окне могут передавать только пользователи, участвовавшие в конфликте и выбравшие *пятую* преамбулу. Однако четвёртый пользователь не находящийся в режиме разделения по времени с вероятностью  $p$  решил передать свое сообщение. Таким образом, во время действия расписания возникает событие "Конфликт"(между четвёртым и седьмым пользователями) и БС детектирует две преамбулы (пятую и шестую). БС корректирует сформированное ранее расписание и сообщает его пользователям, находящимся в процедуре разрешения конфликта. В течение окна новых сообщений не возникало.
- **Восьмое окно.** Система снова находится в режиме разделения по времени, согласно новому расписанию в текущем окне могут передавать только пользователи, участвовавшие в конфликте и выбравшие *пятую* преамбулу. Такой пользователь один. Седьмой пользователь передаёт свое сообщение — событие "Успех". В течение окна новых сообщений не возникало.



- **Девятое окно.** Система находится в режиме разделения по времени, согласно расписанию в текущем окне могут передавать только пользователи, участвовавшие в разрешении конфликта и выбравшие *шестую* преамбулу. Шестой пользователь передаёт сообщение — событие "Успех". В течение окна появляется сообщение у 5-го пользователя, который выбрал 4-ю преамбулу —  $A_5(Pr_4)$ .
- **Десятое окно.** Система находится в режиме разделения по времени, согласно расписанию в текущем окне могут передавать только пользователи, участвовавшие в конфликте и выбравшие *седьмую* преамбулу. Так же присутствует пятый пользователь, который с вероятностью  $1-p$  решил не передавать. Второй пользователь передают свое сообщение в окне, согласно расписанию, и происходит событие "Успех". В течение окна появляется сообщение у 3 пользователя, который выбрал 4 преамбулу —  $A_3(Pr_4)$ .
- **Одиннадцатое окно.** Режим разделения по времени был закончен, пользователи, которые гарантированно должны были передавать согласно расписанию отсутствуют. Однако два еще находящихся в системе пользователя (3-ий и 5-ый), решают передавать в данном окне. Происходит событие "Конфликт". Однако БС детектирует только одну преамбулу (так как оба выбрали четвертую преамбулу). В данном случае БС не может составить расписание и сообщает об этом пользователям. Дальше оба пользователя снова могут попытаться передать сообщение с вероятностью  $p$ . В течение окна новых сообщений не возникало.

#### **4.4 Определение условий стабильности системы при использовании разработанных алгоритмов**

В данном подразделе проведем анализ предельной интенсивности входного потока для заблокированного и неблокированного алгоритмов при бесконечном числе преамбул ( $L \rightarrow \infty$ ). С ростом числа преамбул, вероятность выбора пользовательскими устройствами одинаковой преамбулы уменьшается, и переход в режим с разделением по времени становится более эффективным. Поэтому, с

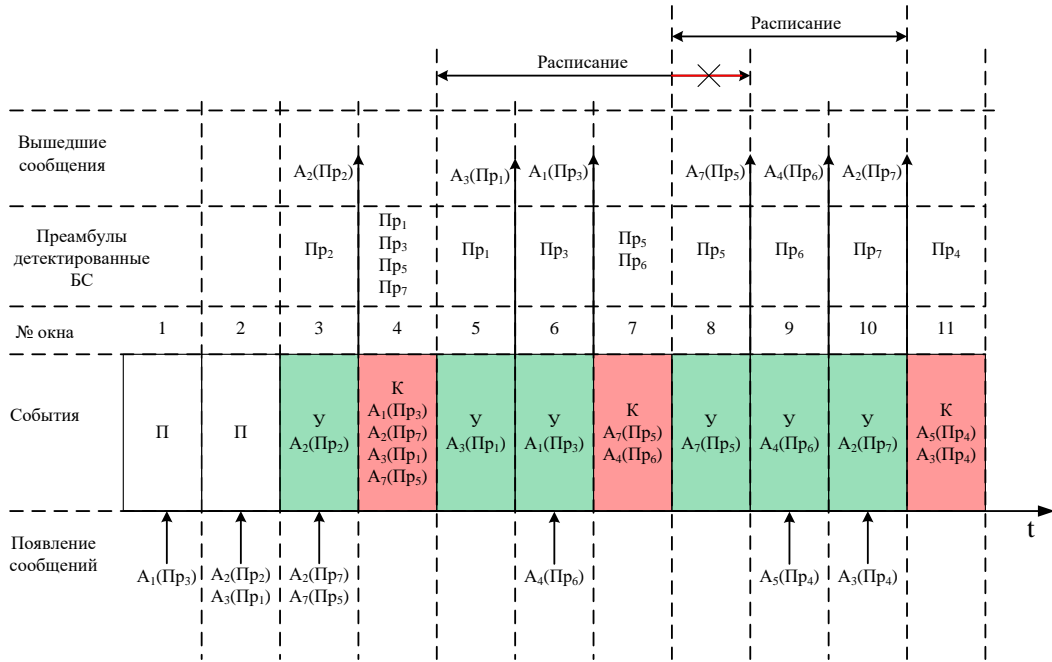


Рисунок 4.6 — Пример работы неблокированного алгоритма.

ростом числа преамбул, параметр системы  $G$  (см. допущение 4.4) увеличивается, и при  $L \rightarrow \infty$  параметр  $G \rightarrow \infty$ . Из допущения 4.4 следует, что в таком случае вероятность передачи пользовательскими устройствами  $p = 1$ .

Рассмотрим для начала анализ блокированного алгоритма. Как отмечалось ранее, данный алгоритм работает сеансами. Каждый сеанс начинается с "Конфликта" некоторой кратности (кратность 0 — событие "Пусто", кратность 1 — событие "Успех", кратность  $> 1$  — событие "Конфликт") в соответствии с допущением 4.2. Введём в рассмотрение длину  $i$ -го сеанса, которая определена следующим образом:

$$L_i = \begin{cases} K_i + 1, & \text{если } K_i > 1 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (4.1)$$

где  $K_i$  — кратность «конфликта» в первом окне  $i$ -го сеанса. Значения  $K_i$  могут быть вычислены по следующему рекуррентному уравнению:

$$K_{i+1} = \sum_{j=1}^{L_i} V_j, \quad (4.2)$$

где  $K_{i+1}$  — кратность «конфликта» в первом окне  $i + 1$  сеанса,  $L_i$  — длительность  $i$ -го сеанса в окнах,  $V_j$  — количество пользовательских устройств, появившихся в системе в  $j$ -ом окне  $i$ -го сеанса, и значения  $V_j$  распределены по закону Пуассона с параметром  $\Lambda$  (см. допущение 4.1).

Так как все значения  $V_j$  являются независимыми и имеют одинаковое распределение, то последовательность случайных величин  $K_1, K_2, K_3, \dots$  задаёт Марковскую цепь. Данная Марковская цепь является однородной, неприводимой и апериодической.

**Утверждение 4.1.** При бесконечном числе преамбул ( $L = \infty$ ), блокированный алгоритм разрешения конфликта с использованием режима разделения по времени, работа которого может быть описана последовательностью случайных величин  $K_1, K_2, K_3, \dots$ , задающих Марковскую цепь, является стабильным до интенсивности входного потока  $\Lambda < \Lambda_{кр} \approx 1$ .

*Доказательство.* Для определения критической интенсивности входного потока, до которой рассматриваемая система стабильна, необходимо ввести понятие среднего сноса Марковской цепи и определения её стабильности.

**Определение 4.1.** Пусть последовательность  $\xi_t$ , где  $t = 0, 1, 2, \dots$  задают Марковскую цепь и принимают значения из множества  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . Если данная Марковская цепь является [63]:

- неприводимой, то есть из любого состояния цепи можно попасть в другое, при этом не обязательно за один шаг;
- апериодической, если возврат в состояние происходит через случайное количество шагов;
- однородной, то есть переходные вероятности не меняются во времени.

Тогда, если существует такое значение  $Z > 0$ , что при любых  $n > Z$  средний снос Марковской цепи  $M[\xi_{t+1} - \xi_t | \xi_t = n] < 0$ , тогда Марковская цепь с бесконечным числом состояний является эргодической, а значит система — стабильной. В противном случае — неустойчивой, т.е. с течением времени  $\xi_t$  начинает неограниченно возрастать [63; 64].

Рассматриваемая Марковская цепь является однородной, неприводимой и апериодической. Запишем средний снос этой Марковской цепи при  $n > 1$  следующим образом:

$$M[K_{i+1} - K_i | K_i = n, n > 1] = M[K_{i+1} | K_i = n, n > 1] - M[K_i | K_i = n, n > 1]. \quad (4.3)$$

Так как  $K_i = n$ , а само значение  $n$  задано и является константой, то:

$$M [K_i | K_i = n, n > 1] = n. \quad (4.4)$$

Вычислим  $M [K_{i+1} | K_i = n, n > 1]$  с учётом рекуррентного выражения (4.2):

$$M [K_{i+1} | K_i = n, n > 1] = M \left[ \sum_{j=1}^{L_i} V_j \middle| K_i = n, n > 1 \right]. \quad (4.5)$$

Значения  $L_i$  определяется в соответствии с выражением (4.1), при этом  $n > 1$  и следовательно:

$$M [K_{i+1} | K_i = n, n > 1] = M \left[ \sum_{j=1}^{K_{i+1}} V_j \middle| K_i = n, n > 1 \right] = M \left[ \sum_{j=1}^{n+1} V_j \middle| n > 1 \right]. \quad (4.6)$$

Как отмечалось ранее, все значения  $V_j$  — случайные независимые величины, распределенные по одному закону, то выражение (4.5) можно переписать следующим образом:

$$M [K_{i+1} | K_i = n, n > 1] = M [(n+1)V] = (n+1)M [V], \quad (4.7)$$

где  $V$  — случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром  $\Lambda$  (см. допущение 4.1).

Известно, что математическое ожидание случайной величины распределенной по закону Пуассона с параметром  $\Lambda$  равно значению  $\Lambda$ . Откуда следует, что  $M [V] = \Lambda$ , тогда:

$$M [K_{i+1} | K_i = n, n > 1] = (n+1)\Lambda. \quad (4.8)$$

С учётом (4.3), (4.4) и (4.8) средний снос Марковской цепи для заблокированного алгоритма определяется в соответствии с выражением:

$$M [K_{i+1} - K_i | K_i = n, n > 1] = \Lambda(n+1) - n. \quad (4.9)$$

Как видно из выражения (4.9), средний снос зависит от значения  $n$ , при этом система не стабильна, если найдётся такое  $n$ , при котором  $\Lambda(n+1) - n \geq 0$ . Следовательно, система не стабильна при:

$$\Lambda \geq \frac{n}{n+1}. \quad (4.10)$$

Найдём предел выражения (4.10) при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1. \quad (4.11)$$

Из выражения (4.11) следует, что система с заблокированным алгоритмом стабильна до  $\Lambda < \Lambda_{\text{кр}} \approx 1$ , что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим анализ неблокированного алгоритма. Введём в рассмотрение количество активных пользовательских устройств в системе в момент времени  $t$  —  $N_t$ . Так же введём индикатор —  $M_t$ , определяющий появлялись ли новые пользователи в течение предыдущего окна, так как такое событие может привести к конфликту и перестроению расписания. Тогда работа системы может быть описана следующей системой рекуррентных уравнений:

$$\begin{cases} N_{t+1} = N_t - I\{M_t = 0, N_t > 0\} - \\ \quad - I\{M_t = 1, N_t = 1\} + V_t, \\ M_{t+1} = I\{V_t > 0\} \end{cases} \quad (4.12)$$

где  $N_{t+1}$  — количество активных пользовательских устройств в системе в момент времени  $t+1$ ,  $N_t$  — количество активных пользовательских устройств в системе в момент времени  $t$ ,  $V_t$  — количество пользовательских устройств поступивших в систему в момент времени  $t$ ,  $I\{\text{Утверждение}\}$  — индикаторная функция, определенная следующим образом:

$$I\{\text{Утверждение}\} = \begin{cases} 1, & \text{утверждение верно} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}. \quad (4.13)$$

Из системы рекуррентных уравнений (4.12) следует, что последовательность пар значений  $(N_t, M_t)$  образуют двумерную Марковскую цепь, в которой первая цифра состояния означают количество активных пользовательских устройств в системе, а вторая определяет, появлялись ли новые активные пользователи в предыдущем окне. Переходные вероятности для данной Марковской цепи можно вычислить по следующим выражениям:

$$\Pr \{ (j,0) | (0,0) \} = \begin{cases} e^{-\lambda}, j = 0 \\ 0, j > 0 \end{cases} ;$$

$$\Pr \{ (j,1) | (0,0) \} = \begin{cases} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}, j > 0 \\ 0, j = 0 \end{cases} ;$$

$$\Pr \{ (j,0) | (0,1) \} = 0 ;$$

$$\Pr \{ (j,1) | (0,1) \} = 0 ;$$

$$\Pr \{ (j,0) | (1,0) \} = \begin{cases} e^{-\lambda}, j = 0 \\ 0, j > 0 \end{cases} ;$$

$$\Pr \{ (j,1) | (1,0) \} = \begin{cases} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}, j > 0 \\ 0, j = 0 \end{cases} ;$$

$$\Pr \{ (j,0) | (1,1) \} = \begin{cases} e^{-\lambda}, j = 0 \\ 0, j > 0 \end{cases} ;$$

$$\Pr \{ (j,1) | (1,1) \} = \begin{cases} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}, j > 0 \\ 0, j = 0 \end{cases} ;$$

$$\Pr \{ (j,0) | (i,0) \} = \begin{cases} e^{-\lambda}, j = i - 1 \\ 0, j > 0 \end{cases} ;$$

$$\Pr \{ (j,1) | (i,0) \} = \begin{cases} \frac{\lambda^{(j-i+1)}}{(j-i+1)!} e^{-\lambda}, j \geq i \\ 0, j < i \end{cases} ;$$

$$\Pr \{ (j,0) | (i,1) \} = \begin{cases} e^{-\lambda}, j = i \\ 0, j \neq i \end{cases} ;$$

$$\Pr \{ (j,1) | (i,1) \} = \begin{cases} \frac{\lambda^{(j-i)}}{(j-i)!} e^{-\lambda}, j > i \\ 0, j \leq i \end{cases} .$$

В общем случае для анализа эргодичности двумерной Марковской цепи требуется сложный анализ [41]. Для рассматриваемой цепи анализ упрощается, в связи с тем, что  $M_t$  образует последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин. Для любого значения  $t$  верно следующее:

$$\Pr \{ M_t = i \} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda}, i = 1 \\ e^{-\lambda}, i = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Похожая задача решалась в работе [115].

**Утверждение 4.2.** *Марковская цепь, описывающая работу системы для неблокированного алгоритма, является эргодической, и система стабильна до интенсивности входного потока  $\Lambda < W(1) \approx 0.5671$ , где  $W(\cdot)$  — это  $W$ -функция Ламберта [116; 117].*

*Доказательство.* Принимая в расчёт описанную ранее особенность рассматриваемой Марковской цепи, при анализе её эргодичности достаточно рассматривать средний снос только по компоненте  $N_t$ . С учётом определения 4.1 и выражения (4.12), вычислим  $M[N_{t+1} - N_t | N_t = n]$  принимая во внимание, что  $n \gg 1$ :

$$\begin{aligned} M[N_{t+1} - N_t | N_t = n] &= M \left[ \begin{array}{c} V_t - I\{M_t = 0, N_t > 0\} - \\ -I\{M_t = 1, N_t = 1\} \end{array} \middle| N_t = n \right] = \\ &= M[V_t | N_t = n] - M[I\{M_t = 0, N_t > 0\} | N_t = n] - M[I\{M_t = 1, N_t = 1\} | N_t = n] \end{aligned} \quad (4.15)$$

Как отмечалось ранее в соответствии со свойствами Пуассоновского распределения с параметром  $\Lambda$ :

$$M[V_t | N_t = n] = M[V_t] = \Lambda. \quad (4.16)$$

Так как рассматривается система при  $n \gg 1$ , то исходя из выражений (4.13) и (4.14) можно показать, что:

$$\begin{aligned} M[I\{M_t = 0, N_t > 0\} | N_t = n] &= \Pr\{M_t = 0 | N_t = n\} \Pr\{N_t > 0 | N_t = n\} = \\ &= \Pr\{M_t = 0\} = e^{-\Lambda} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Исходя из выражения (4.13), а так же того, что  $n \gg 1$ , следует:

$$M[I\{M_t = 1, N_t = 1\} | N_t = n] = 0. \quad (4.18)$$

Подставив результаты из (4.16), (4.17) и (4.18) в выражение (4.15), получим:

$$M[N_{t+1} - N_t | N_t = n] = \Lambda - e^{-\Lambda}. \quad (4.19)$$

Как видно из выражения (4.19),  $M[N_{t+1} - N_t | N_t = n]$  не зависит от значения  $n$ . Следовательно, система стабильна до значения  $\Lambda$ , определяемого из решения уравнения:

$$e^{-\Lambda} = \Lambda. \quad (4.20)$$

Для решения уравнения (4.20) можно воспользоваться  $W$ -функцией Ламберта [116]. Введём следующее определение:

**Определение 4.2.**  $W$ -функция Ламберта позволяет находить точные решения трансцендентных алгебраических уравнений вида:

$$e^{-cx} = a_0(x - r). \quad (4.21)$$

Решение уравнения (4.21) с помощью функции Ламберта вычисляется как:

$$x = r + \frac{1}{c} W \left( \frac{ce^{-cr}}{a_0} \right), \quad (4.22)$$

где  $W(x)$  – это  $W$ -функция Ламберта.

С учётом определения 4.2 представим уравнения (4.20) в виде уравнения (??). Тогда верны следующие значения:  $x = \Lambda$ ,  $r = 0$ ,  $c = 1$ ,  $a_0 = 1$ , следовательно, подставив данные значения в (4.22) получим следующее решение уравнения (4.20):

$$\Lambda = W(1). \quad (4.23)$$

При вычислении функции Ламберта из (4.23) получается  $\approx 0,5671$ . То есть рассматриваемая Марковская цепь стабильна до  $\Lambda < W(1) \approx 0,5671$ , что и требовалось доказать.

Следует отметить, что похожий результат для некоторого гипотетического алгоритма с гарантированной первой передачей был получен в работе [118].

Проведя анализ предельной интенсивности входного потока, до которого система остаётся стабильной, для заблокированного и неблокированного алгоритмов при бесконечном числе преамбул ( $L \rightarrow \infty$ ) были получены следующие результаты:

- Блокированный алгоритм стабилен при  $\Lambda < 1$  (см. утверждение 4.1);
- Неблокированный алгоритм стабилен при  $\Lambda < W(1) \approx 0,5671$  (см. утверждение 4.2).

Откуда следует, что при бесконечном числе преамбул заблокированный алгоритм эффективней на 43,3%. Единственным преимуществом неблокированного



алгоритма является то, что пользовательским устройствам, без готовых к передаче сообщений, нет необходимости постоянно следить за работой системы и слушать канал. Ожидается, что при уменьшении числа преамбул данный выигрыш заблокированного алгоритма не будет уменьшаться, а даже может расти.

#### 4.5 Анализ средней задержки при стабильной работе системы

В данном подразделе будет представлен анализ средней задержки в рассматриваемых системах. Для начала проведем анализ для неблокированного алгоритма случайного множественного доступа.

В системе с неблокированным алгоритмом сообщения могут появляться в течение окна и оказывать влияние на работу системы в следующем окне. Так если система находится в режиме разделения времени, то появившееся в течение окна сообщение вызовет конфликт в следующем окне. Для учёта таких событий при описании числа активных абонентов в системе с помощью рекуррентного уравнения необходимо использовать двумерную Марковскую цепь, что было показано в предыдущем подразделе при анализе критической интенсивности входного потока (см. (4.12)). Как отмечалось ранее, в общем случае использование такой цепи усложняет анализ системы. Поэтому для анализа средней задержки в данном подразделе введём вспомогательную систему, в которой сообщения могут появляться только в начале очередного окна и поэтому могут сразу же передаваться. Пример показывающий различие основной и вспомогательной системы приведён на рисунке 4.7. Как и раньше на рисунке:  $ПУ_i$  — пользовательское устройство с номером  $i$ , "П" — событие "Пусто", "У" — событие "Успех", "К" — событие "Конфликт"

Сравнивая основную и вспомогательную системы, можно показать справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 4.3.** Пусть  $\bar{N}(\Lambda)$  — среднее число пользовательских устройств в основной системе,  $\bar{Q}(\Lambda)$  — среднее число пользовательских устройств в вспомогательной системе,  $\Lambda$  — интенсивность входного потока, то справедливо следующее равенство:

$$\bar{N}(\Lambda) = \bar{Q}(\Lambda) + \Lambda. \quad (4.24)$$

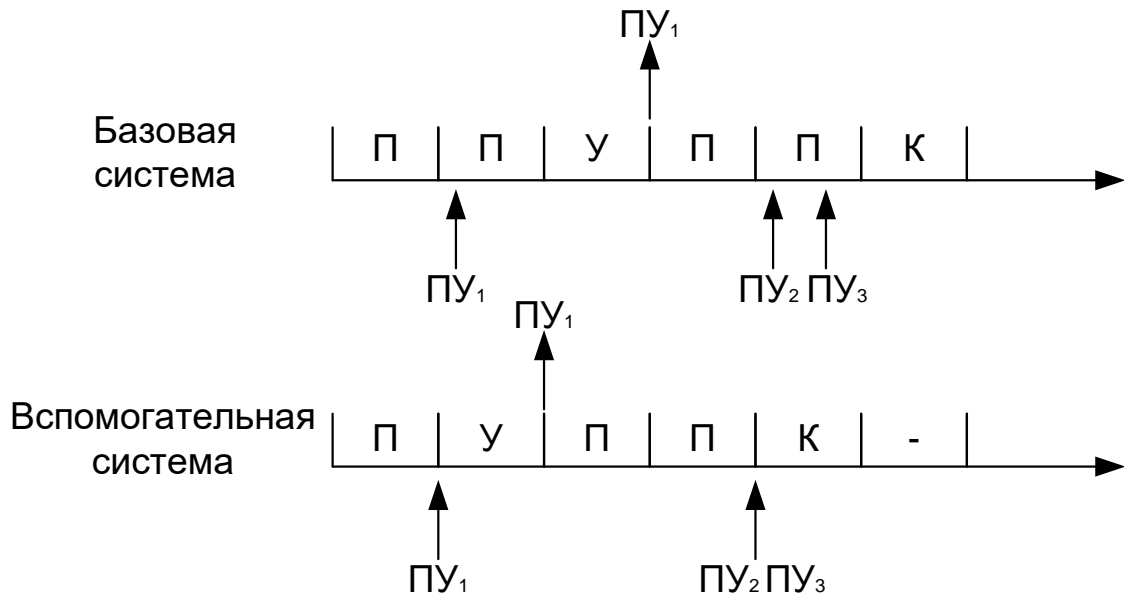


Рисунок 4.7 — Отличие основной (базовой) и вспомогательной систем

*Доказательство.* Доказательство приводится в работах [119; 120].  
Для вспомогательной системы верно следующее утверждение.

**Утверждение 4.4.** Среднее число пользовательских устройств во вспомогательной системе при  $\Lambda < \Lambda_{кр} = W(1)$ , где  $W(x)$  — функция Ламберта, может быть вычислено как:

$$\bar{Q}(\Lambda) = \frac{\Lambda^2(1 - \Lambda) + 2\Lambda(1 - e^{-\Lambda})}{2(e^{-\Lambda} - \Lambda)(1 - \Lambda)}. \quad (4.25)$$

*Доказательство.* Обозначим через  $Q_k$  число пользовательских устройств в окне с номером  $k$ . Тогда число пользовательских устройств в следующем окне может быть вычислено по рекуррентному уравнению, описывающему работу системы:

$$Q_{k+1} = Q_k + V_k - I(V_k = 1)I(Q_k = 0) - I(V_k = 0)I(Q_k > 0), \quad (4.26)$$

где  $V_k$  — число пользовательских устройств, появившихся в окне с номером  $k$ ,  $I(\text{утверждение})$  — индикаторная функция, принимающая значения:

$$I\{\text{утверждение}\} = \begin{cases} 1, & \text{верно} \\ 0, & \text{не верно} \end{cases}. \quad (4.27)$$

Используя выражение (4.26), можно легко проанализировать устойчивость системы. Предположим, что в начальный момент времени  $Q_0 = q$  и  $q$  при этом

является большим значением. Так как  $V_k$  и  $Q_k$  независимые случайные величины, тогда  $M[I(V_k = 1)I(Q_k = 0)] = 0$ .  $M[V_k] = \Lambda$  (по свойству Пуассоновского распределения с параметром  $\Lambda$ ).  $M[I(V_k = 0)I(Q_k > 0)] = e^{-\Lambda}$ . Исходя из сказанного, средний снос определяется как:

$$E[Q_1 - Q_0 | Q_0 = q] = \Lambda - e^{-\Lambda}. \quad (4.28)$$

Стабильность соблюдается, пока значение выражения (4.28) отрицательно (смотри [121]). Это эквивалентно тому, что  $\Lambda < e^{-\Lambda}$ , решение данного неравенства можно найти, используя функцию Ламберта, и полученное значение  $\Lambda_{кр} = W(1) \approx 0.5671$ , что аналогично базовой системе и было показано в предыдущем подразделе (см. 4.2).

Будем рассматривать, что система работает бесконечно долгое время. Если система является стабильной, то  $Q_k$  и  $Q_{k+1}$  имеют одинаковое распределение и как следствие одинаковые моменты. Возьмем математическое ожидание от левой и правой части формулы (4.26). Как отмечалось ранее,  $M[V_k] = \Lambda$ .

Рассмотрим  $M[I(V_k = 1)I(Q_k = 0)]$ . Данное математическое ожидание равно вероятности того, что обе индикаторные функции будут верны. Вероятность того, что появилось одно пользовательское устройство при Пуассоновском входном потоке с параметром  $\Lambda$  равно  $\Pr\{V_k = 1\} = \Lambda e^{-\Lambda}$ . Обозначим через  $\pi_0$  стационарную вероятность того, что система пустая. Тогда:

$$M[I(V_k = 1)I(Q_k = 0)] = \Lambda e^{-\Lambda} \pi_0. \quad (4.29)$$

Используя аналогичные рассуждения можно показать, что:

$$M[I(V_k = 0)I(Q_k > 0)] = e^{-\Lambda} (1 - \pi_0). \quad (4.30)$$

С учётом написанного ранее получим:

$$M[Q_{k+1}] = M[Q_k] + \Lambda - \Lambda e^{-\Lambda} \pi_0 - e^{-\Lambda} (1 - \pi_0), \quad (4.31)$$

где через  $\pi_0$  обозначена стационарная вероятность того, что система пустая. Используя, что  $E[Q_{k+1}] = E[Q_k]$  можно записать:

$$\Lambda = \Lambda e^{-\Lambda} \pi_0 + e^{-\Lambda} (1 - \pi_0). \quad (4.32)$$

Что означает

$$\pi_0 = \frac{e^{-\Lambda} - \Lambda}{e^{-\Lambda}(1 - \Lambda)}. \quad (4.33)$$

Возведём в квадрат правую и левую части рекуррентного уравнения (4.26) и возьмем математическое ожидание, проведя упрощения, получим следующее выражение:

$$M[(Q_{k+1})^2] = M[(Q_k)^2] + (\Lambda^2 + \Lambda) + (\Lambda e^{-\Lambda} \pi_0 - e^{-\Lambda}(1 - \pi_0)) + \\ + 2M[Q_k]\Lambda - 2M[Q_k]e^{-\Lambda} - 2\Lambda e^{-\Lambda} \pi_0. \quad (4.34)$$

Так как  $M[(Q_{k+1})^2] = M[(Q_k)^2]$ , то формулу (4.34) запишем как:

$$0 = \Lambda^2 + 2\Lambda - 2M[Q_k](e^{-\Lambda} - \Lambda) - 2\Lambda e^{-\Lambda} \pi_0. \quad (4.35)$$

Далее, используя выражение (4.33), получаем уравнение

$$2M[Q_k](e^{-\Lambda} - \Lambda) = \Lambda^2 + 2\Lambda - 2\Lambda \frac{e^{-\Lambda} - \Lambda}{(1 - \Lambda)}, \quad (4.36)$$

что означает

$$M[Q_k] = \frac{\Lambda^2 + 2\Lambda - 2\Lambda \frac{e^{-\Lambda} - \Lambda}{(1 - \Lambda)}}{2(e^{-\Lambda} - \Lambda)} = \frac{\Lambda^2(1 - \Lambda) + 2\Lambda(1 - e^{-\Lambda})}{2(e^{-\Lambda} - \Lambda)(1 - \Lambda)}. \quad (4.37)$$

Выражение (4.37) определяет среднее количество пользовательских устройств во вспомогательной системе при  $k \rightarrow \infty$ , при фиксированном  $\Lambda < \Lambda_{кр} = 0,5671$ . Левую часть выражения (4.37) можно обозначить как  $\bar{Q}(\Lambda)$ , что соответствует утверждению 4.4, что и требовалось доказать.

С учётом написанного ранее для основной системы верно следующее.

**Утверждение 4.5.** *Среднее число пользователей в системе  $\bar{N}(\Lambda)$  при заданном значении интенсивности  $\Lambda < \Lambda_{кр}$ , для основной системы определяется как*

$$\bar{N}(\Lambda) = \frac{2\Lambda - \Lambda^2(1 + 2e^{-\Lambda} - \Lambda)}{2(e^{-\Lambda} - \Lambda)(1 - \Lambda)}. \quad (4.38)$$

*Средняя задержка в системе  $\bar{D}(\Lambda)$  при заданном значении интенсивности  $\Lambda < \Lambda_{кр}$ , для основной системы определяется по формуле*

$$\bar{D}(\Lambda) = \frac{2 - \Lambda(1 + 2e^{-\Lambda} - \Lambda)}{2(e^{-\Lambda} - \Lambda)(1 - \Lambda)} + 0,5. \quad (4.39)$$

*Доказательство.* С учётом утверждения 4.3, а так же 4.4 можно легко показать, что [120]

$$\bar{N}(\Lambda) = \frac{\Lambda^2(1 - \Lambda) + 2\Lambda(1 - e^{-\Lambda})}{2(e^{-\Lambda} - \Lambda)(1 - \Lambda)} + \Lambda = \frac{2\Lambda - \Lambda^2(1 + 2e^{-\Lambda} - \Lambda)}{2(e^{-\Lambda} - \Lambda)(1 - \Lambda)}. \quad (4.40)$$

Используя теорему Литтла [62] и выражение (4.5), можно определить среднюю задержку в основной системе как

$$\bar{D}(\Lambda) = \frac{\bar{N}(\Lambda)}{\Lambda} + 0,5 = \frac{2 - \Lambda(1 + 2e^{-\Lambda} - \Lambda)}{2(e^{-\Lambda} - \Lambda)(1 - \Lambda)} + 0,5. \quad (4.41)$$

Значение 0,5 в формуле (4.41) соответствует математическому ожиданию начала окна в синхронной системе массового обслуживания [122; 123]. Выражения (4.40) и (4.41) верны до  $\Lambda < \Lambda_{\text{кр}}$ . Утверждение доказано.

Вычисление средней задержки для заблокированной системы трудная задача, поэтому дальше будет приведено сравнение двух систем (блокированной и неблокированной) с использованием имитационного моделирования.

На рисунке 4.8 представлены графики средней задержки для заблокированного и неблокированного алгоритмов при бесконечном числе преамбул. Для неблокированного алгоритма задержка получена в соответствии с формулой (4.39), а так же методом имитационного моделирования. Как видно из полученных результатов теоретические значения совпадают с моделированием с учётом заданной точности. Для заблокированного алгоритма средняя задержка была получена методом имитационного моделирования. Средняя задержка для заблокированного алгоритма близка или ниже, чем для неблокированного, в том числе и до критической интенсивности второго. После  $\Lambda > 0,5671$  задержка для неблокированного алгоритма стремится к бесконечности, а заблокированный алгоритм продолжает работать.

Проведя сравнение средней задержки в заблокированном и неблокированном алгоритмах при бесконечном числе преамбул, было показано (см. рис. 4.8), что заблокированный алгоритм имеет среднюю задержку ниже неблокированного.

Исходя из результатов предыдущего и текущего подразделов, далее будет подробнее рассматриваться и анализироваться заблокированный алгоритм, так как выигрыш заблокированного алгоритма оказывается более значительным, чем потенциальные преимущества неблокированного.

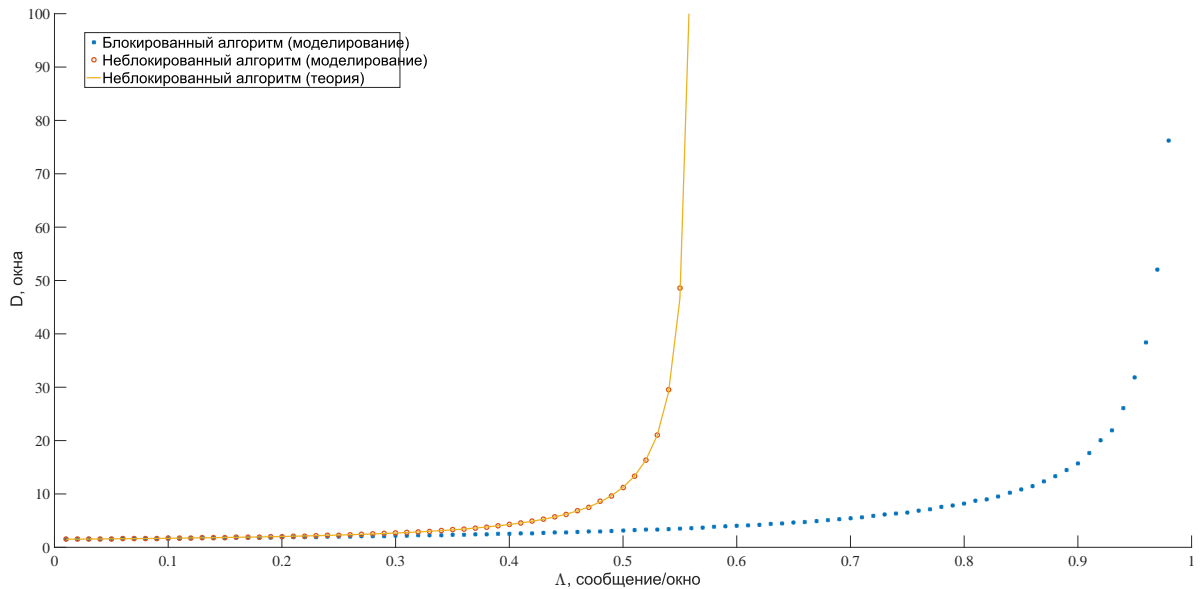


Рисунок 4.8 — Зависимость средней задержки  $\bar{D}(\Lambda)$  от входной интенсивности  $\Lambda$  при бесконечном числе преамбул

#### 4.6 Исследование влияния ограничений по числу преамбул на условия стабильности и среднюю задержку

В предыдущих подразделах был проведен анализ блокированного и неблокированного алгоритмов случайного доступа, использующих переход в режим разделения по времени, при бесконечном числе преамбул. В результате сравнения двух подходов было решено, что блокированный алгоритм, является более перспективным для дальнейшего анализа. В данном подразделе будет проведен анализ предельной интенсивности входного потока для системы с блокированным алгоритмом случайного множественного доступа, при конечном числе преамбул  $L < \infty$  [124; 125].

Под предельной интенсивностью входного потока, как и раньше, подразумевается критическая эффективность, до которой система остается стабильной, данное определение давалось в подразделе 2.4 (см. определение 1.5). При рассмотрении системы при бесконечном числе преамбул, для анализа области устойчивости системы, применялся аппарат Марковских цепей и средний снос. Однако при ограниченном числе преамбул могут возникать ситуации коллизии выбранных пользовательскими устройствами преамбул, которые не возникали и не учитывались при  $L = \infty$ , так как вероятность такого события стремилась к 0. Описание системы при конечном числе преамбул  $L < \infty$  с помощью Марков-

ской цепи, в частности расчёт переходных вероятностей, является трудной задачей, как и последующий анализ.

Поэтому для анализа заблокированного алгоритма с режимом разделения по времени при конечном числе преамбул будет применена теория регенерирующего случайного процесса [65].

Введём понятие критической интенсивности входного потока, через термины регенерирующих случайных процессов.

**Определение 4.3.** Пусть работа системы может быть описана некоторыми циклами работы (сеансами), таким образом, что работа системы в каждом цикле регенерации не зависит от предыдущих. Введём следующие обозначения.  $C_i$  — количество событий на  $i$ -том цикле регенерации,  $T_i$  — длина  $i$ -го цикла регенерации. Исходя из написанного ранее, значения  $C_1, C_2, \dots$  являются независимыми, так же как и  $T_1, T_2, \dots$ . Пусть  $c(t)$  — количество событий за время работы системы  $t$ . Тогда среднее число событий, то есть среднее количество сообщений покидающих систему, а следовательно — критическую интенсивность входного потока можно определить как следующий предел [65; 66]:

$$\Lambda_{кр} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c(t)}{t} = \frac{M[C]}{M[T]}, \quad (4.42)$$

где  $M[C]$  — среднее количество сообщений, успешно переданных в течение цикла регенерации,  $M[T]$  — средняя длительность цикла регенерации.

Введём следующее утверждение.

**Утверждение 4.6.** Пусть заданы количество уникальных преамбул  $L$  и параметр системы  $G$  (см. допущение 4.4). Тогда предельная интенсивность входного потока, до которой заблокированный алгоритм случайного множественного доступа с использованием режима разделения по времени стабилен, вычисляется как:

$$\Lambda_{кр} = \frac{Ge^{-\frac{G}{L}}}{1 + L \left( 1 - e^{-\frac{G}{L}} - \frac{G}{L} e^{-G} \right)}. \quad (4.43)$$

*Доказательство.* Определим циклы регенерации следующим образом. Цикл регенерации всегда начинается с окна случайного доступа, когда пользовательские устройства решают передавать с вероятностью  $p$  и не передавать

с вероятностью  $1 - p$ . Цикл регенерации может содержать или не содержать окна с режимом разделения по времени.

В рассматриваемой системе  $C_i$  можно определить как количество преамбул, выбранных только одним пользователем в  $i$ -м цикле регенерации. Мы рассматриваем систему в режиме насыщения, когда  $M_{act} \rightarrow \infty$ . Пользователи передают сообщения с вероятностью  $p = \frac{G}{M_{act}}$  (см. допущение 4.4), поэтому количество пользователей, решивших передать в окне, распределяется по закону Пуассона с параметром  $G$ . Соответственно, рассматриваемые циклы регенерации независимы.

Чтобы найти среднее количество успехов в цикле  $M[C]$ , введём следующее определение количества успехов за один цикл регенерации:

$$C_i = \sum_{i=1}^L I\{p_i\}, \quad (4.44)$$

где  $L$  — количество уникальных преамбул (параметр алгоритма),  $I\{p_i\}$  — индикаторная функция, определяемая следующим образом:

$$I\{p_i\} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я преамбула была выбрана только одним пользователем} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (4.45)$$

Для начала необходимо найти среднее количество успехов в цикле регенерации при условии, что в конфликте имеется  $j$  пользователей  $M[C|j]$ :

$$M[C|j] = M\left[\sum_{i=1}^L I\{p_i|j\}\right] = \sum_{i=1}^L M[I\{p_i|j\}], \quad (4.46)$$

где  $M[I\{p_i|j\}]$  — вероятность того, что  $i$ -я преамбула выбрана единственным пользователем. Легко показать, что:

$$M[I\{p_i|j\}] = j \frac{1}{L} \left(1 - \frac{1}{L}\right)^{j-1}. \quad (4.47)$$

Подставив (4.47) в (4.46), получим:

$$M[C|j] = \sum_{i=1}^L j \frac{1}{L} \left(1 - \frac{1}{L}\right)^{j-1} = j \left(1 - \frac{1}{L}\right)^{j-1}. \quad (4.48)$$

Используя выражение (4.48), можно определить безусловное математическое ожидание среднего количества успехов в цикле регенерации следующим образом:



$$M[\mathcal{C}] = \sum_{j=0}^{\infty} M[\mathcal{C} | j] \Pr \{j \text{ пользователей решило передавать}\}. \quad (4.49)$$

Как отмечалось ранее, количество пользователей, решивших передать в окне, распределяется по закону Пуассона с параметром  $G$ . Тогда:

$$M[\mathcal{C}] = \sum_{j=0}^{\infty} j \left(1 - \frac{1}{L}\right)^{j-1} \frac{G^j}{j!} e^{-G}. \quad (4.50)$$

Перепишем сумму из (4.50) следующим образом:

$$M[\mathcal{C}] = \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{(G - \frac{G}{L})^{j-1}}{j!} G e^{-G} = G e^{-G} \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{(G - \frac{G}{L})^{j-1}}{j!}. \quad (4.51)$$

Домножим и разделим на  $e^{(G - \frac{G}{L})}$ , а так же вынесем  $(G - \frac{G}{L})^{-1}$ :

$$M[\mathcal{C}] = G e^{-G} e^{-(G - \frac{G}{L})} e^{(G - \frac{G}{L})} \left(G - \frac{G}{L}\right)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{(G - \frac{G}{L})^j}{j!}. \quad (4.52)$$

Внесем под знак суммы множитель  $e^{-(G - \frac{G}{L})}$  и рассмотрим её подробнее  $\sum_{j=0}^{\infty} j \frac{(G - \frac{G}{L})^j}{j!} e^{-(G - \frac{G}{L})}$ . Если провести замену  $u = G - \frac{G}{L}$ , то получим  $\sum_{j=0}^{\infty} j \frac{u^j}{j!} e^{-u}$ , что является вычислением математического ожидания Пуассоновского распределения с параметром  $u$ . Как известно данное математическое ожидание равняется  $u$ , а, следовательно:

$$\sum_{j=0}^{\infty} j \frac{(G - \frac{G}{L})^j}{j!} e^{-(G - \frac{G}{L})} = G - \frac{G}{L}. \quad (4.53)$$

Подставив (4.53) в (4.52) получим:

$$M[\mathcal{C}] = G e^{-G} e^{(G - \frac{G}{L})} \left(G - \frac{G}{L}\right)^{-1} \left(G - \frac{G}{L}\right). \quad (4.54)$$

Проведя упрощения:

$$M[\mathcal{C}] = G e^{-\frac{G}{L}}. \quad (4.55)$$

Продолжительность цикла регенерации можно определить как:

$$\mathcal{T}_i = \sum_{i=1}^L I \{q_i\} + I \{\text{конфликт}\}, \quad (4.56)$$

где  $\mathcal{T}_i$  — продолжительность цикла регенерации,  $I\{q_i\}$  — индикаторная функция, которая определяется следующим образом:

$$I \{q_i\} = \begin{cases} 1, & i\text{-я преамбула выбрана хотя бы одним пользователем} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (4.57)$$

$I \{\text{конфликт}\}$  — функция-индикатор конфликтов.  $M[I\{q_i|j\}]$  можно определить следующим образом:

$$M [I \{q_i | j\}] = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{L}\right)^j\right). \quad (4.58)$$

Определим условную длину цикла регенерации  $[\mathcal{T}|j]$  в зависимости от количества участвующих в нем пользователей  $j$ :

$$[\mathcal{T} | j] = \begin{cases} 1, & j \in \{0,1\} \\ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} I \{q_i | j\}, & j \geq 2 \end{cases}. \quad (4.59)$$

Используя выражение (4.59), можно найти  $M[\mathcal{T}]$ :

$$M[\mathcal{T}] = \sum_{j=0}^{\infty} M[\mathcal{T}|j] \text{Pr}\{j \text{ пользователей решило передавать}\} \quad (4.60)$$

Как и ранее, количество пользователей, решивших передать в окне, определяется по закону Пуассона с параметром  $G$ . Откуда:

$$\begin{aligned} M[\mathcal{T}] &= (1 + G)e^{-G} + \sum_{j=2}^{\infty} \left( \left(1 + M \left[ \sum_{i=1}^L I \{q_i | j\} \right] \right) \frac{G^j}{j!} e^{-G} \right) = \\ &= (1 + G)e^{-G} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{G^j}{j!} e^{-G} + \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=1}^L M [I \{q_i | j\}] \frac{G^j}{j!} e^{-G} \end{aligned}. \quad (4.61)$$

Известно, что  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{G^j}{j!} e^{-G} = 1$ , а первые два слагаемых ( $e^{-G}$  и  $Ge^{-G}$ ) присутствуют в записи (4.61). С учётом (4.58), слагаемые во внутренней сумме не зависят от параметра суммирования  $i$ . Выражение (4.61) может быть переписано как:

$$\begin{aligned}
M[\mathcal{T}] &= 1 + L \sum_{j=2}^{\infty} M[I\{q_i|j\}] \frac{G^j}{j!} e^{-G} = \\
&= 1 + L \sum_{j=2}^{\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{L}\right)^j\right) \frac{G^j}{j!} e^{-G} .
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Рассмотрим подробней сумму в выражении (4.62):

$$\sum_{j=2}^{\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{L}\right)^j\right) \frac{G^j}{j!} e^{-G} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{G^j}{j!} e^{-G} + \sum_{j=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{L}\right)^j \frac{G^j}{j!} e^{-G} . \tag{4.63}$$

Опишем вычисление каждой суммы отдельно. Для начала обратим внимание, что  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{G^j}{j!} e^{-G} = 1$ . Поэтому можно записать:

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{G^j}{j!} e^{-G} = 1 - e^{-G} - Ge^{-G} . \tag{4.64}$$

Перепишем вторую сумму в выражении (4.63), следующим образом:

$$\sum_{j=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{L}\right)^j \frac{G^j}{j!} e^{-G} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\left(G - \frac{G}{L}\right)^j}{j!} e^{-G} . \tag{4.65}$$

Проведем следующую замену  $u = G - \frac{G}{L}$ , а так же домножим и разделим сумму на  $e^u$ :

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{u^j}{j!} e^{-G} = e^{-G} e^{-u} e^u \sum_{j=2}^{\infty} \frac{u^j}{j!} = e^{-G} e^u \sum_{j=2}^{\infty} \frac{u^j}{j!} e^{-u} . \tag{4.66}$$

Аналогично написанному ранее (см. (4.64)), можно заметить, что:

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{u^j}{j!} e^{-u} = 1 - e^{-u} - ue^{-u} . \tag{4.67}$$

Тогда

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{u^j}{j!} e^{-G} = e^{-G} e^u (1 - e^{-u} - ue^{-u}) = e^{-G} e^u - e^{-G} - ue^{-G} . \tag{4.68}$$

Проведем обратную замену:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{\infty} \frac{u^j}{j!} e^{-G} &= e^{-G} e^{G - \frac{G}{L}} - e^{-G} - \left(G - \frac{G}{L}\right) e^{-G} = \\
&= e^{-\frac{G}{L}} - e^{-G} - Ge^{-G} + \frac{G}{L} e^{-G} .
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Подставим (4.64) и (4.69) в (4.63) и проведём упрощение:

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{L}\right)^j\right) \frac{G^j}{j!} e^{-G} &= 1 - e^{-G} - Ge^{-G} - \left(e^{-\frac{G}{L}} - e^{-G} - Ge^{-G} + \frac{G}{L}e^{-G}\right) = \\ &= 1 - e^{-\frac{G}{L}} - \frac{G}{L}e^{-G} \end{aligned} \quad (4.70)$$

В итоге, с учётом (4.62) и (4.70) получаем

$$M[\mathcal{T}] = 1 + L \left(1 - e^{-\frac{G}{L}} - \frac{G}{L}e^{-G}\right). \quad (4.71)$$

Подставляя выражения (4.55) и (4.71) в (4.42) (см. определение 4.3), получаем окончательную формулу для определения  $\Lambda_{\text{кр}}$  при любых заданных параметрах  $L$  и  $G$ :

$$\Lambda_{\text{кр}} = \frac{Ge^{-\frac{G}{L}}}{1 + L \left(1 - e^{-\frac{G}{L}} - \frac{G}{L}e^{-G}\right)}. \quad (4.72)$$

Что и требовалось доказать.

Как следует из утверждения 4.3, предельная интенсивность входного потока, до которой система стабильна,  $\Lambda_{\text{кр}}$  зависит как от числа преамбул  $L$ , так и от параметра системы  $G$ . Следовательно, при заданном числе преамбул  $L$  можно найти такой параметр  $G$ , который максимизирует значение  $\Lambda_{\text{кр}}$ .

На рисунке 4.9 представлены графики зависимости  $\Lambda_{\text{кр}}$  от параметра  $G$  при различном числе преамбул  $L$ . При этом, крестиком на рисунке обозначены точки максимума  $\Lambda_{\text{кр}}$ , а значения  $G$ , при которых они достигаются, получены численным путем с высокой точностью, и представлены в таблице 4.1. Как видно из рисунка, с ростом числа преамбул растёт и максимальное значение  $\Lambda_{\text{кр}}$ , при этом, значение  $G$  максимизирующее критическую интенсивность, так же возрастает.

На рисунке 4.10 представлены значения средней задержки  $D$  в рассматриваемой системе при параметре  $G$  максимизирующем  $\Lambda_{\text{кр}}$  для нескольких значений числа преамбул  $L$ , полученные путем имитационного моделирования. Значения  $\Lambda_{\text{кр}}$  взяты из таблицы 4.1. Как видно, из результатов моделирования, начиная с входной интенсивности равной критической (см. таблицу 4.1), средняя задержка стремится к бесконечности, и следовательно система становится не стабильной.

Рассмотрев анализ заблокированного алгоритма случайного множественного доступа при конечном числе преамбул, и применив теорию регенерирующих

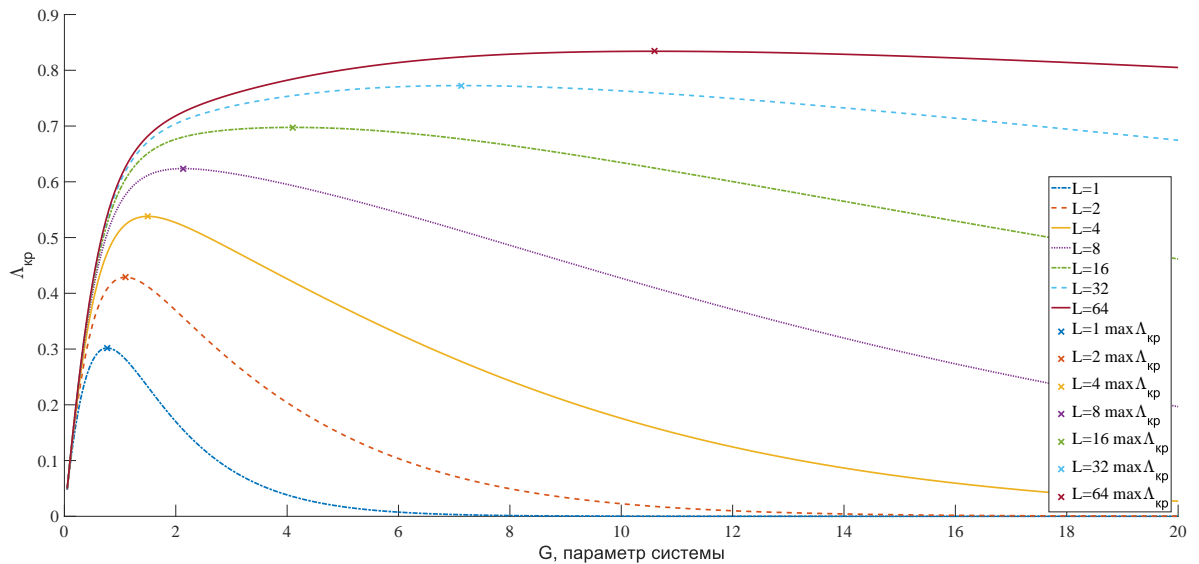


Рисунок 4.9 — Зависимость  $\Lambda_{кр}$  от параметра  $G$  при различном числе преамбул  $L$

Таблица 4.1 — Виды гибридной решающей обратной связи и работа устройств

Число преамбул, $L$	Параметр системы, $G$	$\Lambda_{кр}$
1	0,7680	0,3020
2	1,0951	0,4288
4	1,4990	0,5380
8	2,1361	0,6237
16	4,0961	0,6976
32	7,1264	0,7725
64	10,6020	0,8341
1024	44,5799	0,9565

процессов, было получено замкнутое выражение, определяющее значение критической интенсивности входного потока, как функции от числа преамбул и параметра системы, регулирующего вероятность передачи. Используя данное выражение, были найдены значения параметра  $G$ , при которых  $\Lambda_{кр}$  принимает максимальное значение при заданном числе преамбул  $L$ , данные результаты приведены в таблице 4.1, а поведение самой функции (4.43) приведено на рисунке 4.9. С помощью имитационного моделирования были получены зависимости задержки в системе при конечном числе преамбул, начиная с вычисленного значения  $\Lambda_{кр}$ , задержка в системе стремиться к бесконечности, а система становится не стабильной в соответствии с определением 1.5. Показано, что с ростом числа преамбул возрастает предельная интенсивность входного пото-

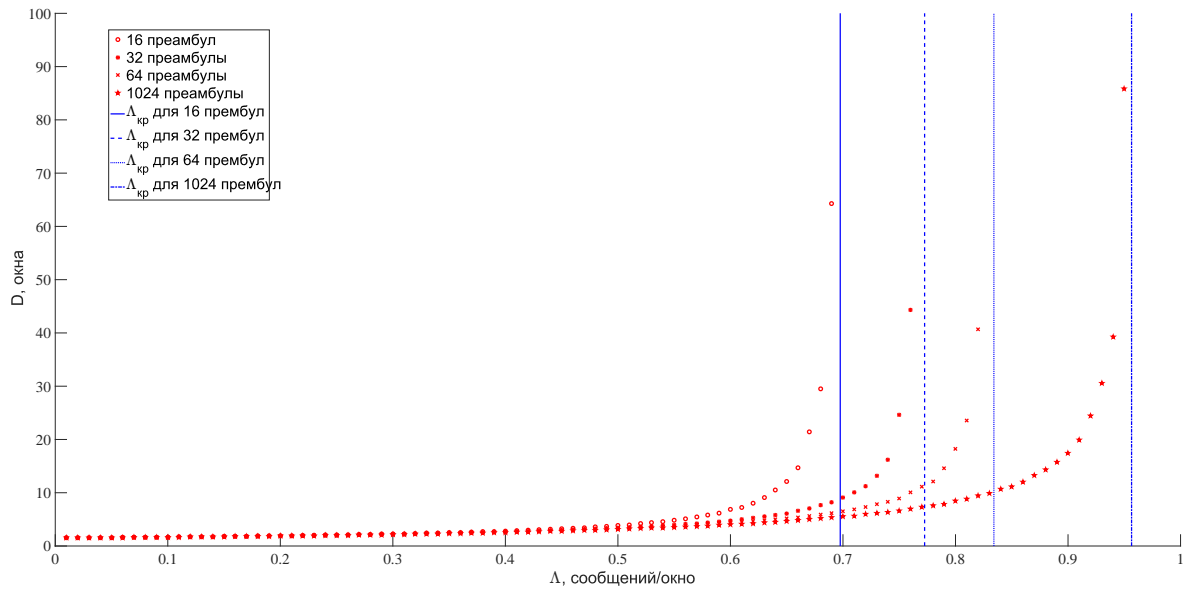


Рисунок 4.10 — Зависимость средней задержки в системе от входной интенсивности при конечном числе преамбул.

ка, до которой система стабильна, а так же возрастает параметр передачи  $G$ , максимизирующий данную характеристику системы, как отмечалось ранее в подразделе 4.4 при  $L \rightarrow \infty$  значение  $G \rightarrow \infty$ , а вероятность передачи в системе  $p \rightarrow 1$ .

#### 4.7 Энергоэффективность стабильных систем случайного доступа при использовании разработанных алгоритмов

В предыдущих разделах проводился анализ заблокированного и неблокированного алгоритма, при этом определялась предельная интенсивность входного потока  $\Lambda$  как характеристика [сообщений/окно]. Ошибки в канале, вызванные наличием аддитивного белого гауссовского шума, не влияли на данный анализ, так как допущение 4.5 предполагает, что передача осуществляется с использованием помехоустойчивого кода достаточной длины со скоростью  $R = W \log(1 + P) - \varepsilon$ , где  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Однако в разделах 2, 3 анализировалась такая характеристика, как спектральная эффективность  $\eta$ , а так же приводились границы для энергозатрат.

В данном подразделе будет рассмотрен пересчет  $\Lambda$  сообщений/окно в спектральную эффективность  $\eta$  бит/с/Гц для рассматриваемых алгоритмов. Так

же будет показан способ расчёта нижних границ для мощности сигнала  $P$  и энергии на бит  $\frac{E_b}{N_0}$ .

**Определение 4.4.** Критическая интенсивность входного потока  $\Lambda_{кр}$  связана со спектральной эффективностью  $\eta$  следующим выражением [126]:

$$\eta = \frac{\Lambda_{кр} R}{W}. \quad (4.73)$$

Из определения 4.4 следует следующее утверждение.

**Утверждение 4.7.** Нижняя граница для мощности сигнала  $P$  при заданной спектральной эффективности  $\eta$  для блокированного алгоритма при бесконечном числе преамбул определяется как

$$P = 2^\eta - 1. \quad (4.74)$$

*Доказательство.* Из допущения 4.5 следует, что  $R = W \log(1 + P) - \varepsilon$ , где  $\varepsilon \rightarrow +0$ , с учётом определения 4.4 можно записать

$$\eta < \Lambda_{кр} \log(1 + P). \quad (4.75)$$

Откуда следует

$$P > 2^{\frac{\eta}{\Lambda_{кр}}} - 1. \quad (4.76)$$

Из утверждения 4.1 следует, что  $\Lambda_{кр} = 1$ , тогда

$$P > 2^\eta - 1. \quad (4.77)$$

Что и требовалось доказать.

Аналогично может быть доказано утверждение для неблокированного алгоритма.

**Утверждение 4.8.** Нижняя граница для мощности сигнала  $P$  при заданной спектральной эффективности  $\eta$  для неблокированного алгоритма при бесконечном числе преамбул определяется как

$$P = 2^{\frac{\eta}{W(1)}} - 1, \quad (4.78)$$

где  $W(x)$  – это  $W$ -функция Ламберта, а  $W(1) \approx 0,5671$ .

*Доказательство.* Данное утверждение доказывается аналогично утверждению 4.7 с учётом утверждения 4.2.

Теперь рассмотрим анализ энергии на бит  $\frac{E_b}{N_0}$ .

**Утверждение 4.9.** *Нижняя граница для энергии на бит  $\frac{E_b}{N_0}$  при заданной спектральной эффективности  $\eta$  для блокированного алгоритма при бесконечном числе преамбул определяется как*

$$\frac{E_b}{N_0} > \frac{2(2^n - 1)}{T}. \quad (4.79)$$

*Доказательство.* Из выражения (3.27) (см. подраздел 3.4) следует, что

$$\frac{E_b}{N_0} \triangleq PM[S] \frac{W}{R}. \quad (4.80)$$

Исходя из написанного ранее  $P = 2^n - 1$ . С учётом допущения 4.5 можно записать  $R = W \log(1 + P) - \epsilon$ , где  $\epsilon \rightarrow +0$ , следовательно,  $R = W\eta - \epsilon$ . Тогда

$$\frac{E_b}{N_0} > M[S] \frac{2^n - 1}{\eta}. \quad (4.81)$$

Рассмотрим вычисление среднего числа повторных передач  $M[S]$  для рассматриваемой системы. Рассмотрим среднее число передач для целевого пользовательского устройства, добавляемого в систему в случайный момент времени (данный подход не нарушает характеристики системы, по аналогии с виртуальной и актуальной вероятностью доставки, см. раздел 2). Если за время разрешения предыдущего конфликта кратности  $K$  ни у одного пользователя не появилось сообщений, то целевой пользователь совершит только 1 передачу. Иначе целевой пользователь попадёт в конфликт при первой передаче и будет передавать второй раз в соответствии с расписанием. Так как алгоритм блокированный, то при второй попытке, в соответствии с системой допущений, сообщение пользователя будет успешно доставлено. Следуя приведённым рассуждениям можно записать следующее:

$$M[S] = 1 \Pr\{\text{за конфликт кратности } K \text{ не появилось абонентов}\} + 2(1 - \Pr\{\text{за конфликт}\}) \quad (4.82)$$

Так как рассматривается система в режиме насыщения, то  $\Pr\{\text{за конфликт кратности } K \text{ не появилось абонентов}\} = 0$ , следовательно,  $M[S] = 2$ . Откуда



$$\frac{E_b}{N_0} > \frac{2(2^\eta - 1)}{\eta}. \quad (4.83)$$

Что и требовалось доказать.

**Утверждение 4.10.** Нижняя граница для энергии на бит  $\frac{E_b}{N_0}$  при заданной спектральной эффективности  $\eta$  для неблокированного алгоритма при бесконечном числе преамбул определяется как

$$\frac{E_b}{N_0} > W(1)(1 + e^{W(1)}) \frac{2^{\frac{\eta}{W(1)}} - 1}{\eta}, \quad (4.84)$$

где  $W(x)$  — это  $W$ -функция Ламберта, а  $W(1) \approx 0,5671$ .

*Доказательство.* Первая часть доказательства аналогична доказательству утверждения 4.9 с учётом  $P = 2^{\frac{\eta}{W(1)}} - 1$  (см. утверждение 4.7). Опустив данную часть можно записать

$$\frac{E_b}{N_0} > M[S] \frac{2^{\frac{\eta}{W(1)}} - 1}{\frac{\eta}{W(1)}}. \quad (4.85)$$

Опишем нахождение  $M[S]$  для неблокированного алгоритма. Воспользуемся тем же подходом, что и в предыдущем доказательстве. В систему добавляется целевое пользовательское устройство, найдем среднее число передач для него. Если система была пуста, то число передач будет 1. Если система не пуста, то первая передача, в соответствии с алгоритмом (см. подраздел 4.3), будет неуспешной, так как остальные пользовательские устройства, находящиеся в системе, работают в режиме разделения по времени. Далее целевой абонент будет повторно отправлять сообщение в соответствии с полученным от базовой станции расписанием. Повторная отправка будет успешна в том случае, если в окне предшествующем окну передачи не появилось новых абонентов. Иначе в соответствии с алгоритмом, вновь появившиеся пользователи передадут свои сообщения в первый раз в окне, выделенном для отправки целевого пользовательского устройства. Так как рассматривается система в режиме насыщения, то вероятность того, что система пуста стремится к нулю, поэтому  $M[S] = 1 + M[S']$ , где  $S' \in \{1, 2, \dots, \infty\}$ , значения вероятностей определены следующим образом  $\Pr\{S' = i\} = (1 - e^{-\Lambda})^{i-1} e^{-\Lambda}$ . Легко показать, что  $M[S'] = e^\Lambda$ . Тогда  $M[S] = 1 + e^\Lambda$ . Так как система анализируется в режиме насыщения, то

для рассматриваемого алгоритма  $\Lambda = \Lambda_{\text{кр}} = W(1)$ , где  $W(1)$  — функция Ламберта. Подставив данное значение в (4.85) и проведя упрощения, мы получим формулу (4.78), что и требовалось доказать.

Используя формулы для ГРОС первого и второго типа, полученные в предыдущем разделе, а так же результаты для заблокированного и неблокированного алгоритмов, проведем сравнение энергоэффективности для рассмотренных в работе методов и алгоритмов.

На рисунках 4.11 и 4.12 представлено сравнение нижних границ для мощности сигнала и энергии на бит для методов ГРОС, заблокированного и неблокированного алгоритмов.

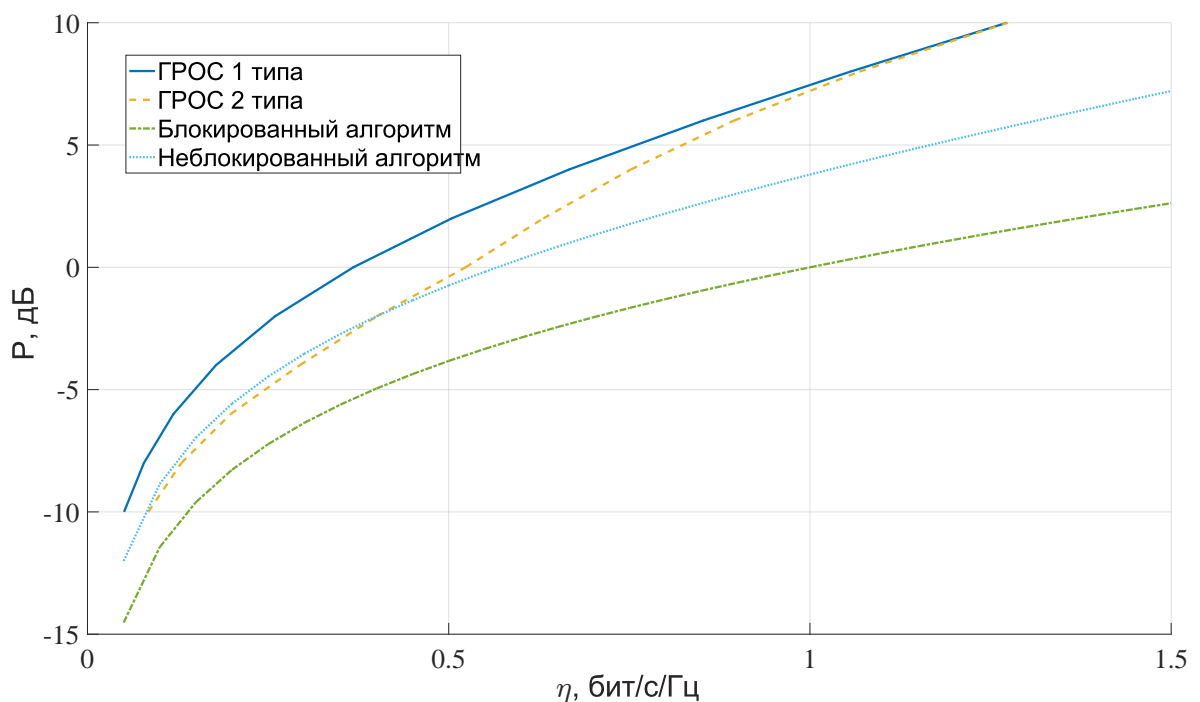


Рисунок 4.11 — Нижние границы для мощности сигнала для рассматриваемых методов и алгоритмов.

Из рисунка 4.11 следует, что использование заблокированного и неблокированного алгоритмов позволяет при тех же значениях спектральной эффективности  $\eta$  уменьшить нижнюю границу для мощности сигнала  $P$ . При этом данный выигрыш растет с увеличением значения спектральной эффективности. При этом заблокированный алгоритм лучше всего позволяет минимизировать мощность сигнала. Минимальный выигрыш для неблокированного алгоритма перед ГРОС первого типа составляет 2дБ, а перед ГРОС второго типа 0,5дБ. Минимальный выигрыш для заблокированного алгоритма относительно неблоки-

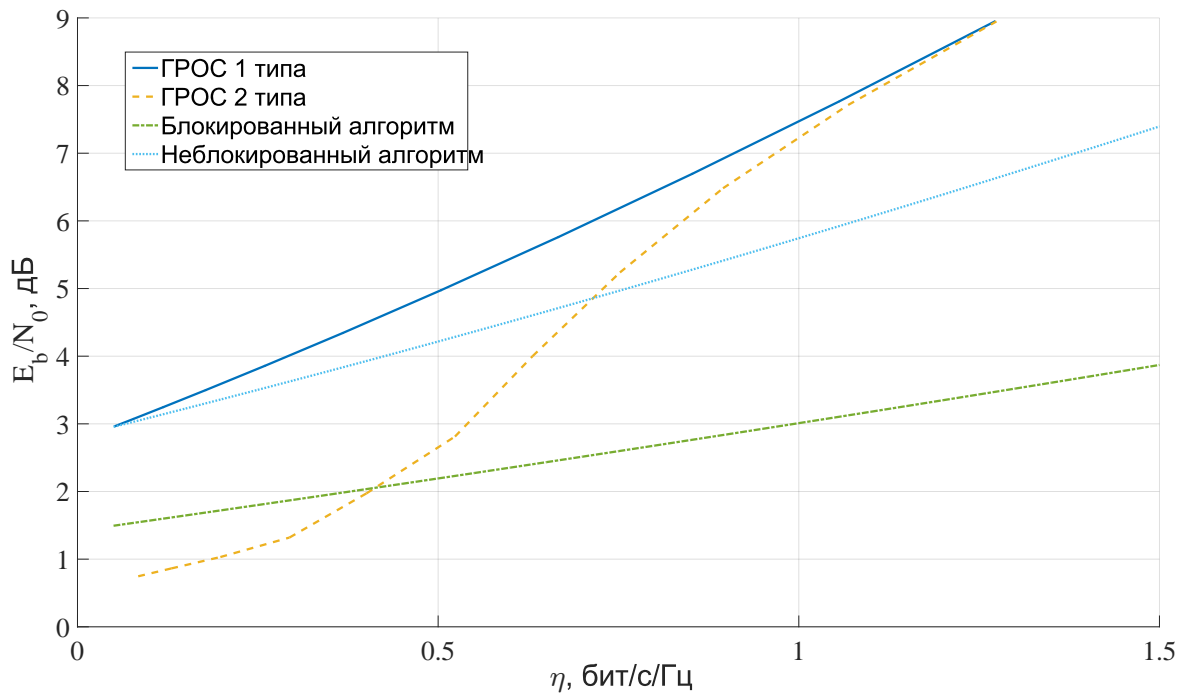


Рисунок 4.12 — Нижние границы для энергии на бит для рассматриваемых методов и алгоритмов.

рованного — 2,5дБ, относительно ГРОС первого типа — 4,5дБ, относительно ГРОС второго типа — 3дБ.

Из рисунка 4.12 следует, что использование блокированного и неблокированного алгоритма позволяет уменьшить нижнюю границу затрат энергии на бит  $\frac{E_b}{N_0}$  при одинаковом значении спектральной эффективности  $\eta$  относительно ГРОС первого типа и с ростом  $\eta$  выигрыш возрастает. Однако при сравнении со вторым типом ГРОС видно, что при значениях спектральной эффективности ниже некоторого значения оба алгоритма имеют более высокие значения энергии на бит. Это обусловлено спецификой метода разрешения коллизий и работы алгоритмов, которая повышает среднее число передач сообщения в системе. Однако начиная с некоторого значения спектральной эффективности, энергия на бит для рассматриваемых алгоритмов оказывается ниже, чем для ГРОС второго типа. Для неблокированного алгоритма это значение  $\approx 0,72$  бит/с/Гц, для блокированного алгоритма  $\approx 0,41$  бит/с/Гц. Затраты энергии на бит в блокированном алгоритме ниже неблокированного при любом значении спектральной эффективности и получаемый выигрыш возрастает с ростом спектральной эффективности (минимальный выигрыш составляет 1,25дБ).

Из полученных результатов следует, что изменение алгоритма случайного множественного доступа может привести к уменьшению затрат энергии

в системах массовой межмашинной связи. Также, например, можно рассмотреть возможность разбиения процесса передачи данных на две фазы: фазу передачи преамбул (фаза исследования) и фазу передачи данных [127; 128]. Использование более сложных методов формирования сигналов с разделением пользователей не во временной области, а в области мощности сигналов при последующем декодировании с погашением интерференции, может позволить уменьшить задержки в системе, но скорее всего увеличит затраты энергии. Таким методом может быть подход на основе неортогонального случайного множественного доступа (Non-Orthogonal Multiple Access, NOMA)[129].

#### 4.8 Выводы по главе

В данном разделе была сформулирована модель рассматриваемой системы и введен ряд допущений. В рамках данной модели были описаны два алгоритма случайного множественного доступа, использующих служебную информацию в виде преамбул для перехода в режим разделения по времени.

Первый алгоритм работает сеансами, которые начинаются с "конфликта-некоторой кратности (пустое окно является конфликтом 0 кратности, окно с успехом — конфликтом 1 кратности). Если был конфликт кратности больше 1, то базовая станция на основе преамбул формирует расписание, в соответствии с которым пользователи будут передавать свои сообщения повторно. Пока работает расписание, пользователи, не участвовавшие в конфликте, предшествующем расписанию, откладывают свои попытки передачи. Данный алгоритм называется блокированным.

Во втором алгоритме при конфликте в канале базовая станция формирует расписание для пользователей на основе преамбул и сообщает его пользователям. Однако в отличие от первого алгоритма, пользовательские устройства, не участвовавшие в конфликте, не откладывают попытки передать появившееся у них сообщение. И они могут попытаться отправить сообщение с некоторой вероятностью сразу после момента возникновения у них готового к передаче сообщения, нарушив тем самым работу расписания. В таком случае базовая станция редактирует расписание и сообщает его пользователям. Особенностью такого подхода является то, что пользовательским устройствам, у которых нет

готовых к передаче сообщений, нет необходимости постоянно слушать канал и принимать расписание от базовой станции, что упрощает подключение новых устройств к системе.

Для обоих алгоритмов приведено описание и примеры их работы. С помощью теории Марковских цепей приведён анализ предельной интенсивности входного потока, до которой рассматриваемые алгоритмы работают стабильно при бесконечном числе преамбул. Из результатов следует, что блокированный алгоритм стабилен до интенсивности входного потока равного 1, а неблокированный алгоритм до интенсивности  $W(1) \approx 0,5671$ , где  $W(x)$  — это функция Ламберта от  $x$ .

В разделе приводится анализ средней задержки в данных алгоритмах. На примере неблокированного алгоритма показан подход для вычисления средней задержки при бесконечном числе преамбул. Для блокированного алгоритма средняя задержка была получена с помощью имитационного моделирования. Сравнение средних задержек показало, что блокированный алгоритм имеет гораздо более низкие задержки при высоких интенсивностях входного потока, а при малых интенсивностях задержки совпадают.

Исходя из полученных результатов (критической интенсивности и средних задержек), был сделан вывод, что имеет смысл рассматривать работу при конечном числе преамбул только для блокированного алгоритма. С помощью теории регенерирующих случайных процессов был проведен анализ критической интенсивности входного потока для блокированного алгоритма при конечном числе преамбул. В результате анализа было получено, что для каждого числа уникальных преамбул существует значение параметра  $G$ , влияющего на вероятность передачи сообщения пользователем, которое максимизирует критическую интенсивность. Для разного числа преамбул значения такого параметра  $G$  были приведены в таблице 4.1.

При бесконечном числе преамбул был рассмотрен вопрос энергоэффективности рассмотренных методов разрешения коллизии (блокированный и неблокированный алгоритмы). Выведенные в результате анализа замкнутые выражения приведены в таблице 4.2.

В результате проведенного анализа получено, что использование блокированного и неблокированного алгоритмов позволяет при тех же значениях спектральной эффективности уменьшить нижнюю границу для мощности сигнала. Выигрыш растет с увеличением значения спектральной эффективности,

Таблица 4.2 — Результаты анализа энергоэффективности заблокированного и неблокированного алгоритмов разрешения конфликтов.

Характеристика системы	Блокированный алгоритм	Неблокированный алгоритм
Нижняя граница для мощности сигнала $P$	$P > 2^\eta - 1$ , где $\eta$ спектральная эффективность системы	$P > 2^{\frac{\eta}{W(1)}} - 1$ , где $\eta$ спектральная эффективность системы, $W(1)$ - функция Ламберта от 1.
Нижняя граница для энергии на бит $\frac{E_b}{N_0}$	$\frac{E_b}{N_0} > \frac{2(2^\eta - 1)}{\eta}$ .	$\frac{E_b}{N_0} > W(1)(1 + e^{W(1)})\frac{2^{\frac{\eta}{W(1)}} - 1}{\eta}$ .

а заблокированный алгоритм более эффективен, чем неблокированный. Минимальный выигрыш для неблокированного алгоритма перед ГРОС первого типа составляет 2дБ, а перед ГРОС второго типа — 0,5дБ. Минимальный выигрыш для заблокированного алгоритма относительно неблокированного — 2,5дБ, относительно ГРОС первого типа — 4,5дБ, относительно ГРОС второго типа — 3дБ.

При рассмотрении энергии на бит использование заблокированного или неблокированного алгоритмов позволяет уменьшить нижнюю границу относительно ГРОС первого типа, и с ростом выигрыш возрастает. Однако при сравнении со вторым типом ГРОС для некоторых значений спектральной эффективности оба алгоритма имеют более высокие значения энергии на бит. Это обусловлено спецификой метода разрешения коллизий при работе алгоритма, которая повышает среднее число передач сообщений в системе. Начиная с некоторого значения спектральной эффективности, энергия на бит для рассматриваемых алгоритмов оказывается ниже, чем для ГРОС второго типа. Для неблокированного алгоритма это значение  $\approx 0,72$  бит/с/Гц, для заблокированного алгоритма  $\approx 0,41$  бит/с/Гц.

## Заключение

В ходе выполнения диссертационного исследования была поставлена и решена актуальная задача разработки новых моделей систем случайного множественного доступа для определения минимальных затрат энергии, необходимой для обеспечения стабильной работы при потенциально неограниченном числе пользовательских устройств, и методов, позволяющих снизить эти затраты при фиксированной спектральной эффективности. Получены следующие основные результаты:

1. Введены новые модели систем с наличием или отсутствием повторных передач, которые отражают основные особенности различных сценариев массовой межмашинной связи и позволяют совместно исследовать вопросы стабильности и энергоэффективности при потенциально неограниченном числе пользовательских устройств.
2. Для моделей систем с наличием или отсутствием повторных передач сформулированы и решены оптимизационные задачи, которые позволяют вычислить границы достижимости для энергоэффективности при заданной вероятности доставки сообщения с учетом спектральной эффективности системы. Показано, что введение ограничения на задержку в системе увеличивает затраты энергии.
3. Получено, что при фиксированной спектральной эффективности с увеличением объема передаваемых данных затраты энергии на передачу уменьшаются. Для рассмотренных в работе моделей получены замкнутые выражения для расчёта нижних границ энергоэффективности.
4. Показано, что для обеспечения стабильной работы системы со случайным доступом и потенциально неограниченным числом пользовательских устройств необходимо увеличить затраты энергии не менее чем на 4,32дБ по отношению к системе с одним источником и одним получателем. Данная разница возрастает с ростом значения спектральной эффективности.
5. Исследовано влияние параметра вероятности передачи в системе на базе алгоритма типа ALOHA и показано, что оптимизация данной вероятности в системе может позволить уменьшить затраты энергии.

6. Модифицирована модель системы случайного множественного доступа на базе алгоритма АЛОНА при наличии повторных передач для исследования влияния методов гибридной обратной связи на стабильность и энергоэффективность. Показано, что применение таких методов может позволить увеличить критическую интенсивность входного потока, до которой система стабильна, и уменьшить нижние границы для затрат энергии по сравнению с базовой системой.
7. Описана модель системы и предложен класс алгоритмов случайного множественного доступа, основанный на методе разрешения коллизий за счет использования преамбул и использующий временное переключение в режим с разделением по времени. В рамках данного класса разработан алгоритм, который может работать в заблокированном и неблокированном режиме.
8. Для разработанного алгоритма проведен анализ условий стабильности, критической интенсивности входного потока при конечном и бесконечном числе преамбул, а также проведен анализ средней задержки в системе и её энергоэффективности.
9. Проведено сравнение систем на основе рассмотренных методов с системой на базе алгоритма АЛОНА, и получено, что при увеличении значения спектральной эффективности выигрыш от применения методов гибридной обратной связи уменьшается, а от применения метода разрешения коллизий за счет использования преамбул выигрыш возрастает.



## Список сокращений и условных обозначений

- АБГШ — аддитивный белый гауссовский шум
- БС — базовая станция
- ГРОС — гибридная решающая обратная связь
- КС — контрольная сумма
- ПУ — пользовательское устройство
- РВ — разделение по времени
- РОС — решающая обратная связь
- СМД — случайный множественный доступ
- ТИМД — теория информации множественного доступа
- ТСМД — теория случайного множественного доступа
- АСК — acknowledge, положительное подтверждение
- ARQ — automatic repeat request, автоматический запрос повторной передачи
- CRC — cyclic redundancy check, циклический избыточный код
- eMBB — enhanced mobile broadband, расширенная мобильная широкополосная связь
- HARQ — hybrid automatic repeat request, гибридный автоматический запрос повторной передачи
- IoT — Internet of Things, Интернет вещей
- MIMO — multiple-input and multiple-output, множественный вход и множественный выход
- mMTC — massive machine-type communication, массовая межмашинная связь
- NACK — negative-acknowledgement, отрицательное подтверждение
- NOМА — non-orthogonal multiple access, неортогональный случайный множественный доступ
- PDR — packet delivery ratio, вероятность доставки
- PLR — packet loss ratio, вероятность потери
- SINR — signal-to-interference-plus-noise ratio, отношение сигнал/шум плюс помехи интерферирующих сигналов
- SNR — signal-to-noise ratio, отношение сигнал/шум
- URLLC — ultra-reliable low latency communication, сверхнадежная межмашинная связь с низкими задержками

## Список литературы

1. The roadmap to 6G: AI empowered wireless networks [Текст] / К. В. Letaief [и др.] // IEEE communications magazine. — 2019. — Т. 57, № 8. — С. 84—90.
2. *Piran, M. J.* Learning-driven wireless communications, towards 6G [Текст] / M. J. Piran, D. Y. Suh // 2019 International Conference on Computing, Electronics & Communications Engineering (iCCECE). — IEEE. 2019. — С. 219—224.
3. The road towards 6G: A comprehensive survey [Текст] / W. Jiang [и др.] // IEEE Open Journal of the Communications Society. — 2021. — Т. 2. — С. 334—366.
4. 6G Internet of Things: A comprehensive survey [Текст] / D. C. Nguyen [и др.] // IEEE Internet of Things Journal. — 2021. — Т. 9, № 1. — С. 359—383.
5. *Akyildiz, I. F.* 6G and beyond: The future of wireless communications systems [Текст] / I. F. Akyildiz, A. Kak, S. Nie // IEEE access. — 2020. — Т. 8. — С. 133995—134030.
6. Towards 6G wireless communication networks: Vision, enabling technologies, and new paradigm shifts [Текст] / X. You [и др.] // Science China Information Sciences. — 2021. — Т. 64. — С. 1—74.
7. 6G wireless systems: Vision, requirements, challenges, insights, and opportunities [Текст] / H. Tataria [и др.] // Proceedings of the IEEE. — 2021. — Т. 109, № 7. — С. 1166—1199.
8. SWIPT cooperative spectrum sharing for 6G-enabled cognitive IoT network [Текст] / W. Lu [и др.] // IEEE Internet of Things Journal. — 2020. — Т. 8, № 20. — С. 15070—15080.
9. Cellular, wide-area, and non-terrestrial IoT: a survey on 5G advances and the road toward 6G [Текст] / M. Vaezi [и др.] // IEEE Communications Surveys & Tutorials. — 2022. — Т. 24, № 2. — С. 1117—1174.
10. Cellular IoT evolution for industry digitalization [Текст] / A. Zaidi [и др.] // Ericsson White Paper, GFMC. — 2019. — Т. 19. — С. 17.

11. Guest Editorial: Design and Analysis of Communication Interfaces for Industry 4.0 [Текст] / S. A. Zaidi [и др.] // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. — 2020. — Т. 38, № 5. — С. 797—802.
12. A data-centric internet of things framework based on azure cloud [Текст] / Y. Liu [и др.] // IEEE Access. — 2019. — Т. 7. — С. 53839—53858.
13. Hierarchical security paradigm for iot multiaccess edge computing [Текст] / J. Singh [и др.] // IEEE Internet of Things Journal. — 2020. — Т. 8, № 7. — С. 5794—5805.
14. *Hakeem, S. A. A.* Vision and research directions of 6G technologies and applications [Текст] / S. A. A. Hakeem, H. H. Hussein, H. Kim // Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences. — 2022.
15. Future wireless communication technology towards 6g IoT: an application-based analysis of IoT in real-time location monitoring of employees inside underground mines by using BLE [Текст] / S. K. Pattnaik [и др.] // Sensors. — 2022. — Т. 22, № 9. — С. 3438.
16. 6G Driven Fast Computational Networking Framework for Healthcare Applications [Текст] / P. N. Srinivasu [и др.] // IEEE Access. — 2022. — Т. 10. — С. 94235—94248.
17. A Survey on Resource Management for 6G Heterogeneous Networks: Current Research, Future Trends, and Challenges [Текст] / H. F. Alhashimi [и др.] // Electronics. — 2023. — Т. 12, № 3. — С. 647.
18. The role of vehicular applications in the design of future 6G infrastructures [Текст] / J. Gallego-Madrid [и др.] // ICT Express. — 2023.
19. Design of Cost-Efficient Optical Fronthaul for 5G/6G Networks: An Optimization Perspective [Текст] / A. Fayad [и др.] // Sensors. — 2022. — Т. 22, № 23. — С. 9394.
20. *Borisovskaya, A.* Reducing energy consumption in the IoT systems with unlimited number of devices [Текст] / A. Borisovskaya, A. Turlikov // 2021 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF). — IEEE. 2021. — С. 1—6.
21. Dual-Band CPW Graphene Antenna for Smart Cities and IoT Applications [Текст] / N. Morales-Centla [и др.] // Sensors. — 2022. — Т. 22, № 15. — С. 5634.

22. Power optimization model for energy sustainability in 6G wireless networks [Текст] / А. Taneja [и др.] // Sustainability. — 2022. — Т. 14, № 12. — С. 7310.
23. Energy aware resource control mechanism for improved performance in future green 6G networks [Текст] / А. Taneja [и др.] // Computer Networks. — 2022. — Т. 217. — С. 109333.
24. Business case and technology analysis for 5G low latency applications [Текст] / М. А. Lema [и др.] // IEEE Access. — 2017. — Т. 5. — С. 5917—5935.
25. *Ray, P. P.* A perspective on 6G: Requirement, technology, enablers, challenges and future road map [Текст] / P. P. Ray // Journal of Systems Architecture. — 2021. — Т. 118. — С. 102180.
26. Exploring synergy between communications, caching, and computing in 5G-grade deployments [Текст] / S. Andreev [и др.] // IEEE Communications Magazine. — 2016. — Т. 54, № 8. — С. 60—69.
27. *Series, M.* IMT Vision—Framework and overall objectives of the future development of IMT for 2020 and beyond [Текст] / M. Series // Recommendation ITU. — 2015. — Т. 2083. — С. 1—21.
28. *Čolaković, A.* Internet of Things (IoT): A review of enabling technologies, challenges, and open research issues [Текст] / A. Čolaković, M. Hadžialić // Computer networks. — 2018. — Т. 144. — С. 17—39.
29. From 5G to 6G technology: meets energy, internet-of-things and machine learning: a survey [Текст] / M. N. Mahdi [и др.] // Applied Sciences. — 2021. — Т. 11, № 17. — С. 8117.
30. *Liu, B.* The Framework of 6G Self-Evolving Networks and the Decision-Making Scheme for Massive IoT [Текст] / B. Liu, J. Luo, X. Su // Applied Sciences. — 2021. — Т. 11, № 19. — С. 9353.
31. Revolution or evolution? Technical requirements and considerations towards 6G mobile communications [Текст] / S. Alraih [и др.] // Sensors. — 2022. — Т. 22, № 3. — С. 762.
32. *Khiadani, N.* Vision, requirements and challenges of sixth generation (6G) networks [Текст] / N. Khiadani // 2020 6th Iranian conference on signal processing and intelligent systems (ICSPIS). — IEEE. 2020. — С. 1—4.

33. 5G wireless network slicing for eMBB, URLLC, and mMTC: A communication-theoretic view [Текст] / P. Popovski [и др.] // Ieee Access. — 2018. — Т. 6. — С. 55765—55779.
34. From 5G to 6G: Has the time for modern random access come? [Текст] / F. Clazzer [и др.] // arXiv preprint arXiv:1903.03063. — 2019.
35. *Галинина, О. С.* Учет специфики доступа большого числа устройств при межмашинном взаимодействии в современных сотовых сетях [Текст] / О. С. Галинина, С. Д. Андреев, А. М. Тюрликов // Информационно-управляющие системы. — 2018. — 4 (95). — С. 105—114.
36. Massive access for future wireless communication systems [Текст] / Y. Wu [и др.] // IEEE Wireless Communications. — 2020. — Т. 27, № 4. — С. 148—156.
37. *Mathys, P.* A class of codes for a T active users out of N multiple-access communication system [Текст] / P. Mathys // IEEE Transactions on Information Theory. — 1990. — Т. 36, № 6. — С. 1206—1219.
38. *El Gamal, A.* Multiple user information theory [Текст] / A. El Gamal, T. M. Cover // Proceedings of the IEEE. — 1980. — Т. 68, № 12. — С. 1466—1483.
39. Topics in multi-user information theory [Текст] / G. Kramer [и др.] // Foundations and Trends® in Communications and Information Theory. — 2008. — Т. 4, № 4/5. — С. 265—444.
40. *Ephremides, A.* Information theory and communication networks: An unconsummated union [Текст] / A. Ephremides, B. Hajek // IEEE Transactions on Information Theory. — 1998. — Т. 44, № 6. — С. 2416—2434.
41. *Tsybakov, B.* Survey of USSR contributions to random multiple-access communications [Текст] / B. Tsybakov // IEEE transactions on information theory. — 1985. — Т. 31, № 2. — С. 143—165.
42. *Luo, J.* On the throughput, capacity, and stability regions of random multiple access [Текст] / J. Luo, A. Ephremides // IEEE Transactions on Information Theory. — 2006. — Т. 52, № 6. — С. 2593—2607.
43. Random multiple-access communication and group testing [Текст] / T. Berger [и др.] // IEEE Transactions on Communications. — 1984. — Т. 32, № 7. — С. 769—779.

44. *Capetanakis, J.* Tree algorithms for packet broadcast channels [Текст] / J. Capetanakis // IEEE transactions on information theory. — 1979. — Т. 25, № 5. — С. 505—515.
45. *Capetanakis, J.* Generalized TDMA: The multi-accessing tree protocol [Текст] / J. Capetanakis // IEEE Transactions on Communications. — 1979. — Т. 27, № 10. — С. 1476—1484.
46. *Цыбаков, Б. С.* Случайный множественный доступ пакетов. Алгоритм дробления [Текст] / Б. С. Цыбаков, В. А. Михайлов // Проблемы передачи информации. — 1980. — Т. 16, № 4. — С. 65—79.
47. *Choi, J.* NOMA-based random access with multichannel ALOHA [Текст] / J. Choi // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. — 2017. — Т. 35, № 12. — С. 2736—2743.
48. *Choi, J.* Minimum power multicast beamforming with superposition coding for multiresolution broadcast and application to NOMA systems [Текст] / J. Choi // IEEE Transactions on Communications. — 2015. — Т. 63, № 3. — С. 791—800.
49. Joint power allocation and beamforming for non-orthogonal multiple access (NOMA) in 5G millimeter wave communications [Текст] / Z. Xiao [и др.] // IEEE Transactions on Wireless Communications. — 2018. — Т. 17, № 5. — С. 2961—2974.
50. *Choi, J.* Multichannel NOMA-ALOHA game with fading [Текст] / J. Choi // IEEE Transactions on Communications. — 2018. — Т. 66, № 10. — С. 4997—5007.
51. *Choi, J.* Multichannel ALOHA with exploration phase [Текст] / J. Choi // 2020 IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC). — IEEE. 2020. — С. 1—6.
52. *Choi, J.* On improving throughput of multichannel ALOHA using preamble-based exploration [Текст] / J. Choi // Journal of Communications and Networks. — 2020. — Т. 22, № 5. — С. 380—389.
53. *Choi, J.* On the adaptive determination of the number of preambles in RACH for MTC [Текст] / J. Choi // IEEE Communications Letters. — 2016. — Т. 20, № 7. — С. 1385—1388.

54. *Choi, J.* On fast retrieval for two-step random access in MTC [Текст] / J. Choi // IEEE Internet of Things Journal. — 2020. — Т. 8, № 3. — С. 1428—1436.
55. *Gallager, R. G.* A perspective on multiaccess channels [Текст] / R. G. Gallager // IEEE Transactions on Communications. — 1985. — Vol. 31. — P. 124—142. — ISSN: 1557-9654.
56. *Caire, G.* The throughput of hybrid-ARQ protocols for the Gaussian collision channel [Текст] / G. Caire, D. Tuninetti // IEEE Transactions on Information Theory. — 2001. — Т. 47, № 5. — С. 1971—1988.
57. *Polyanskiy, Y.* A perspective on massive random-access [Текст] / Y. Polyanskiy // 2017 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). — IEEE. 2017. — С. 2523—2527.
58. *Ordentlich, O.* Low complexity schemes for the random access Gaussian channel [Текст] / O. Ordentlich, Y. Polyanskiy // 2017 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). — IEEE. 2017. — С. 2528—2532.
59. *Polyanskiy, Y.* Channel coding rate in the finite blocklength regime [Текст] / Y. Polyanskiy, H. V. Poor, S. Verdú // IEEE Transactions on Information Theory. — 2010. — Т. 56, № 5. — С. 2307—2359.
60. *Gallager, R.* A perspective on multiaccess channels [Текст] / R. Gallager // IEEE Transactions on information Theory. — 1985. — Т. 31, № 2. — С. 124—142.
61. *Vvedenskaya, N. D.* Packet delay in the case of a multiple-access stack algorithm [Текст] / N. D. Vvedenskaya, B. S. Tsybakov // Problemy Peredachi Informatsii. — 1984. — Т. 20, № 2. — С. 77—97.
62. *Brémaud, P.* Probability theory and stochastic processes [Текст] / P. Brémaud. — Springer, 2020.
63. *Цыбаков, Б. С.* Свободный синхронный доступ пакетов в широкополосный канал с обратной связью [Текст] / Б. С. Цыбаков, В. А. Михайлов // Проблемы передачи информации. — 1978. — Т. 14, № 4. — С. 32—59.
64. *Цыбаков, Б. С.* Нижняя граница для задержки в системе случайного множественного доступа [Текст] / Б. С. Цыбаков, Н. Б. Лиханов // Проблемы передачи информации. — 1991. — Т. 27, № 3. — С. 73—88.

65. *Georgiadis, L.* A method for the delay analysis of random multiple-access algorithms whose delay process is regenerative [Текст] / L. Georgiadis, L. Merakos, P. Papantoni-Kazakos // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. — 1987. — Т. 5, № 6. — С. 1051—1062.
66. *Merakos, L. F.* Delay analysis of the n-ary stack random-access algorithm [Текст] / L. F. Merakos, C. Bisdikian // IEEE Transactions on Information Theory. — 1988. — Т. 34, № 5. — С. 931—942.
67. *Cover, T. M.* Elements of information theory [Текст] / Т. М. Cover. — John Wiley & Sons, 1999.
68. *Матвеев, Н. В.* Обзор методов случайного множественного доступа к общему каналу для сценариев массовой межмашинной связи [Текст] / Н. В. Матвеев, А. М. Тюрликов // Информационно-управляющие системы. — 2019. — 6 (103). — С. 54—67.
69. *Матвеев, Н. В.* Слотовый aloha с итерационной процедурой разрешения коллизий. Стабильность и нестабильность [Текст] / Н. В. Матвеев, А. М. Тюрликов // Информационно-управляющие системы. — 2018. — 3 (94). — С. 89—97.
70. *Foss, S.* Spatial random multiple access with multiple departure [Текст] / S. Foss, A. Turlikov, M. Grankin // 2017 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). — IEEE. 2017. — С. 2728—2731.
71. *Rivest, R.* Network control by Bayesian broadcast [Текст] / R. Rivest // IEEE Transactions on Information Theory. — 1987. — Т. 33, № 3. — С. 323—328.
72. *Choi, J.* On the stability and throughput of compressive random access in MTC [Текст] / J. Choi // 2017 IEEE International Conference on Communications (ICC). — IEEE. 2017. — С. 1—6.
73. *Choi, J.* Data-aided sensing for Gaussian process regression in IoT systems [Текст] / J. Choi // IEEE Internet of Things Journal. — 2020. — Т. 8, № 9. — С. 7717—7726.
74. Stabilizing multi-channel slotted aloha for machine-type communications [Текст] / О. Galinina [и др.] // 2013 IEEE International Symposium on Information Theory. — IEEE. 2013. — С. 2119—2123.



75. D-ACB: Adaptive congestion control algorithm for bursty M2M traffic in LTE networks [Текст] / S. Duan [и др.] // IEEE Transactions on Vehicular Technology. — 2016. — Т. 65, № 12. — С. 9847—9861.
76. Learning automata-based access class barring scheme for massive random access in machine-to-machine communications [Текст] / C. Di [и др.] // IEEE Internet of Things Journal. — 2018. — Т. 6, № 4. — С. 6007—6017.
77. *Kim, H.-Y.* A load balancing scheme based on deep-learning in IoT [Текст] / H.-Y. Kim, J.-M. Kim // Cluster Computing. — 2017. — Т. 20. — С. 873—878.
78. *Choi, J.* On throughput of compressive random access for one short message delivery in IoT [Текст] / J. Choi // IEEE Internet of Things Journal. — 2020. — Т. 7, № 4. — С. 3499—3508.
79. Stabilizing frame slotted aloha-based IoT systems: A geometric ergodicity perspective [Текст] / J. Yu [и др.] // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. — 2020. — Т. 39, № 3. — С. 714—725.
80. *Arouk, O.* Multi-channel slotted aloha optimization for machine-type-communication [Текст] / O. Arouk, A. Ksentini // Proceedings of the 17th ACM international conference on Modeling, analysis and simulation of wireless and mobile systems. — 2014. — С. 119—125.
81. *Jeon, S.-W.* Online estimation and adaptation for random access with successive interference cancellation [Текст] / S.-W. Jeon, H. Jin // IEEE Transactions on Mobile Computing. — 2022.
82. *Бурков, А.* Анализ энергетической эффективности системы случайного множественного доступа с гарантированной доставкой сообщений [Текст] / А. Бурков, А. Тюрликов // Научная сессия ГУАП. — СПб: ГУАП, 2019. — С. 314—318.
83. *Бурков, А.* Анализ спектральной эффективности систем случайного множественного доступа без подтверждений и с подтверждениями [Текст] / А. Бурков // Обработка, передача и защита информации в компьютерных системах. — СПб: ГУАП, 2020. — С. 234—240.
84. *Burkov, A. A.* Signal power and energy-per-bit optimization problems in mMTC systems [Текст] / A. A. Burkov // Информационно-управляющие системы. — 2021. — 5 (114). — С. 51—58.

85. Achievability Bounds for Massive Random Access in the Gaussian MAC with Delay Constraints [Текст] / A. Burkov [и др.] // 2019 XVI International Symposium "Problems of Redundancy in Information and Control Systems"(REDUNDANCY). — IEEE. 2019. — С. 224—227.
86. *Burkov, A.* An achievability bound of energy per bit for stabilized massive random access Gaussian channel [Текст] / A. Burkov, S. Shneer, A. Turlikov // IEEE Communications Letters. — 2020. — Т. 25, № 1. — С. 299—302.
87. *Foster, F. G.* On the Stochastic Matrices Associated with Certain Queuing Processes [Текст] / F. G. Foster // The Annals of Mathematical Statistics. — 1953. — Vol. 24. — P. 355—360.
88. *Феллер, В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения [Текст] / В. Феллер. — Рипол Классик, 2013.
89. How to boost the throughput of HARQ with off-the-shelf codes [Текст] / M. Jabi [и др.] // IEEE Transactions on Communications. — 2017. — Т. 65, № 6. — С. 2319—2331.
90. Adaptive cross-packet HARQ [Текст] / M. Jabi [и др.] // IEEE Transactions on Communications. — 2017. — Т. 65, № 5. — С. 2022—2035.
91. *Финк, Л. М.* Теория передачи дискретных сообщений [Текст] / Л. М. Финк. — Сов. радио, 1970.
92. *Шувалов, В. П.* Передача дискретных сообщений: Учебник для вузов [Текст] / В. П. Шувалов. — Радио и связь, 1990.
93. *Krouk, E.* Modulation and coding techniques in wireless communications [Текст] / E. Krouk, S. Semenov. — John Wiley & Sons, 2011.
94. *Митрофанов, С.* Анализ использования гибридной повторной передачи в ширококвещательных сетях [Текст] / С. Митрофанов, А. Бурков // Научная сессия ГУАП. — СПб: ГУАП, 2018. — С. 366—371.
95. HARQ buffer management: An information-theoretic view [Текст] / W. Lee [и др.] // IEEE transactions on communications. — 2015. — Т. 63, № 11. — С. 4539—4550.
96. *Deng, R. H.* Hybrid ARQ scheme using TCM and code combining [Текст] / R. H. Deng // Electronics Letters. — 1991. — Т. 10, № 27. — С. 866—868.

97. *Kallel, S.* Analysis of a type II hybrid ARQ scheme with code combining [Текст] / S. Kallel // IEEE transactions on communications. — 1990. — Т. 38, № 8. — С. 1133—1137.
98. *Lin, S.* A hybrid ARQ scheme with parity retransmission for error control of satellite channels [Текст] / S. Lin, P. Yu // IEEE Transactions on Communications. — 1982. — Т. 30, № 7. — С. 1701—1719.
99. *Бурков, А. А.* Верхняя оценка спектральной эффективности для систем с гибридной решающей обратной связью при ограничении на вид модуляции [Текст] / А. А. Бурков, А. М. Тюрликов // Вопросы радиоэлектроники. Серия: Техника телевидения. — 2020. — № 1. — С. 74—83.
100. Comparison of eMBMS transmission methods with unicast in low SNR conditions [Текст] / S. Mitrofanov [и др.] // 2017 9th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). — IEEE. 2017. — С. 123—128.
101. Upper bound and approximation of random access throughput over chase combining HARQ [Текст] / A. Burkov [и др.] // 2017 9th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). — IEEE. 2017. — С. 143—147.
102. *Chase, D.* Code combining—a maximum-likelihood decoding approach for combining an arbitrary number of noisy packets [Текст] / D. Chase // IEEE transactions on communications. — 1985. — Т. 33, № 5. — С. 385—393.
103. *Mandelbaum, D.* An adaptive-feedback coding scheme using incremental redundancy (corresp.) [Текст] / D. Mandelbaum // IEEE Transactions on Information Theory. — 1974. — Т. 20, № 3. — С. 388—389.
104. *Schmitt, M.* Hybrid ARQ scheme employing TCM and packet combining [Текст] / M. Schmitt // Electronics Letters. — 1998. — Т. 34, № 18. — С. 1725—1726.
105. *Wicker, S. B.* Adaptive rate error control through the use of diversity combining and majority-logic decoding in a hybrid-ARQ protocol [Текст] / S. B. Wicker // IEEE Transactions on communications. — 1991. — Т. 39, № 3. — С. 380—385.

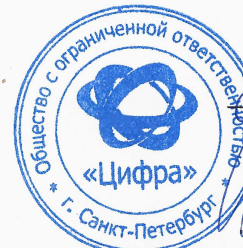
106. *Benelli, G.* An ARQ scheme with memory and soft error detectors [Текст] / G. Benelli // IEEE Transactions on Communications. — 1985. — Т. 33, № 3. — С. 285—288.
107. *Бурков, А.* Выбор параметров помехоустойчивого кодирования в системах передачи данных с гибридной решающей обратной связью [Текст] / А. Бурков // Научная сессия ГУАП. — СПб: ГУАП, 2017. — С. 267—273.
108. *Burkov, A.* Throughput Analysis of Adaptive ALOHA Algorithm Using Hybrid-ARQ with Chase Combining in AWGN Channel [Текст] / A. Burkov, N. Kuropatkin, N. Matveev // Internet of Things, Smart Spaces, and Next Generation Networks and Systems. — Springer, 2017. — С. 519—525.
109. *Скляр, Б.* Цифровая связь: Теоретические основы и практическое применение [Текст] / Б. Скляр. — Издательский дом Вильямс, 2004.
110. *Apanasenko, N. V.* Performance Analysis of ZF and MMSE Algorithms for MIMO Systems [Текст] / N. V. Apanasenko, A. A. Burkov, A. M. Turlikov // 2018 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF). — IEEE, 2018. — С. 1—4.
111. *Zigangirov, K. S.* Theory of code division multiple access communication [Текст] / K. S. Zigangirov. — John Wiley & Sons, 2004.
112. *Бурков, А.* Сравнение блокированного и неблокированного алгоритмов случайного множественного доступа с динамическим расписанием [Текст] / А. Бурков, А. Савельев // Научная сессия ГУАП. — СПб: ГУАП, 2019. — С. 306—313.
113. *Цыбаков, Б. С.* Блокированный стек-алгоритм СМД в сети с конечным числом станций [Текст] / Б. С. Цыбаков, В. Б. Файнгольд // Проблемы передачи информации. — 1992. — Т. 28, № 1. — С. 89—96.
114. *Цыбаков, Б. С.* Передача пакетов с помощью блокированного немодифицированного стек-алгоритма СМД [Текст] / Б. С. Цыбаков, С. П. Федорцов // Проблемы передачи информации. — 1986. — Т. 22, № 3. — С. 96—102.
115. *Mikhailov, V. A.* Geometrical Analysis of the Stability of Markov Chains in  $R_{+}^n$  and Its Application to Throughput Evaluation of the Adaptive Random Multiple Access Algorithm [Текст] / V. A. Mikhailov // Problemy peredachi informatsii. — 1988. — Т. 24, № 1. — С. 61—73.

116. *Foss, S.* Stability of a Markov-modulated Markov chain, with application to a wireless network governed by two protocols [Текст] / S. Foss, S. Shneer, A. Tyurlikov // Stochastic Systems. — 2013. — Т. 2, № 1. — С. 208—231.
117. On the Lambert W function [Текст] / R. M. Corless [и др.] // Advances in Computational mathematics. — 1996. — Т. 5. — С. 329—359.
118. *Tsybakov, B. S.* Free synchronous packet access in a broadcast channel with feedback [Текст] / B. S. Tsybakov, V. A. Mikhailov // Problemy peredachi informatsii. — 1978. — Т. 14, № 4. — С. 32—59.
119. *Burkov, A. A.* Arbitrarily Accurate Approximation of Numerical Characteristics of Stationary ALOHA Channels [Текст] / A. A. Burkov, S. Shneer, A. M. Turlikov // 2021 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF). — IEEE. 2021. — С. 1—8.
120. *Burkov, A. A.* Lower bound for average delay in unblocked random access algorithm with orthogonal preambles [Текст] / A. A. Burkov, S. V. Shneer, A. M. Turlikov // Информационно-управляющие системы. — 2020. — 3 (106). — С. 79—85.
121. *Meyn, S. P.* Markov chains and stochastic stability [Текст] / S. P. Meyn, R. L. Tweedie. — Springer Science & Business Media, 2012.
122. *Burkov, A.* Upper and Lower Bound for Non-Blocking Random Multiple Access Algorithm with Time Division Mode [Текст] / A. Burkov, A. Saveliev, A. Turlikov // 2019 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF). — IEEE. 2019. — С. 1—7.
123. *Бурков, А.* Анализ неблокированного алгоритма случайного множественного доступа с режимом разделения по времени [Текст] / А. Бурков, А. Савельев, А. Тюрликов // Волновая электроника и инфокоммуникационные системы. — СПб: ГУАП, 2019. — С. 147—153.
124. *Бурков, А.* Исследование системы случайного множественного доступа с использованием ортогональных преамбул [Текст] / А. Бурков, А. Тюрликов // Научная сессия ГУАП. — СПб: ГУАП, 2018. — С. 326—332.

125. *Burkov, A.* Contention-based protocol with time division collision resolution [Текст] / A. Burkov, A. Frolov, A. Turlikov // 2018 10th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). — IEEE. 2018. — С. 1—4.
126. *Burkov, A. A.* Comparison of the ways to reduce energy costs in stable massive machine-type communication systems [Текст] / A. A. Burkov // Информационно-управляющие системы. — 2023. — № 2. — С. 39—50.
127. *Burkov, A. A.* Analyzing and stabilizing multichannel ALOHA with the use of the preamble-based exploration phase [Текст] / A. A. Burkov, R. Rachugin, A. Turlikov // Информационно-управляющие системы. — 2022. — 5 (120). — С. 49—59.
128. *Бурков, А.А., Рачугин Р.О.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023619083 Российская Федерация. Программа моделирования многоканальной системы случайного множественного доступа на базе АЛОHA с фазой исследования: № 2023618482 : дата поступления 04.05.2023 : дата гос. регистрации в Реестре программ для ЭВМ 04.05.2023 / А.А. Бурков, Р.О. Рачугин; правообладатель ГУАП — 1 с. [Текст].
129. *Burkov, A.* Throughput Analysis of the System of Random Multiple Access with Separation by Signal Power [Текст] / A. Burkov, N. Stepanov // 2018 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF). — IEEE. 2018. — С. 1—6.

## Приложение А

### Акт об использовании от ООО «Цифра»



Утверждаю  
Генеральный директор  
ООО Цифра  
Д.А. Срюбас  
«7» апреля 2023

#### АКТ

об использовании результатов диссертационного исследования

Буркова Артёма Андреевича

На тему «Модели и методы обеспечения стабильной и энергоэффективной работы систем массовой межмашинной связи»

Комиссия в составе: председателя – ст. менеджера продуктов Андреева Алексея Евгеньевича, системного архитектора - Плясова Александра Александровича и системного архитектора - Манухина Сергея Александровича - составила настоящий акт о внедрении. Акт подтверждает, что в рамках НИР №111-2д "Разработка и прототипирование решения по защите авторских прав на основе цифровых водяных знаков" были использованы результаты диссертационных исследований Буркова А.А., а именно, методы оценки вероятности доставки коротких сообщений при отсутствии повторных передач в системах с потенциально неограниченным числом абонентских устройств.

Применение данных методов позволило оценить вероятность ложного обвинения в нарушении авторских прав при большом числе лицензионных копий (порядка  $10^6$ ) для решения задачи защиты авторских прав на основе кодов с ограниченной длиной.

Председатель комиссии

ст. менеджер продуктов

Андреев А.Е.

Члены комиссии

системный архитектор

Плясов А.А.

системный архитектор

Манухин С.А.

## Приложение Б

## Акт об использовании от АО «Концерн «Гранит-Электрон»

Акционерное Общество «Корпорация «Тактическое Ракетное Вооружение»

БЛАГОДАРНОСТЬ  
ПРЕЗИДЕНТА  
РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИАкционерное общество  
**«Концерн «Гранит-Электрон»**  
(АО «Концерн «Гранит-Электрон»)Joint Stock Company "Concern "Granit-Electron"  
(JSC "Concern "Granit-Electron")

Санкт-Петербург

№ \_\_\_\_\_

**УТВЕРЖДАЮ**Заместитель генерального директора  
АО «Концерн «Гранит-Электрон»


 А.В. Пакишин
**А К Т**

**об использовании результатов диссертационной работы  
Буркова Артема Андреевича  
на тему «Модели и методы обеспечения  
стабильной и энергоэффективной работы  
систем массовой межмашинной связи», представляемой  
на соискание ученой степени кандидата технических наук**

Комиссия в составе:

Председателя Ямщикова Ю.А. – начальника научно-координационного центра, заместителя директора научно-технического комплекса, ученого секретаря и членов комиссии:

С.Г. Толмачева – начальника научно-исследовательской лаборатории обеспечения инновационных разработок

В.Г. Пушина – начальника информационно-технической лаборатории

составила настоящий акт об использовании научных результатов, полученных в диссертационной работе Буркова А.А., а именно методы анализа эффективности использования методов гибридной обратной связи в системах передачи данных с большим числом пользовательских устройств в опытно-конструкторских работах АО «Концерн «Гранит-Электрон».



Проведенные в рамках ОКР испытания показали, что разработанные автором методы анализа позволяют оценить потенциальные возможности использования гибридной обратной связи на стадии проектирования изделий.

Указанные результаты диссертационной работы имеют существенное значение для развития исследований в области систем массовой межмашинной связи и могут быть использованы для повышения ТТХ перспективных изделий разработки АО «Концерн «Гранит-Электрон».


Председатель комиссии:

Начальник научно-координационного центра,  
заместитель директора научно-технического комплекса,  
ученый секретарь



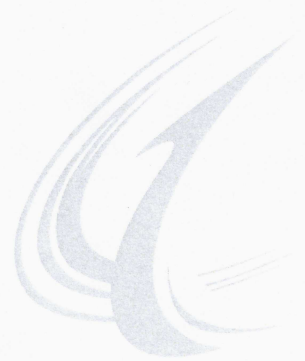
Члены комиссии:

Начальник научно-исследовательской  
лаборатории обеспечения инновационных  
разработок

 С.Г.Толмачев

Начальник информационно-технической  
лаборатории

 В.Г.Пушин



## Приложение В

### Акт об использовании от ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения»



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения»  
(ГУАП)

Санкт-Петербург

№ \_\_\_\_\_

**УТВЕРЖДАЮ**

Ректор ГУАП  
доктор экономических наук, профессор

Антохина Ю.А.

« 17 » 01 2023



#### АКТ О ВНЕДРЕНИИ

результатов диссертационной работы  
Буркова Артема Андреевича  
«Модели и методы обеспечения стабильной и энергоэффективной  
работы систем массовой межмашинной связи»,  
представленной на соискание ученой степени  
кандидата технических наук  
по специальности 2.2.15 – Системы, сети и устройства телекоммуникаций

Комиссия в составе:

председателя, проректора по образовательным технологиям и инновационной деятельности В.Ф. Шишлакова;

Членов комиссии:

директора института радиотехники и инфокоммуникационных технологий А.Р. Бестугина;

директора центра координации научных исследований А.В. Рабина

составила настоящий акт о том, что результат диссертационной работы Буркова А.А.  
«Модели и методы обеспечения стабильной и энергоэффективной работы систем

массовой межмашинной связи», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук:

– комбинированный алгоритм случайного множественного доступа с динамическим переключением в режим разделения по времени

используется в научно-исследовательской деятельности федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения», в частности, по итогам выполнения научно-исследовательской работы № 8.8540.2017/БЧ «Разработка алгоритмов передачи данных в системах IoT с учетом ограничений на сложность устройств».

Применение данного алгоритма позволило повысить интенсивность входного потока, до которой рассматриваемая система продолжает работать стабильно, без увеличения сложности пользовательских устройств.

Председатель комиссии,

проректор по образовательным технологиям и инновационной деятельности, д.т.н., проф.



В.Ф. Шишлаков

Члены комиссии:

директор институт радиотехники и инфокоммуникационных технологий, д.т.н., проф.



А.Р. Бестугин

директор центра координации научных исследований, д.т.н.



А.В. Рабин

## Приложение Г

## Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023619083

**Программа моделирования многоканальной системы  
случайного множественного доступа на базе АЛОНА с  
фазой исследования**

Правообладатель: **Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Санкт-Петербургский государственный университет  
аэрокосмического приборостроения» (RU)**

Авторы: **Бурков Артём Андреевич (RU), Рачугин Роман  
Олегович (RU)**



Заявка № 2023618482

Дата поступления 04 мая 2023 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 04 мая 2023 г.

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ  
Сертификат 68b80077e14e40f0a94eabd24145d5c7  
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**  
Действителен с 2.03.2022 по 26.05.2023

Ю.С. Зубов