

## Задачи заочного тура Олимпиады по математике студентов 1 и 2 курсов

**Задача №1** (5 баллов)

Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Найти  $A^{100}$ .

**Задача №2** (2 балла)

Даны векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ . Доказать тождество  $\begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{c}) & (\vec{a}, \vec{d}) \\ (\vec{b}, \vec{c}) & (\vec{b}, \vec{d}) \end{vmatrix} = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d})$ .

**Задача №3** (4 балла)

Вычислить определитель  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & n \end{vmatrix}$ .

**Задача №4** (8 баллов)

Пусть  $\{x_n\}$  - последовательность, такая что  $x_1 = 25$ ,  $x_{n+1} = \arctg x_n$ . Доказать, что последовательность имеет предел и найти его.

**Задача №5** (4 балла)

Найти предел функции  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 \cdot e^x)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$ .

**Задача №6** (10 баллов)

На полуинтервале  $[0, +\infty)$  задана функция  $\varphi = \varphi(x)$ , удовлетворяющая двум условиям:  $\varphi(0) \leq 0$  и  $\varphi''(x) > 0$  для всех  $x \in (0, +\infty)$ . Доказать, что функция  $\phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$  возрастает на интервале  $(0, +\infty)$ .

**Задача №7** (9 баллов)

Функция  $f(x)$  дифференцируема на отрезке  $[0, 1]$  и удовлетворяет условию  $2f(x^2) - f^2(x) \geq 1$ . Доказать, что на отрезке  $[0, 1]$  существует такая точка  $c$ , что  $f'(c) = 0$ .

**Задача №8** (3 балла)

Найти функцию  $f(x)$ , удовлетворяющую системе равенств  $\begin{cases} f'(x) = f'(x-1) \\ f(x) + f(x-1) = x \end{cases}$

**Задача №9** (4 балла)

Доказать, что  $\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{\pi}{4}$ .

**Задача №10** (5 баллов)

Вычислить  $\int_{-1}^1 \frac{1}{(e^x + 1)(x^2 + 1)} dx$ .

**Задача №11** (6 баллов)

Найти сумму ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$ .

**Задача №12** (7 баллов)

Вычислить  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{r=0}^{n-1} \sqrt{n^2 - r^2}$ .

Решения задач нужно написать в тетради и передать доценту М.В. Макаровой (работает по расписанию учебных занятий) или на кафедру №1. Срок выполнения работы – 1 декабря 2014 г.

Внимание! Не забывайте указывать номер группы и Вашу фамилию.