Задачи заочного тура математической олимпиады для студентов 1 курса

Задача №1

Дана матрица $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. Найти A^{100}.

Задача №2

Даны векторы $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c},\ \overline{d}$. Доказать тождество $\begin{vmatrix}(\overline{a},\ \overline{c}) & (\overline{a},\ \overline{d})\\ (\overline{b},\ \overline{c}) & (\overline{b},\ \overline{d})\end{vmatrix}=\left(\overline{a}\times\overline{b},\ \overline{c}\times\overline{d}\right).$

Задача №3

Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3&4&\cdots&n\\-1&0&3&4&\cdots&n\\-1&-2&0&4&\cdots&n\\-1&-2&-3&0&\cdots&n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\ddots&n\\-1&-2&-3&-4&\cdots&0\end{vmatrix}.$

Задача №4

Пусть $\{x_n\}$ - последовательность, такая что $x_1=25,\ \ x_{n+1}=arctg\,x_n$. Доказать, что последовательность имеет предел и найти его.

Задача №5

Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2\cdot e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

Задача №6

На полуинтервале $[0,+\infty)$ задана функция $\varphi=\varphi(x)$, удовлетворяющая двум условиям: $\varphi(0)\le 0$ и $\varphi''(x)>0$ для всех $x\in(0,+\infty)$. Доказать, что функция $\phi(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x}$ возрастает на интервале $(0,+\infty)$.

Задача №7

Функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке [0, 1] и удовлетворяет условию $2f(x^2)-f^2(x)\ge 1$. Доказать, что на отрезке [0, 1] существует такая точка *c*, что $f'(c)=0$.

Задача №8

Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую системе равенств $\begin{cases}f'(x)=f'(x-1)\\ f(x)+f(x-1)=x\end{cases}$

Задача №9

Доказать, что $\dfrac{1}{e}\le\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx\le\dfrac{\pi}{4}$.

Задача №10

Вычислить $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{1}{(\mathrm{e}^x+1)(x^2+1)}dx.$

Задача №11

Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}.$

Задача №12

Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{r=0}^{n-1}\sqrt{n^2-r^2}$.

Решения задач просьба передавать **до 15 ноября** доценту М.В.Макаровой (по расписанию) или на кафедру.

Внимание! На листках с решением не забывайте указывать номер группы и вашу фамилию