

В. А. Ненашев – магистрант кафедры вычислительных систем и сетей

Л. А. Мироновский (д-р техн. наук, проф.) – научный руководитель

АНАЛИЗ КАНОНИЧЕСКИХ ФОРМ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

При компьютерном моделировании динамических систем возникает потребность в выборе конкретной реализации системы в пространстве состояний. Чаще всего для этих целей выбирают одну из канонических форм [1].

Канонические формы (КФ) характеризуются простой структурой и минимальным числом варьируемых параметров. Совокупность КФ можно рассматривать, как набор типовых моделей динамических систем. Знание свойств этих моделей и их характеристик позволяет выбирать КФ, удобные для решения конкретных задач моделирования, анализа или синтеза систем [2].

КФ классифицируются на сопровождающие, модальные, цепные и сбалансированные. Ниже рассматривается по одной КФ от каждого класса, а именно: фробениусова каноническая форма (ФКФ); жорданова каноническая форма (ЖКФ); сбалансированная каноническая форма (СКФ) и каноническая форма Рауса (КФР). Для их построения были разработаны и отлажены m-функции в пакете компьютерного моделирования Matlab.

В данной работе рассматривается задача сравнения характеристик указанных КФ, в частности их анализ на предмет обеспечения наименьшей вычислительной относительной погрешности при внесении малых искажений в матрицу A описания в пространстве состояний.

В общем виде решение поставленной задачи довольно объемно и нетривиально, поэтому ограничимся одним тестовым примером. В качестве тестового примера была выбрана пассивная электрическая цепь (ЭЦ) третьего порядка, содержащая два резистора, два конденсатора и одну катушку индуктивности.

Пассивная электрическая цепь описывается матрицами описания в пространстве состояний, приведенными в таблице 1:

Таблица 1
Матрицы описания в пространстве состояний ЭЦ

A	b	c
$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

От этого описания электрической цепи был осуществлен переход к аналогичным матрицам для четырех исследуемых КФ.

Для сравнительного анализа чувствительности КФ к вычислительным погрешностям в них вносились искажения. С этой целью изменялись значения элементов матрицы A на $\pm 10\%$. В пакете Matlab это можно осуществить при помощи выражения:

$$Ad = A \cdot * \begin{bmatrix} 0.9 & 1.1 & 0.9 \\ 1.1 & 0.9 & 1.1 \\ 0.9 & 1.1 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $\cdot *$ – операция поэлементного умножения матриц.

Элементы матриц b и c оставались неизменными.

Фробениусова каноническая форма

В таблице 2 приведены матрицы эталонной модели (ЭМ) и искаженной модели (ИМ) ФКФ ЭЦ.

Таблица 2

Матрицы ОПС ЭМ и ИМ ФКФ

A_f	b_f	c_f
0 0 -0.4	1	0 0 0.2
1 0 -1.4	0	
0 1 -2	0	

Ad_f	bd_f	cd_f
0 0 -0.36	1	0 0 0.1366
1.1 0 -1.54	0	
0 1.1 -1.8	0	

Результаты компьютерного моделирования ЭМ и ИМ представлены на рисунках 1, 2.

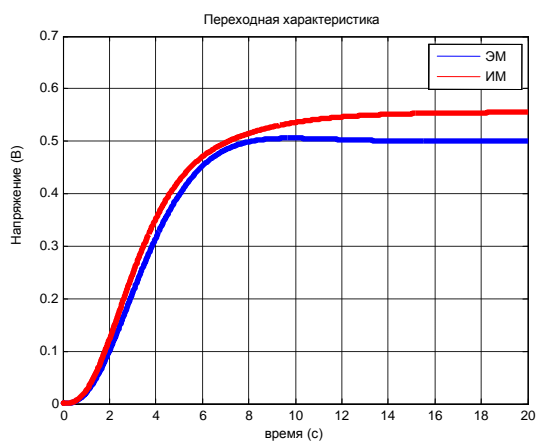


Рис. 1. Графики переходных характеристик электрической модели ФКФ

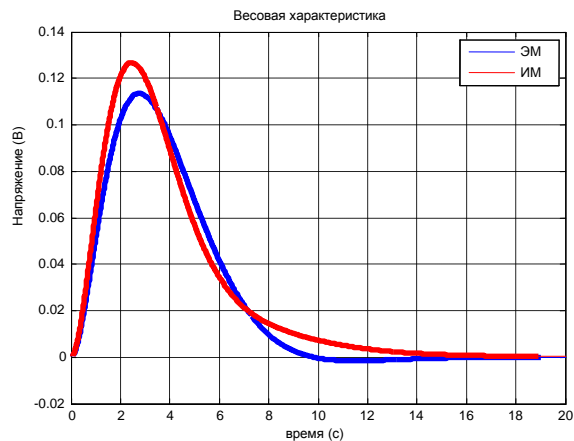


Рис. 2. Графики весовых характеристик электрической модели ФКФ

Из рисунков 1, 2 видно, что погрешность выходного сигнала искаженной модели составила примерно 10%.

Жорданова каноническая форма

В таблице 3 приведены матрицы описания в пространстве состояний ЭМ и ИМ ЖКФ ЭЦ.

Таблица 3

Матрицы ЭМ и ИМ ЖКФ

A_j	b_j	c_j
-0.5 -0.3873 0	1	-0.5 0.6455 0.5
0.3873 -0.5 0	0	
0 0 -1	1	

Ad_j	bd_j	cd_j
-0.45 -0.426 0	1	-0.5 0.6455 0.5
0.426 -0.45 0	0	
0 0 -0.9	1	

Результаты компьютерного моделирования ЭМ и ИМ представлены на рисунках 3, 4.

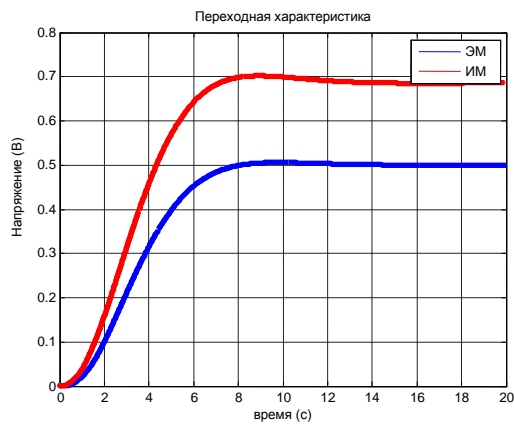


Рис. 3. Графики переходных характеристик электрической модели ЖКФ

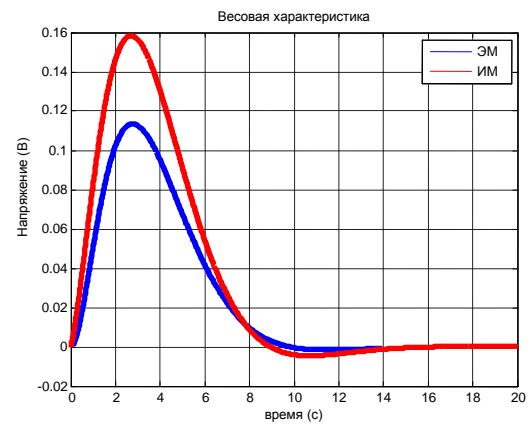


Рис. 4. Графики весовых характеристик электрической модели ЖКФ

После проведения аналогичного эксперимента с ФКФ, по графику переходной характеристики (рисунок 3) наблюдаем, что погрешность выходного сигнала искаженной модели на участке от $[0;1]$ незначительна, а на участке $(1;+\infty]$ составляет примерно 25%. Из рисунка 4 видно, что погрешность выходного сигнала искаженной модели на участке от $[0;1] \cup [6; +\infty]$ незначительна, а на участке $(1;6)$ составляет примерно 25%.

Сбалансированная каноническая форма

В таблице 4 приведены матрицы описания в пространстве состояний ЭМ и ИМ СКФ ЭЦ.

Таблица 4.

Матрицы ЭМ и ИМ СКФ

A_b			b_b	c_b
-0.1171	-0.4024	-0.1386	0.28	0.29 0.33 0.17
0.4024	-0.5047	-0.5842	-0.33	
-0.1386	0.5842	-1.3782	0.17	

A_{db}			b_{db}	c_{db}
-0.1053	-0.4427	-0.1247	0.28	0.29 0.33 0.17
0.4427	-0.4543	-0.6426	-0.33	
-0.1247	0.6426	-1.2404	0.17	

Результаты компьютерного моделирования ЭМ и ИМ представлены на рисунках 5, 6.

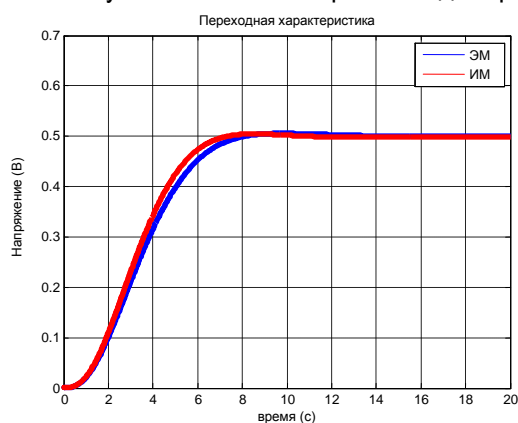


Рис. 5. График переходных характеристик электрической модели СКФ

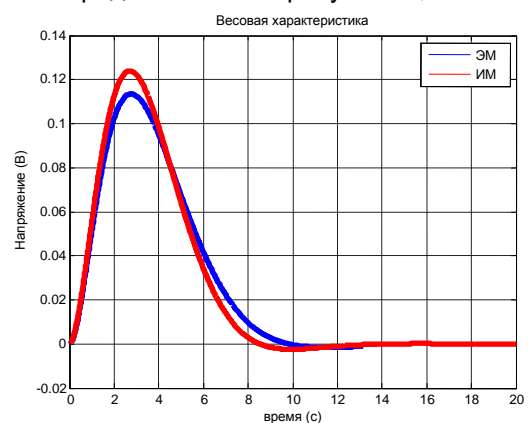


Рис. 6. График весовых характеристик электрической модели СКФ

Из рисунков 5, 6 следует, что выходной сигнал искаженной модели изменился незначительно, что иллюстрирует малую чувствительность СКФ к искажениям.

Каноническая форма Рауса

В таблице 5 приведены матрицы описания в пространстве состояний ЭМ и ИМ КФР ЭЦ.

Матрицы ЭМ и ИМ КФР

A_r			b_r	c_r		
-2	1.0954	0	1.09	0	0	0.373
-1.0954	0	0.4472	0			
0	-0.4472	0	0			

Ad_r			bd_r	cd_r		
-1.8	1.205	0	1.09	0	0	0.373
-1.205	0	0.4919	0			
0	-0.4919	0	0			

Результаты компьютерного моделирования ЭМ и ИМ представлены на рисунках 7, 8.

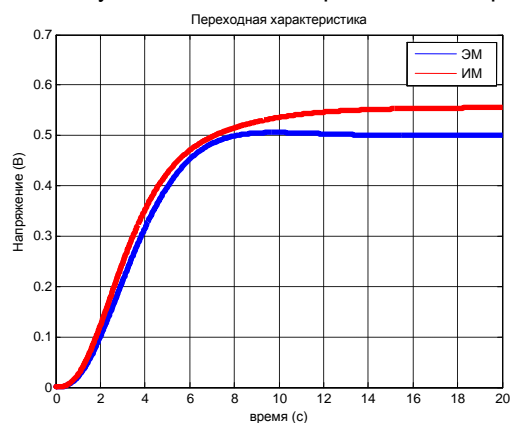


Рис. 7. График переходных характеристик электрической модели КФР

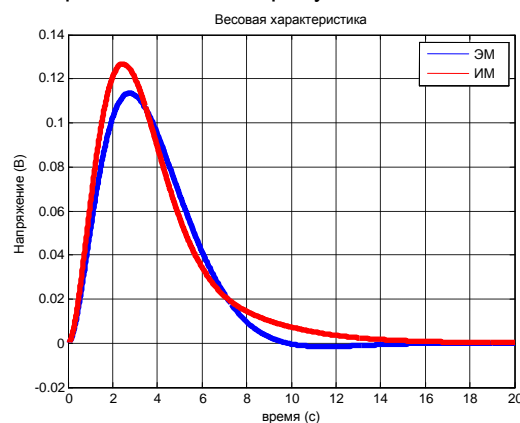


Рис. 8. График весовых характеристик электрической модели КФР

Из рисунков 7, 8 видно, что погрешность выходного сигнала искаженной модели составила примерно 10%.

Для сопоставления погрешностей исследуемых канонических форм на основе полученных результатов воспользуемся вычислением норм разности соответствующих функций:

$$\begin{aligned}
 nrp &= \|p(t) - pd(t)\| = \sqrt{\int_0^{\infty} (p - pd)^2 dt}; \quad np = \|p(t)\| = \sqrt{\int_0^{\infty} p^2 dt}; \\
 nrq &= \|q(t) - qd(t)\| = \sqrt{\int_0^{\infty} (q - qd)^2 dt}; \quad nq = \|q(t)\| = \sqrt{\int_0^{\infty} q^2 dt},
 \end{aligned} \quad (2)$$

где $p(t)$, $pd(t)$ – переходная функция эталонной и искаженной модели, соответственно; $q(t)$, $qd(t)$ – весовая функция эталонной и искаженной модели, соответственно.

Используя формулу (2), вычислим относительную погрешность для переходной и весовой функций:

$$Kp = \frac{nrp}{np}, \quad Kq = \frac{nrq}{nq}.$$

Оценки относительной погрешности канонических форм приведены в таблице 6.

Таблица 6

Оценка относительной погрешности

	ФКФ	ЖКФ	СКФ	КФР
Kp	0.0879	0.3875	0.0260	0.0879
Kq	0.1532	0.4075	0.1018	0.1532

По результатам компьютерного моделирования и оценкам относительной погрешности выходного сигнала (таблица 6) можно сделать вывод, что наименьшую погрешность обеспечивает СКФ; далее следуют ФКФ и КФР; а выходной сигнал системы в ЖКФ оказался наиболее чувствительным к внесению искажений.

Библиографический список

1. *Мироновский Л. А.* Функциональное диагностирование динамических систем: Научное издание. М.-СПб.: изд. МГУ-РИФ, 1998. 256 с.
2. *Мироновский Л. А.* Аналоговые и гибридные модели динамических систем. Скалярные системы // Учебное пособие. 1985.